Informazioni su questo libro

Si tratta della copia digitale di un libro che per generazioni è stato conservata negli scaffali di una biblioteca prima di essere digitalizzato da Google nell'ambito del progetto volto a rendere disponibili online i libri di tutto il mondo.

Ha sopravvissuto abbastanza per non essere più protetto dai diritti di copyright e diventare di pubblico dominio. Un libro di pubblico dominio è un libro che non è mai stato protetto dal copyright o i cui termini legali di copyright sono scaduti. La classificazione di un libro come di pubblico dominio può variare da paese a paese. I libri di pubblico dominio sono l'anello di congiunzione con il passato, rappresentano un patrimonio storico, culturale e di conoscenza spesso difficile da scoprire.

Commenti, note e altre annotazioni a margine presenti nel volume originale compariranno in questo file, come testimonianza del lungo viaggio percorso dal libro, dall'editore originale alla biblioteca, per giungere fino a te.

Linee guide per l'utilizzo

Google è orgoglioso di essere il partner delle biblioteche per digitalizzare i materiali di pubblico dominio e renderli universalmente disponibili. I libri di pubblico dominio appartengono al pubblico e noi ne siamo solamente i custodi. Tuttavia questo lavoro è oneroso, pertanto, per poter continuare ad offrire questo servizio abbiamo preso alcune iniziative per impedire l'utilizzo illecito da parte di soggetti commerciali, compresa l'imposizione di restrizioni sull'invio di query automatizzate.

Inoltre ti chiediamo di:

+ *Non fare un uso commerciale di questi file* Abbiamo concepito Google Ricerca Libri per l'uso da parte dei singoli utenti privati e ti chiediamo di utilizzare questi file per uso personale e non a fini commerciali.

+ *Non inviare query automatizzate* Non inviare a Google query automatizzate di alcun tipo. Se stai effettuando delle ricerche nel campo della traduzione automatica, del riconoscimento ottico dei caratteri (OCR) o in altri campi dove necessiti di utilizzare grandi quantità di testo, ti invitiamo a contattarci. Incoraggiamo l'uso dei materiali di pubblico dominio per questi scopi e potremmo esserti di aiuto.

+ *Conserva la filigrana* La "filigrana" (watermark) di Google che compare in ciascun file è essenziale per informare gli utenti su questo progetto e aiutarli a trovare materiali aggiuntivi tramite Google Ricerca Libri. Non rimuoverla.

+ *Fanne un uso legale* Indipendentemente dall'utilizzo che ne farai, ricordati che è tua responsabilità accertati di farne un uso legale. Non dare per scontato che, poiché un libro è di pubblico dominio per gli utenti degli Stati Uniti, sia di pubblico dominio anche per gli utenti di altri paesi. I criteri che stabiliscono se un libro è protetto da copyright variano da Paese a Paese e non possiamo offrire indicazioni se un determinato uso del libro è consentito. Non dare per scontato che poiché un libro compare in Google Ricerca Libri ciò significhi che può essere utilizzato in qualsiasi modo e in qualsiasi Paese del mondo. Le sanzioni per le violazioni del copyright possono essere molto severe.

Informazioni su Google Ricerca Libri

La missione di Google è organizzare le informazioni a livello mondiale e renderle universalmente accessibili e fruibili. Google Ricerca Libri aiuta i lettori a scoprire i libri di tutto il mondo e consente ad autori ed editori di raggiungere un pubblico più ampio. Puoi effettuare una ricerca sul Web nell'intero testo di questo libro da `http://books.google.com`

L20
755

Library
of the
University of Wisconsin

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

Paolo Battini

Adolf Eckstein's Verlag Berlin-Charlottenburg

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

OPERE MATEMATICHE

DI

PAOLO RUFFINI

Digitized by Google

Proprietà letteraria

Digitized by Google

OPERE MATEMATICHE

DI

PAOLO RUFFINI

PUBBLICATE

SOTTO GLI AUSPICI DEL CIRCOLO MATEMATICO DI PALERMO

A CURA

DEL PROF. DR. **ETTORE BORTOLOTTI**

TOMO PRIMO

CON RITRATTO DELL'AUTORE

TIPOGRAFIA MATEMATICA DI PALERMO
PIAZZA REGALMICI, VICOLO GUCCIA, 11.

1915

Digitized by Google

Digitized by Google

208480
FEB -6 1917
LB
.9R83
1

PREFAZIONE

[1]) « La scoperta, per opera dei nostri matematici del cinquecento, « della generale risoluzione algebrica delle equazioni del 3° grado, e la « facilità e speditezza con cui i metodi proprî a tale risoluzione poterono « adattarsi alle equazioni del 4° grado, fecero nascere la speranza di ve- « dere presto risolte anche le equazioni dei gradi superiori.

« Invece, per quasi tre secoli, gl'ingegni più eletti si affaticarono in- « torno a quel problema che, al dire del MONTUCLA [2]), stretto d'ogni « lato d'assedio, mentre cedeva ad una ad una le opere esterne, scuopriva « sempre nuove e più formidabili difese.

« Già per il quinto grado, infatti, si presentava tale moltiplicità di « metodi e così fastidiosa complicazione di calcoli, che, se da un lato « distoglieva la vista dalla mèta e disperdeva le forze contro ostacoli ac- « cessori, rinfrancava d'altro lato la speranza nella vittoria finale, coi par- « ziali successi che contro quegli ostacoli si ottenevano, e coi reali pro- « gressi che ne venivano ad ogni ramo delle scienze matematiche.

---

[1]) Estratto da una Comunicazione fatta al Congresso di Parma (1907) della *Società Italiana pel progresso delle Scienze,* nella seduta del 27 settembre 1907. Per quanto concerne la Deliberazione presa dall'Assemblea dei Soci residenti del *Circolo Matematico di Palermo* nell'adunanza straordinaria del 31 agosto 1907 intorno alla « pubblicazione delle *Opere Matematiche* di PAOLO RUFFINI e del suo *Carteggio* con gli scienziati del suo tempo », della quale Deliberazione fu data lettura in principio di detta Comunicazione, veggasi il « Supplemento ai Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo », vol. II (1907), pag. 41. [Tomo XXIV (2° sem. 1907) dei Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo. Adunanza del 10 novembre 1907].

[2]) *Histoire des Mathématiques,* nouvelle édition, considérablement augmentée, et prolongée jusque vers l'époque actuelle, Tome III (achevé et publié par Jérome DE LALANDE) [Paris, chez Henri Agasse, an X (mai 1802)], pag. 18, linee 28-30. La frase cui qui si allude fu pubblicata tre anni dopo la dimostrazione della impossibilità data dal RUFFINI.

Digitized by Google

« Nella seconda metà del settecento, quando si cercò di mettere or-
« dine in quei calcoli, di condurre quei metodi ad un unico principio e
« di indagare così la vera natura della risoluzione generale delle equazioni,
« si vide che essa era intimamente connessa con la ricerca uniforme e
« prestabilita di tutte le permutazioni fra le radici. Notevoli sono i risul-
« tamenti a cui giunsero, quasi contemporaneamente, il WARING [3]), il VAN-
« DERMONDE [4]), il LAGRANGE [5]); ma a questi autori mancava un punto di
« vista generale, col quale una simile ricerca fosse salvata dal perdersi in
« innumerevoli particolarità [6]). Le loro memorie perciò, piuttosto che se-
« gnare l'inizio di un nuovo periodo, segnarono la fine dell'antico, e,
« dopo di esse, il problema rimase stazionario per quasi trent'anni.

« Un nuovo impulso fu dato dalle opere del matematico modenese
« PAOLO RUFFINI (1765-1822).

« La sua « *Teoria generale delle equazioni, in cui si dimostra impossibile*
« *la soluzione algebrica delle equazioni generali di grado superiore al quarto* »
« (Bologna, 1799), col far dipendere la risolubilità algebrica di una equa-
« zione dalla esistenza di determinati sottogruppi del gruppo cui essa ap-
« partiene, trova il vero principio per la dimostrazione rigorosa di una
« proposizione, della cui verità lo stesso LAGRANGE sempre fu in dubbio,
« e decide di una questione, tenuta per insolubile dai dotti di quel tem-
« po [7]) e non risolubile allora con alcun altro mezzo [8]).

« Con la applicazione poi, che egli fece per primo, della idea fonda-
« mentale di *gruppo di operazioni,* col distinguere, con l'enumerare e clas-

---

3) *Miscellanea Analytica* (Cantabrigiae, 1762), lib. I, Cap. IV, pp. 34-65; *Meditationes algebraicae* (Cantabrigiae, 1770), Cap. III, pp. 78-124.

4) *Mémoire sur la résolution des équations* [Histoire de l'Académie des Sciences, année 1771 (Paris, 1774), pp. 47-49; *Mémoires,* etc., pp. 365-416].

5) *Réflexions sur la résolution algébrique des équations* [Nouveaux Mémoires de l'Académie de Berlin pour les années 1770-71 (Berlin, 1772-73); *Œuvres,* t. III, pp. 205-421].

6) HEINRICH BURKHARDT: *a*) *Die Anfänge der Gruppentheorie und* PAOLO RUFFINI [Zeitschrift für Mathematik und Physik Jahrgang XXXVII (1892), Supplement, pp. 119-159], p. 131; *b*) PAOLO RUFFINI *e i primordii della teoria dei gruppi* (Traduzione di ERNESTO PASCAL) [Annali di Matematica pura ed applicata, serie II, tomo XXII (1894), pp. 175-212], p. 186. D'ora innanzi, nel citare questo importante lavoro richiameremo soltanto le pagine della traduzione italiana.

7) BORTOLOTTI, *Carteggio di* PAOLO RUFFINI *con alcuni scienziati del suo tempo, relativo al teorema sulla insolubilità di equazioni algebriche, generali, di grado superiore al quarto* [Memorie di Matematica e di Fisica della Società Italiana delle Scienze (detta dei XL), serie III, tomo XIV (1907), pp. 291-325], pp. 294, 298, 300.

8) Cfr. BURKHARDT, loc. cit. 6), *b*), pag. 186.

Digitized by Google

« sificare i varî gruppi occorrenti alle sue ricerche, con lo scuoprimento « delle idee di *transitività* e di *primitività* e delle relazioni fra la irreduci- « bilità di una equazione e la transitività del suo gruppo, e fra la risolu- « bilità mediante equazioni ausiliarie di grado inferiore e la imprimitività « dello stesso gruppo [9]), egli ha posto le basi di quella teoria dei gruppi « di sostituzioni, che doveva così profondamente rinnovare tutta l'analisi « algebrica.

« Tali idee peraltro, che nella mente di RUFFINI certo erano chiare « e precise, nelle sue opere sono adombrate con terminologia disusata, « inceppate da considerazioni non necessarie, complicate da disadatto sim- « bolismo, esposte in forma prolissa ed inelegante ed in veste tipografica « disordinata e scorretta. Di troppo poi precorrevano il loro tempo, perchè « i contemporanei potessero riconoscerne la esattezza ed apprezzarne la « importanza [10]).

« Il poco che troviamo scritto, dei giudizi che a quel tempo si fa- « cevano sulle opere di RUFFINI, ci porterebbe a credere che egli avesse « fama di ingegno originale e bizzarro, sottile costruttore di sofismi, contro « i quali sarebbe stato pericoloso il combattere, ma che il buon senso « consigliava di rifiutare [11]). Ben lungi dall'arrendersi alle prove che egli « aveva date, i geometri continuarono le ricerche per la risoluzione com- « pleta di equazioni algebriche generali di grado superiore al quarto [12]) e « quella cieca incredulità, quella ostilità altezzosa, tanto più umiliante « quanto più voleva sembrare cortese, esasperavano e sfiduciavano il RUF- « FINI [13]), che, in luogo di continuare le sue ricerche generali sulla teoria

---

9) Cfr. BURKHARDT, loc. cit. 6), *b*), pp. 211-212.

10) Cfr. *Influenza dell'opera matematica di* PAOLO RUFFINI *sullo svolgimento delle teorie algebriche.* Discorso letto il 4 Novembre 1902 in occasione della solenne apertura degli studi nella R. Università di Modena dal prof. E. BORTOLOTTI [Annuario della R. Università di Modena per l'anno accademico 1902-1903, pp. 23-77], pp. 44-53.

11) Cfr. *Carteggio,* etc., loc. cit. 7), pp. 300, 302, 303, 306, 307, etc.

12) Notevoli i tentativi di ABEL e di GALOIS per le equazioni del quinto grado {ABEL, *Œuvres complètes* (Edizione di SYLOW e LIE), tomo II, pag. 290; J. TANNERY, *Manuscrits et papiers inédits de* GALOIS [Bulletin des Sciences Mathématiques, 2e série, tome XXX (1906), 1ère Partie, pp. 226-248, 255-263], pag. 248}, oltre quello di WRONSKI, cui rispose lo stesso RUFFINI con la sua Memoria: *Intorno al metodo generale proposto dal signor* HOËNÉ WRONSKI *onde risolvere le equazioni di tutti i gradi* [Memorie di Matematica e di Fisica della Società Italiana delle Scienze (detta dei XL), serie I, tomo XVIII (1820), pp. 56-68].

13) Cfr. *Carteggio,* etc., l. c. 7), pp. 306-308 (nota a piè di pagina).

Digitized by Google

« dei gruppi e sulle equazioni abbassabili di grado [14]), parve non poter « più abbandonare il teorema della impossibilità, e non aver pensiero che « maggiormente lo preoccupasse, oltre quello di mettere la sua dimostra- « zione al riparo di ogni critica.

« Questo travaglio durò, ben può dirsi, per gli ultimi venti anni di « sua vita; ed è mirabile la tenacia nel riprendere, e semplicizzare, e svi- « scerare in ogni sua parte quel teorema, che dovrebbe pur chiamarsi *suo*. « Egli vide e percorse entrambe le strade, che dopo di lui tennero ABEL « e GALOIS, giungendo così alla « più completa conoscenza della natura « della impossibilità ed irresolubilità che s'era proposto di provare » [15]), « e, dopo sei successive redazioni, lo espose in forma per quei tempi « perfetta, e con semplicità non più superata [16]). Ma nemmeno ciò potè « smuovere il preconcetto, che non valesse la pena impiegare tempo e « fatica nello studio di opere, le quali a priori dovevano riguardarsi come « destituite di fondamento logico, e che si aggiravano sopra futilità di « nessuna importanza scientifica [17]). Anche RUFFINI [come più tardi ABEL [18]) « e GALOIS] fu sfavorevolmente giudicato dagli scienziati dell'Accademia « di Francia.

« Il DE LALANDE, nell'edizione del 1802 del tomo III dell'*Histoire*

---

[14]) Nella *Teoria generale delle equazioni*, etc. del 1799, egli aveva tracciato lo schizzo di una teoria generale delle sostituzioni da cui si riprometteva di ricavare le condizioni per la risolubilità algebrica delle equazioni. Questa questione fu ripresa nel 1801 con la Memoria « *Della soluzione delle equazioni algebraiche determinate particolari di grado superiore al quarto* » [Memorie di Matematica e di Fisica della Società Italiana delle Scienze (detta dei XL), serie I, tomo IX (1802), pp. 444-526] (con la data 21 ottobre 1801), il cui scopo era così espresso dall'Autore: « Proposta una equazione particolare « e di grado maggiore del quarto cercare il modo onde conoscere: 1° I casi in cui questa non è ca- « pace di abbassamento opportuno alla sua soluzione. 2° I casi nei quali può essa opportunamente ab- « bassarsi. 3° Finalmente i metodi pratici per cui possiamo ottenere attualmente un simile abbassamento, « e per cui possiamo in seguito dalle radici della equazione ridotta dedurre le radici della proposta ».

[15]) Cfr. BURKHARDT, l. c. [6]), *b*), pp. 197-198.

[16]) ... « È appena necessario dire che questa redazione della dimostrazione coincide in tutti i « punti essenziali con quella che nei libri si suole indicare come la *modificazione di* WANTZEL *della di-* « *mostrazione di* ABEL ». [BURKHARDT, l. c. [6]), *b*), pag. 209].

[17]) Cfr. *Influenza*, etc., l. c. [10]), pp. 53-61. *Carteggio*, etc., l. c. [7]), pp. 306-307, note a piè di pagina; pag. 321.

[18]) La Memoria « *Mémoire sur une propriété générale d'une classe très étendue de fonctions transcendantes* » da ABEL raccomandata al CAUCHY (Op. di ABEL, edizione SYLOW e LIE, tomo II, pag. 260) e presentata alla Accademia il 30 ottobre 1826, non fu pubblicata che nel 1841, dopo la morte del disgraziato autore.

Digitized by Google

« *des Mathématiques* del MONTUCLA [19]), non credette di dover tenere conto « delle sue Opere. Il DELAMBRE nel *Rapporto* famoso del 1808, vi accennò « come a tentativi piuttosto infelici che fortunati [20]). Quegli stessi LA- « CROIX e POISSON, che più tardi dovevano respingere anche le idee di « GALOIS [21]), ed il LEGENDRE, ed il CARNOT, senza azzardarsi a riprovarlo « apertamente, per non essere costretti ad « entrer en lice avec un géo- « mètre aussi savant et aussi exercé » fecero intendere che « ... l'opinion « la plus généralement répandue est que s'il est impossible d'avoir une « solution complète des équations algébriques, il ne soit aussi bien diffi- « cile de démontrer clairement cette impossibilité que tout le monde croit « sentir » [22]); che d'altronde ... « la maniera colla quale l'autore voleva « trattare la questione da lui esposta, non poteva assolutamente servire a « ciò che aveva voluto provare » [23]) ed infine « ... les questions qui « font l'objet de ses nouvelles recherches sont sans doute d'un moindre « intérêt » [24]).

« Il LAGRANGE, vecchio e presso la tomba, non seppe difenderlo « contro l'opinione prevalente [25]), ed egli ebbe bel protestare presso le « Accademie e gli scienziati, e chiedere un motivato giudizio; *non potè « mai ottenere nemmeno che si leggessero i suoi scritti* [26]), perchè, gli scriveva « il Segretario perpetuo DELAMBRE [27]), « *vous connaissez assez le prix du « temps pour concevoir aussi la répugnance qu'ont la plupart des géomètres « pour s'occuper longtemps des travaux les uns des autres ...* »; e le sue « opere erano voluminose e, per quei tempi, difficili.

« Le opere di GALOIS ebbero diversa fortuna, perchè trovarono tempi « più maturi (CAUCHY aveva già volgarizzate le idee di RUFFINI, ed ABEL « le aveva continuate); ebbero poi la ventura di essere raccolte e presen-

---

[19]) Cfr. [2]).

[20]) *Carteggio*, etc., l. c. [7]), pag. 292, note a piè di pagina.

[21]) Cfr. J. TANNERY, *Manuscrits et papiers inédits de* GALOIS, l. c. [12]), pag. 231.

[22]) Cfr. *Carteggio*, etc., l. c. [7]) (Lettera di DELAMBRE, Segretario perpetuo dell'Accademia), pag. 300.

[23]) Cfr. *Carteggio*, etc., l. c. [7]) (Lettera di GAULTIER CLAUBRY che riporta il giudizio di LEGENDRE), pag. 303.

[24]) Cfr. *Carteggio*, etc., l. c. [7]) (Rapporto di CARNOT, LEGENDRE, POISSON), pag. 321.

[25]) Cfr. *Carteggio*, etc., l. c. [7]), pp. 298-299 (nota), pag. 302.

[26]) Cfr. *Carteggio*, etc., l. c. [7]), pag. 292 (nota), dove si riporta un brano di una lettera di PAOLI al RUFFINI.

[27]) Cfr. [22]).

Digitized by Google

« tate dal LIOUVILLE, integrate dal BETTI, ridotte a teoria dal JORDAN, ed « hanno il vantaggio di essere brevi, e di lasciare aperti molti varchi ad « ulteriori estensioni.

« Il RUFFINI non ebbe *nessuno* dalla sua; i suoi stessi compatrioti « gli furono contrari, perchè, in quei tempi di entusiasmi rivoluzionari, « non poterono tollerare in lui, che pur fortemente sentiva il sentimento « di italianità, il sostenitore della dominazione Estense ed il promotore della « più insopportabile repressione, di quella del pensiero [28]); ed egli, quanto « più si sentiva osteggiato, tanto più si rinchiudeva nel suo intollerante « ascetismo [29]).

« L'unico forse, fra gli scienziati contemporanei, che interamente lo « comprendesse, quegli che dallo studio profondo delle sue opere concepì « così alta stima di lui, da proporlo membro dell'Accademia di Francia [30]), « il CAUCHY, non ebbe riguardi, nel presentare quelle idee, nel riprodurre « quei risultamenti, nell'esporre quei metodi [31]), di far debitamente risul- « tare le fonti cui aveva attinto [32]) ed a lui stesso furono attribuiti anche « i meriti del RUFFINI.

« Non deve far meraviglia perciò che le opere di RUFFINI sieno presto « state dimenticate; è molto se in tre quarti di secolo si vede qualche « volta citato il suo nome, a proposito del teorema della impossibilità, « come quello di chi ne aveva, con poca fortuna, tentata la dimostra- « zione [33]). Fa meraviglia invece che nemmeno oggi sieno debitamente

---

[28]) Cfr. *Influenza*, etc., l. c. [10]), pp. 39-40.

[29]) Cfr. nel *Carteggio*, etc., l. c. [7]), pag. 318, una singolare sua lettera al VON ZACH.

[30]) Cfr. *Carteggio*, etc., l. c. [7]), pp. 314-316.

[31]) « ... che cosa resta ... della contribuzione data da CAUCHY alla teoria dei gruppi, lui cui si « è soliti attribuire la più gran parte dei teoremi di cui abbiamo parlato? ». [BURKHARDT, l. c. [6]), *b*), pag. 212].

[32]) « ... Ma le poche parole colle quali CAUCHY nella sua prima pubblicazione rammenta il « suo predecessore sono così indeterminate che sono state intese in generale in una maniera che ha « contribuito più ad oscurare che a mettere in luce i lavori di RUFFINI; e CAUCHY non ha mai smen- « tito, con una acconcia spiegazione delle sue parole, un tale apprezzamento del suo predecessore ». [BURKHARDT, loc. cit. [6]), *b*), pag. 212].

[33]) Nessuno fra i più reputati libri di testo pubblicati fuori d'Italia sulla teoria dei gruppi, cita il RUFFINI. Degli Autori di memorie fondamentali ricorderò ABEL. In calce alla sua Memoria del 1824 (*Œuvres*, ed. di SYLOW e LIE, tomo II, pag. 293) il SAIGEY aveva posto la nota seguente: « Dans un « *Mémoire sur l'insolubilité des équations algébriques générales d'un degré supérieur au quatrième* (*Société* « *Italienne des Sciences*, tome IX) et dans sa *Théorie générale des équations* (*ibid*) (sic), RUFFINI, géo- « mètre italien mort il y a quelques années, a démontré la proposition qui fait le sujet de cet article;

Digitized by Google

« apprezzate. È bensì vero che nella catena delle sue deduzioni c'è qualche « lacuna. Ma, a parte il fatto che a' suoi tempi lacune di quel genere « non potevano essere avvertite, nonchè colmate [34]), se non si dovessero « attribuire agli autori, altro che le scoperte che da essi furono portate a « perfetto compimento, che cosa rimarrebbe, per es., a GALOIS della teo- « rica che da lui prende il nome?

« La rivendicazione del nome di RUFFINI, nonostante il poderoso la- « voro di BURKHARDT, tarda ancora, perchè nessun autore potrebbe essere « apprezzato prima di essere conosciuto, e pochi per certo sono quelli che « conoscono le sue opere.

« Queste opere, nelle quali, come dimostra il BURKHARDT, « l'algebra « anche in intere teorie, ha essenzialmente progredito », sparse nei volumi « di dimenticate accademie, stampate senza nessuna cura tipografica, sono « difficili di rintracciare, penose da leggere, e stancano la pazienza del più « appassionato cultore.

« Raccogliere quegli scritti in un unico corpo, rendendone facile e « gradita la lettura con la uniformità e la chiarezza della veste tipografica, « con la aggiunta di qualche nota, che, nei passi più importanti, ne aiuti « la interpretazione secondo il linguaggio ora in uso per quella teoria, e

---

« un second mémoire du même auteur sur *l'insolubilité des équations algébriques générales d'un degré « supérieur au quatrième, soit algébriquement, soit d'une manière transcendante,* se trouve dans les Mémoires « de l'Inst. nat. italien, t. I, part. 2.... M. CAUCHY a revu la démonstration de RUFFINI et il en a fait « un rapport favorable à l'Académie des Sciences, il y a quelques années. D'autres géomètres avouent « n'avoir pas compris cette démonstration et il y en a qui ont fait la remarque très juste que RUFFINI, « en prouvant trop, pourrait n'avoir rien prouvé d'une manière satisfaisante ».

Questa nota prova che il SAIGEY parlava per sentito dire, senza mai aver avuto nemmeno fra mano le opere di RUFFINI. Più esattamente il SYLOW, nel 1881, aggiungeva (ibidem): « Le point faible « du raisonnement de RUFFINI, c'est qu'il suppose, sans démonstration, que les radicaux qui concourent « à la résolution de l'équation s'expriment rationnellement par les racines. Ce défaut de son raisonne- « ment, ou plutôt un défaut analogue, a contribué à produire le résultat faux dont parle SAIGEY ». ABEL stesso nella sua memoria del 1828 [*Œuvres*, l. c. [12]), t. II, pag. 218] parla di RUFFINI in modo che fa ben capire non aver mai egli stesso conosciuto quell'Autore se non attraverso le opere di CAUCHY. [Cfr. *Influenza*, etc., loc. cit. [10]), pp. 60-61]. La risoluzione *trascendentale*, come spiega il BURKHARDT [loc. cit., [6]), *b*), pp. 206-207] sarebbe quella che fa uso anche di funzioni logaritmiche e circolari, ed il RUFFINI avrebbe inteso di provare che nemmeno questa è possibile. Le sue deduzioni sono allora esatte; ma il modo inesatto con cui si è espresso ha contribuito non poco a togliere credito alle sue opere. — Anche GALOIS cita RUFFINI. [Cfr. J. TANNERY, loc. cit. [12]), pag. 242].

[34]) « ... è un difetto del resto di cui non sono privi neanche i migliori matematici di quel « tempo, e che perciò non si può attribuire a lui personalmente ... ». [BURKHARDT, loc. cit. [5]), *b*), pag. 210].

Digitized by Google

« che introduca le modificazioni e le aggiunte che lo stesso RUFFINI ha « lasciato nei suoi manoscritti, era opera di schietto patriottismo e di grande « amore della scienza, da molto tempo aspettata.

« A questa opera si è ora accinto il CIRCOLO MATEMATICO DI PA- « LERMO, e per lui il suo benemerito fondatore G. B. GUCCIA, direttore « di quei RENDICONTI.

« Questi, con slancio generoso, si è addossato tutte le spese, e si è « incaricato della parte più delicata e faticosa: la cura della stampa; ha « poi voluto che io mi occupassi di preparare il manoscritto, collazionando « le antiche edizioni cogli autografi del RUFFINI, ora conservati presso la « R. ACCADEMIA DI SCIENZE, LETTERE ED ARTI IN MODENA » [35]).

La deliberazione presa dalla Assemblea dei Soci residenti del *Circolo Matematico di Palermo* di ristampare le *Opere Matematiche ed il Carteggio di* PAOLO RUFFINI, comunicata alla *Società Italiana pel progresso delle Scienze,* nei termini qui sopra riportati, e largamente diffusa nelle pubblicazioni del Circolo, ha richiamato sopra RUFFINI l'attenzione dei dotti. Già un distinto cultore della storia della Scienza, l'americano F. CAJORI, si è reso fautore della rivendicazione al RUFFINI anche della scoperta del *cosidetto Metodo di* HORNER per il calcolo approssimato delle radici di una equazione numerica [36]); e questo fatto, mentre è nuova prova dell'interesse della nostra pubblicazione, fa sperare che da essa potrà venire in luce tutto il merito dell'opera di PAOLO RUFFINI.

In questo primo volume abbiamo riprodotto, dall'originale del 1799,

---

35) Ho avuto la fortuna di trovare le carte di PAOLO RUFFINI, presso il pronipote Avv. LUIGI RUFFINI segretario del R. Istituto di Belle Arti in Modena. Erano, chissà da quanto tempo, rinchiuse in una cassa, e, nonostante abbiano subito qualche manomissione, il loro disordine le ha in parte salvate, poichè gli autografi di valore non si potevano, senza un esame assai lungo, scovrire fra il monte di carte in cui erano sepolti. L'avvocato RUFFINI ha donato tutti questi documenti all'ACCADEMIA DI MODENA, perchè i cultori di patrie memorie possano liberamente consultarli. Io li ho ordinati e disposti in parecchi cartoni, e mi propongo di compilarne il catalogo. Ho potuto ricostruire i manoscritti completi di quasi tutte le opere. Di tutte poi ho trovato molti abbozzi, tentativi, note, osservazioni, aggiunte, di pugno del RUFFINI.

Ho anche ricomposto ed ordinato un voluminoso carteggio.

36) HORNER'*s method of approximation anticipated by* RUFFINI; by Professor FLORIAN CAJORI [Bulletin of the American mathematical Society — 2de Series, Vol. XVII, N° 8, pp. 409-414 (May 1911)].

P. RUFFINI *ed il così detto « Metodo di* HORNER » di FLORIAN CAJORI. Traduzione autorizzata di GINO LORIA [Bollettino di bibliografia e storia delle Scienze Matematiche. Anno XIII (1911), pp. 81-86].

Digitized by Google

la *Teoria generale delle Equazioni,* cui segue, come appendice, l'opuscolo inedito « *Rischiarimenti e risposte alle obbiezioni* » che il RUFFINI compose prima del 1802, e lasciò (tutto di suo pugno), fra i suoi manoscritti.

Viene poi la Memoria « *Delle Soluzioni delle equazioni algebraiche determinate particolari di grado superiore al quarto* » stampata la prima volta nelle Memorie di Matematica e di Fisica della Società Italiana delle Scienze, tomo IX (Modena, 1802) pp. 444-525.

L'importanza dell'Opuscolo *Rischiarimenti e risposte alle Obbiezioni,* risulta da ciò che quivi il RUFFINI, non solo risponde alle obbiezioni dei suoi contemporanei; ma previene alcune critiche che furono fatte solo in tempi più recenti e completa la dimostrazione di teoremi che hanno capitale importanza nella teoria delle sostituzioni e che, trovati da lui, non risultavano sufficientemente provati da ciò che egli aveva esposto nel testo.

Per simili motivi hanno molto interesse anche le *note poste a piè di pagina,* le quali sono sempre dello stesso Autore, da lui pubblicate in opere posteriori o lasciate manoscritte fra le sue carte.

Di ciascuna di queste note e di ogni anche lieve modificazione al testo della prima edizione si è data ragione nelle *Annotazioni* poste in fondo al volume ed indicate con un numero di riferimento chiuso in parentesi quadra.

ETTORE BORTOLOTTI.

Digitized by Google

Digitized by Google

TEORIA GENERALE

DELLE

EQUAZIONI,

IN CUI SI DIMOSTRA IMPOSSIBILE LA SOLUZIONE ALGEBRAICA

DELLE EQUAZIONI GENERALI DI GRADO SUPERIORE AL QUARTO.

Bologna MDCCXCVIIII. — Nella Stamperia di S. Tommaso d'Aquino.
2 vol. in-8°, di pp. I-VIII, 1-206 (Parte I) e 207-516 (Parte II).

Digitized by Google

Digitized by Google

DISCORSO PRELIMINARE.

La soluzione algebraica delle equazioni generali di grado superiore al quarto è sempre impossibile. Ecco un teorema troppo importante nelle Matematiche, che io credo, se pur non erro, di poter asserire, e di cui la dimostrazione quella si è, che principalmente mi ha spinto alla pubblicazione del presente volume.

L'immortale DE LA GRANGE con le sublimi sue riflessioni intorno alle equazioni, inserite negli Atti dell'Accademia di Berlino, ha somministrato il fondamento alla mia dimostrazione: conveniva dunque premettere a questa, per la maggiore sua intelligenza, un ristretto di simili riflessioni.

Oltre l'accennato teorema, varie altre cose riguardanti le equazioni essendomi stato dato di determinare, ed altre di raccogliere, specialmente dal chiarissimo DE LA GRANGE, ho stimato bene il congiungere tutto insieme, e insieme darlo alla luce. Ma l'ordine necessario a darsi a simili materie esigeva una certa distribuzione: quella, che seco porta una teoria di equazioni, sembra certamente la più opportuna; questa dunque trascelgo, e mi lusingo così di presentare al pubblico una teoria generale delle equazioni adorna delle più recenti scoperte e, per quanto io sappia, la più completa finora.

Dividesi tutta l'Opera in 20 Capi. Esposte nel Capo 1° alcune nozioni sulle funzioni in generale, nei Capi 2°, 3°, 9° e 10° presentansi le proprietà principali delle equazioni. Nei Capi 4°, 5°, 6°, 7° e 8° vengono compresi i metodi di eseguire le trasformazioni, le eliminazioni e le riduzioni. I Capi 11°, 12° contengono la soluzione, e *a posteriori* ed *a priori,* delle equazioni del 3° e 4° grado. Il Capo 13° dimostra l'impossibilità della soluzione algebraica delle equazioni generali di grado maggiore del 4°. Nei Capi 14°, 15°, 16°, e sul fine del 20°, parlasi delle equazioni capaci di essere ridotte ad altre di grado inferiore, e i metodi vengono esposti onde ottenere un simile abbassamento. I Capi finalmente 17°, 18°, 19° e 20° insegnano la maniera di risolvere, per approssimazione e per serie, le equazioni sì numeriche che letterali, tanto determinate che indeterminate.

Digitized by Google

Le cose che, oltre l'accennato teorema, mi lusingo di presentare come non prive affatto di novità, son le seguenti:

1° Una formola generale delle funzioni esistente nel Capo 1°, e il metodo con cui, per mezzo di questa, vengono nel Capo 2° dimostrate tutte le proprietà delle equazioni dipendenti dal rapporto generale dei coefficienti con le proprie radici.

2° Il ristretto delle due famose Memorie di DE LA GRANGE comprendenti le riflessioni sovraccennate sulle equazioni. Questo vien contenuto nei Capi 5°, 8°, 12°, 15°, nella prima parte del 13°, ed è congiunto a dei rischiarimenti e a delle riflessioni ulteriori.

3° La considerazione, nei Capi 7°, 8°, 12°, 16°, delle funzioni irrazionali, tralasciata dal chiarissimo Autore nelle indicate Memorie.

4° Alcune considerazioni fatte nel Capo 7° sulla eliminazione di una, due, o più incognite da un corrispondente numero di equazioni, per cui mediante il metodo di DE LA GRANGE apparisce potersi sempre determinare con esattezza l'equazione finale.

5° Una dimostrazione, nel Capo 8°, assai semplice, e indipendente dal Calcolo differenziale, del come si determini il valore della frazione $\frac{0}{0}$, mentre però essa dipenda da funzioni di una sola variabile razionale.

6° La dimostrazione della necessità del caso irreducibile, qualunque via si tenga nella soluzione algebraica della equazione generale del 3° grado: e questa si contiene nel Capo 12°.

7° La soluzione, nel Capo 18°, per serie, delle equazioni algebraiche indeterminate proposte dal chiarissimo CRAMER nella sua Introduzione all'Analisi delle linee curve, ma resa pienamente algebraica, escluso il triangolo ed il parallelogrammo analitico, e introdottovi il principio datoci da DE LA GRANGE onde determinare gl'infiniti e gl'infinitesimi dello stesso ordine.

8° Un metodo di risolvere per serie le equazioni algebraiche determinate. Occupa questo il Capo 19°; e nel Capo istesso contienesi una formola, ed una maniera spedita, onde elevare ad una potenza qualunque h il polinomio

$$Lx^{\alpha} + Mx^{\alpha-1} + Nx^{\alpha-2} + Px^{\alpha-3} + \cdots$$

9° Una maniera, nel Capo 20°, di risolvere per serie, col mezzo delle frazioni continue, una qualsivoglia equazione algebraica, sì determinata che indeterminata: coincide però questo metodo con quello che ci dà il DE LA GRANGE per la integrazione per approssimazione delle equazioni differenziali.

10° Una raccolta, finalmente, ed una riduzione, di quasi tutte le principali osservazioni e dimostrazioni che il nostro immortale DE LA GRANGE ha esposte in diverse Memorie rapporto ai diversi teoremi generali delle equazioni.

Digitized by Google

TEORIA GENERALE
DELLE
EQUAZIONI.

CAPO I.

DELLE FUNZIONI IN GENERALE.

1. Col nome di *funzione di una o più variabili* intendiamo un'*espressione analitica qualsivoglia, in cui essa, od esse, si contengono sole, o congiunte a delle quantità costanti;* così $5x^2$, $6az - b$ saranno due funzioni, la prima della variabile x, la seconda della z; ed $ax^3 - \frac{b^5}{z}$ sarà una funzione di amendue le variabili x, z.

2. Affine d'indicare in generale una funzione qualunque di una o più variabili, siamo soliti servirci della lettera f e della parentesi; così $f(x)$ significa una qualunque funzione della x; $f(x)(y)$ ne esprime una qualsivoglia delle x, y; e $f(x)(y)(z)$ una delle x, y, z.

3. Considerando però le diverse funzioni particolari siamo soliti nell'accennarle servirci in diverse maniere della parentesi. Imperciochè:

1° *o la funzione cangia di valore per la permutazione fra loro delle variabili in essa contenute,* come succede nella funzione $ax^3 - \frac{b^5}{z}$, il valore della quale si cambia per la permutazione di z in x, venendone perciò il risultato $az^3 - \frac{b^5}{x}$, quantità generalmente ben diversa dalla $ax^3 - \frac{b^5}{z}$;

2° *o tale funzione conserva sempre il medesimo valore, qualunque permutazione si faccia tra le variabili,* come si vede accadere nelle espressioni axy, $x^3 + y^3 + z^3$, il valor delle quali resta sempre il medesimo, qualunque permutazione si pratichi fra le indeterminate;

3° o finalmente, come vedesi nelle tre $x^2 + y^2 + z$, $\frac{x}{y} + \frac{z}{u}$, $xy + zu$, *la nostra funzione si conserva la medesima sotto alcune permutazioni, e si cambia sotto di altre.*

Nel primo di questi casi la funzione si accenna, come è stato indicato nel n° prece-

Digitized by Google

dente; onde la $ax^3 - \frac{b^5}{z}$ si accennerà per $f(x)(z)$. Generalmente poi, non essendo $ax^3 - \frac{b^5}{z} = az^3 - \frac{b^5}{x}$, non avremo corrispondentemente neppure $f(x)(z) = f(z)(x)$.

Nel caso secondo, le variabili frammezzate con virgole si pongono fra due parentesi solamente, ed avremo perciò

$$axy = f(x, y), \quad x^3 + y^3 + z^3 = f(x, y, z);$$

risultando quindi

$$f(x, y) = f(y, x), \quad f(x, y, z) = f(z, x, y), \ldots$$

Nel terzo caso infine, se la funzione sia come la $x^2 + y^2 + z$, s'indicherà per

$$f(x, y)(z);$$

se essa è come la $\frac{x}{y} + \frac{z}{u}$, che resta la stessa soltanto pel cambiamento simultaneo di x in z, e di y in u, si accennerà per

$$f[(x)(y), (z)(u)];$$

e se finalmente la funzione, qual'è la $xy + zu$, non cambia valore per la permutazione di amendue le x, y in amendue le z, u, e per quella di x in y, e di z in u, essa in allora si esprimerà per

$$f[(x, y), (z, u)].$$

4. Chiameremo funzioni *simili* tutte quelle che ci vengono rappresentate da una medesima espressione generale; e quelle diremo *dissimili,* che ci vengono rappresentate da espressioni diverse. Saranno perciò simili fra loro le due funzioni

$$x + y + az^3, \quad x^2 + y^2 + \frac{a^3}{z},$$

venendo amendue rappresentate dall'espressione generale

$$f(x, y)(z)$$

(n° prec., 3°); e saranno fra loro dissimili le due

$$ax^2 - by^3, \quad ax^2 + ay^2,$$

venendo la prima compresa sotto la $f(x)(y)$ (n° prec., 1°), e la seconda sotto la $f(x, y)$ (n° prec., 2°).

5. Le funzioni particolari, secondo la diversa forma sotto cui racchiudono le variabili, distinguonsi in diverse specie; altre diconsi *intere*, qual'è la $ax^3 + bz$ e la $\frac{a}{b}x^2 - \frac{c}{e}y$, funzioni amendue nelle quali le variabili non sono in istato di divisione; ed altre si chiamano *fratte,* come è la $\frac{a^2 - y^2}{x^3}$, poichè in essa una variabile almeno esiste nel denominatore.

Distinguonsi inoltre le funzioni in *razionali* ed *irrazionali,* razionali dicendosi quelle nelle quali non esiste variabile alcuna sotto di alcun radicale, come sono le precedenti e le altre $ax^3 + \frac{b}{z}$, $x^2\sqrt[3]{a} + yx\sqrt[4]{b^3}$, e chiamandosi irrazionali quelle che

Digitized by Google

sotto di un qualche vincolo radicale contengono necessariamente una qualche variabile, come appunto sono le $a\sqrt[3]{x}$, $a\sqrt[4]{x z^2} + b\sqrt{y}$.

Tutte queste funzioni, la forma delle quali già si conosce, diconsi *esplicite,* dandosi il nome di *implicite* a quelle, la forma e il valor delle quali non ancor conosciuti dipendono dalla soluzione di una equazione.

Data per es. la $y^2 = a^2 - x^2$, venendone $y = \pm\sqrt{a^2 - x^2}$, la y uguaglierà una funzione della x; ma se si consideri la equazione $y^2 = a^2 - x^2$ senza scioglierla, non sapendosi per anche qual valore e forma abbia la funzione della x corrispondente ad y, diremo in tale stato essere la nostra y una funzione implicita della x; le daremo poscia il nome di funzione esplicita, allorchè sciolta l'equazione ritroveremo essere $y = \pm\sqrt{a^2 - x^2}$.

6. Le funzioni finalmente dividonsi in *uniformi* e *multiformi.*

Uniformi son quelle, che ad ogni valore delle variabili contenute, mai non acquistano che un solo valore; nelle equazioni $y = ax$, $y = ax - \frac{b^2}{z}$ la y non è che una funzione uniforme, nel primo caso della x, nel secondo della x e della z.

Che se ad ogni valore delle variabili, la funzione acquista più di un valore, essa in allora si dice *multiforme;* poichè nella $y^2 = a^2 - x^2$, e però nella $y = \pm\sqrt{a^2 - x^2}$ ad ogni valore della x, la y acquista due valori, essa ne sarà una funzione multiforme, e più propriamente ne sarà una funzione *biforme;* poichè le funzioni multiformi distinguonsi in *biformi, triformi, quadriformi,* etc. secondochè ad ogni valore delle variabili contenute, la funzione acquista due, tre, quattro, etc. valori diversi.

7. Fin'ora abbiamo considerate le funzioni delle variabili, e le loro differenze; ma se una data espressione analitica sia composta di sole quantità costanti, senza alcuna variabile, come la $3a^2 + 4bc$, anche ad essa daremo il nome di *funzione,* ma di *funzione costante,* e denotandola nella maniera istessa de' n^{i} 2, 3 ne formeremo le stesse distinzioni degli altri (n^{i} 4, 5, 6), onde la precedente $3a^2 + 4bc$ sarà $= f(a)(b, c)$.

---

8. Supponiamo una funzione qualunque tra le quantità r, s, t, u, ... z, che chiameremo Y, onde sia

$$(A) \qquad Y = f(r)(s)(t)(u) \ldots (z).$$

Poichè in essa, generalmente parlando, altri termini contengono la r, ed altri ne sono privi, indichiamo la unione di tutti i primi con la espressione $r|Y$, e con l'altra $Y^{\frac{r}{}}$ supponiamo di rappresentare l'unione di tutti i secondi; in egual modo $s|Y$ ci esprima la somma dei termini tutti della Y che contengono la s, ed $Y^{\frac{s}{}}$ ci rappresenti tutti gli altri che ne son privi; la espressione $rt|Y$ c'indichi l'aggregato di tutti i termini che insieme contengono e la r e la t; l'altra $r|Y^{\frac{s}{}}$ ci rappresenti tutti i termini che, contenendo la r, sono privi della s, e così rapporto alle altre variabili.

Se sia per es.

$$Y = r^3x^2 - 4r^2st + rstu - 2s^2tx + 4ux^2$$

Digitized by Google

ne verrà

$$\begin{aligned} r|Y &= r^3x^2 - 4r^2st + rstu, \\ Y^{\overline{r}} &= -2s^2tx + 4ux^2, \\ rt|Y &= -4r^2st + rstu, \\ r|Y^{\overline{s}} &= r^3x^2, \\ st|Y^{\overline{u}} &= -4r^2st - 2s^2tx, \\ x|Y^{\overline{tu}} &= r^3x^2, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{aligned}$$

9. Supposta questa maniera di scrivere, giacchè sommando insieme tutti i termini della Y che sono mancanti della r con quei tutti che la contengono ne risulta la Y medesima, è chiaro che avremo

(I) $$Y = Y^{\overline{r}} + r|Y.$$

Ora fra i termini che contengono la r espressi da $r|Y$, altri contengono la s, ed altri ne sono privi; unendo dunque questi a quelli, poichè risulta

$$r|Y = r|Y^{\overline{s}} + rs|Y,$$

otterremo, con la sostituzione,

(II) $$Y = Y^{\overline{r}} + r|Y^{\overline{s}} + rs|Y.$$

Di nuovo fra i termini di $rs|Y$ altri mancano della t, ed altri no, onde si ha

$$rs|Y = rs|Y^{\overline{t}} + rst|Y;$$

dunque sostituendo ricaveremo

(III) $$Y = Y^{\overline{r}} + r|Y^{\overline{s}} + rs|Y^{\overline{t}} + rst|Y.$$

In egual modo troveremo essere

(IV) $$Y = Y^{\overline{r}} + r|Y^{\overline{s}} + rs|Y^{\overline{t}} + rst|Y^{\overline{u}} + rstu|Y;$$

e proseguendo così ad operare fino all'ultima quantità z, ci risulterà

(*B*) $$Y = Y^{\overline{r}} + r|Y^{\overline{s}} + rs|Y^{\overline{t}} + rst|Y^{\overline{u}} + rstu|Y^{\overline{x}} + \cdots + rstux \ldots z|Y.$$

10. Se la supposta funzione Y sia tale che in tutti i suoi termini contenga la r, come se sia

$$Y = rs^2 - r^2st + rs^2x - r^3,$$

in allora, non esistendo la quantità $Y^{\overline{r}}$, la precedente formola (I) diverrà $Y = r|Y$. Che se tutti i termini della Y oltre la r contengono insieme anche la s, come se abbiasi

$$Y = r^2s^3 + r^4s^3x - rs^2t,$$

svanendo in allora le quantità $Y^{\overline{r}}$, $r|Y^{\overline{s}}$ la formola (II) diventerà $Y = rs|Y$. Egualmente, se nella Y non v'abbia alcun termine privo di una qualunque delle tre quantità r, s, t, troveremo che la formola (III) diviene

$$Y = rst|Y,$$

Digitized by Google

e così di seguito; onde la (B) si cangierà nella

$$Y = rstux \ldots z|Y,$$

se non abbiavi in Y alcun termine, che insieme non contenga tutte le quantità r, s, t, u, x, $\ldots$ z.

11. Se una qualunque quantità Z divenga zero, mentre si faccia zero una variabile qualunque r, dovrà essa Z necessariamente contenere, ed essere per conseguenza funzione, della variabile r; altrimenti se la Z fosse indipendente da r, come potrebbe svanire facendosi $r = 0$? Che se oltre quella di r, anche nella varia supposizione di s, t, u, $\cdots = 0$, la Z diventi zero, dovrà per la stessa ragione Z contenere le variabili s, t, u, $\ldots$ e sarà quindi

$$Z = f(r)(s)(t)(u) \ldots$$

12. *Abbiasi una quantità Y intiera razionale, e tale che divenga zero facendosi uguale allo zero una qualunque delle variabili r, s, t, u, $\ldots$ z; in tale supposizione, io dico che dovrà essere $Y = rstu \ldots z|Y$.*

Pel n° prec. abbiamo

$$Y = f(r)(s)(t)(u) \ldots (z),$$

e perciò

$$Y = Y^{r} + r|Y^{s} + rs|Y^{t} + rst|Y^{u} + rstu|Y^{x} + \cdots + rstux \ldots z|Y$$

(n° 9); ma per essere Y quantità intiera, è chiaro essere questa una funzione, in cui i termini $r|Y^{s}$, $rs|Y^{t}$, etc. devono contenere la r in forma di moltiplicazione; i termini $rs|Y^{t}$, $rst|Y^{u}$, etc. devono tutti venire moltiplicati per s, e così in progresso; dunque, se in

$$Y = Y^{r} + r|Y^{s} + rs|Y^{t} + \cdots$$

si farà $r = 0$, svanendo tutti i termini

$$r|Y^{s},\ rs|Y^{t},\ \text{etc.},$$

otterremo $Y = Y^{r}$; ma per la ipotesi di $r = 0$ deve seguirne $Y = 0$, e frattanto per tale supposizione la quantità Y^{r} non può giammai diventare zero, poichè non contiene la r di sorta alcuna; dunque, acciocchè in realtà, facendosi $r = 0$, risulti $Y = 0$, dovrà la porzione Y^{r} mancare affatto dalla proposta formola, ed avremo perciò

$$Y = r|Y^{s} + rs|Y^{t} + rst|Y^{u} + \cdots$$

Supponiamo presentemente $s = 0$, ne verrà

$$Y = r|Y^{s};$$

ma per tale ipotesi non può essere $r|Y^{s} = 0$; e deve intanto risultare $Y = 0$; dunque, acciocchè questo succeda, dovrà il termine $r|Y^{s}$ mancare anch'esso dalla nostra formola, e perciò avremo

$$rs|Y^{t} + rst|Y^{u} + \cdots$$

Digitized by Google

pel valore di Y. Proseguendo nell'istesso modo il discorso fino all'ultima quantità z, troveremo in egual maniera dovere nella nostra supposizione mancare dalla Y i termini tutti

$$rsY|^{\frac{t}{-}}, \quad rst|Y^{\frac{u}{-}}, \quad \text{etc.},$$

e quindi resterà

$$Y = rstu \ldots z|Y. \qquad \text{C. D. D.}$$

13. Dovrà dunque la nostra Y contenere solamente dei termini, i quali siano moltiplicati pel prodotto di tutte le sopradette variabili r, s, t, u, $\ldots$ z, onde avremo

$$Y = rstu \ldots zS,$$

rappresentando S l'aggregato di tutti i termini sovraccennati.

14. Siano ora le variabili r, s, t, u, $\ldots$ z di numero n, ed m rappresenti la massima lor dimensione in Y. Vedesi, ciò posto, che non potrà nella nostra ipotesi essere giammai $m < n$. Che se abbiasi $m = n$, in allora la S non potrà contenere alcuna delle variabili r, s, t, u, $\ldots$ z; e se sia $m > n$, cosicchè $m = n + p$, dovrà essere S funzione di alcune o di tutte queste variabili, esprimendo p la loro massima dimensione.

15. *Supponiamo che la*

$$Y = rstu \ldots zS,$$

non possa diventare zero, se non quando facciasi zero una qualunque delle n variabili r, s, t, u, $\ldots$, z. *In tale caso, io dico che la* S, *o sarà una costante, e ciò se* $n = m$ (n° prec.), *o sarà uguale ad un solo termine formato dal prodotto di tutte, o di alcune, delle supposte n variabili, una, o più volte replicate di un numero p di dimensioni; e ciò mentre sia* $m > n$ (n° prec.).

Difatti, se la cosa fosse altrimenti, come se fosse per es.

$$S = rs^2tu - rs^2tz,$$

ossia

$$S = rs^2t(u - z),$$

in allora, diventando $S = 0$ per una qualche altra supposizione diversa da quella di r, oppure di s, oppure di t, oppure etc., o finalmente di $z = 0$, come nel nostro caso se facciasi $u = z$, per tale supposizione verrebbe a diventare zero anche la Y; ma questo è contro l'ipotesi. Dunque, etc. [1].

16. Supposto adunque nel nostro caso, in generale,

$$S = Mr^f s^g t^h u^i \ldots z^l,$$

essendo tali esponenti numeri tutti intieri e positivi, essendo la loro somma

$$f + g + h + i \ldots + l = p,$$

ed essendo M una costante, avremo

$$Y = rstu \ldots zS = Mr^{f+1} s^{g+1} t^{h+1} \ldots z^{l+1};$$

e fatto per maggior semplicità

$$f + 1 = a, \quad g + 1 = b, \quad h + 1 = d, \ldots,$$

avremo

$$Y = Mr^a s^b t^c u^d \ldots z^e,$$

ove

$$a + b + c + d + \cdots = m.$$

Digitized by Google

CAPO II.

PROPRIETÀ GENERALI DELLE EQUAZIONI.

17. Sappiamo già dall'Algebra cosa intender si debba col nome di equazione algebraica determinata, e quali siano quelle quantità che diconsi sue radici.

Venga ora proposta con l'incognita x una simile equazione, e sia questa per esempio la

$$\frac{a\,x^4}{m} - \frac{b\,x^3}{n} - c\,x + \frac{d\,x^2}{p} + f = \frac{g\,x^4}{p} - \frac{e\,x^3}{m\,n} + g\,x + \frac{h}{n\,p}\,.$$

Tolte in essa le frazioni, trasporto tutti i suoi termini nel primo membro, e venendone

$$(anp - gmn)x^4 + (ep - bmp)x^3 + dmnx^2 - (cmnp + gmnp)x + (fmnp - hm) = 0,$$

$$\begin{aligned} (a\,n\,p - g\,m\,n) &= F,\\ (e\,p - b\,m\,p) &= G,\\ d\,m\,n &= H,\\ -(c\,m\,n\,p + g\,m\,n\,p) &= I,\\ (f\,m\,n\,p - h\,m) &= K, \end{aligned}$$

avremo da ciò l'equazione

$$F\,x^4 + G\,x^3 + H\,x^2 + I\,x + K = 0,$$

la quale altro non è che la proposta avente tutti i suoi termini intieri, ordinati, e collocati nel primo membro. Ora ciò che si è detto della precedente equazione di quarto grado, dicesi egualmente di una qualsivoglia equazione algebraica di un grado m, rappresentando m un numero intiero e positivo qualunque. Dunque una tale equazione potrà sempre ridursi nel modo istesso alla forma

$$(C) \qquad F\,x^m + G\,x^{m-1} + H\,x^{m-2} + I\,x^{m-3} + \cdots + Z = 0,$$

ove i coefficienti F, G, H, ... sono tutti numeri intieri. Dividiamo presentemente questa per F, e avutone il risultato

$$x^m + \frac{G}{F}x^{m-1} + \frac{H}{F}x^{m-2} + \frac{I}{F}x^{m-3} + \cdots + \frac{Z}{F} = 0,$$

supponiamo

$$\frac{G}{F} = A, \quad \frac{H}{F} = B, \quad \frac{I}{F} = C, \ \ldots, \ \frac{Z}{F} = V;$$

Digitized by Google

sostituisco, e ne verrà l'equazione

$$(D)\quad x^m+Ax^{m-1}+Bx^{m-2}+Cx^{m-3}+\cdots+Lx^{m-(k-1)}+Mx^{m-k}+\cdots+Rx^3+Sx^2+Tx+V=0,$$

chiamati V, Tx, Sx^2, ... gli ultimi suoi termini, ed espresso per Mx^{m-k} un qualunque termine di essa, e per $Lx^{m-(k-1)}$ quello che a questo precede. Essa non sarà altro che la (C) medesima; ma sì l'una che l'altra di queste equazioni deriva da una qualsivoglia equazione algebraica determinata di un grado qualunque; dunque sì all'una che all'altra potrà darsi il nome di *equazione algebraica determinata generale;* e da entrambe egualmente, attribuendo all'esponente m ed ai coefficienti gli opportuni valori, potremo ricavare le diverse particolari equazioni algebraiche determinate, avvertendo che i coefficienti della prima si possono bensì supporre sempre tanti numeri intieri, ma non già così quelli della seconda.

18. Poichè possono esistere diverse radici di una equazione data, ossia diverse quantità reali, od immaginarie, le quali poste in essa in luogo della x la facciano verificare, supponiamo di rappresentare con le lettere α, β, γ, δ, η, ..., ω le radici tutte della (C); cosicchè fuori di esse non abbiavi alcun'altra quantità capace di rendere zero, con la sostituzione, il primo membro di questa equazione. Ciò presupposto, prendiamo il primo membro della (C), senza farlo uguale allo zero, e chiamatolo Y, consideriamo in essa la x, come variabile. Avremo così la funzione

$$Y = Fx^m + Gx^{m-1} + Hx^{m-2} + Ix^{m-3} + \cdots + Z,$$

ove, attribuendo diversi valori alla x, è chiaro che ne verranno diversi risultati; e quando giungiamo a fare

$$x = \alpha,\quad x = \beta,\quad x = \gamma, \ldots,$$

la Y diverrà sempre, e solamente in tali casi, $= 0$.

19. Sia per es.

$$m = 3,\quad F = 5,\quad G = -15,\quad H = -50,\quad I = 120,$$

onde la (C) riducasi alla

$$5x^3 - 15x^2 - 50x + 120 = 0,$$

equazione di cui tutte le radici sono i numeri 2, 4, -3. Supponiamo, come precedentemente, $Y = 5x^3 - 15x^2 - 50x + 120$.

Facendo quivi $x = 1$, otterremo

$$Y = 5 - 15 - 50 + 120 = 60;$$

facendo $x = 3$, otterremo

$$Y = 5.27 - 15.9 - 50.3 + 120 = -30;$$

e così di seguito, ma mentre supponiamo $x = 2$, oppure $x = 4$, oppure $x = -3$, sempre ci risulta $Y = 0$: e ci risulta tale soltanto in questi casi.

20. Ritenute le precedenti supposizioni, e sottratta dalla variabile x ciascuna delle radici α, β, γ, δ, ..., ω, onde avere i binomj

$$x - \alpha,\quad x - \beta,\quad x - \gamma,\quad x - \delta, \ldots, x - \omega,$$

Digitized by Google

io dico che, *qualunque siasi la x avremo la funzione Y eguale ad un prodotto della forma*

$$F(x-\alpha)^a(x-\beta)^b(x-\gamma)^c(x-\delta)^d \ldots (x-\omega)^\epsilon,$$

essendo F il coefficiente del primo termine in Y, ed essendo a, b, c, d, ..., e tutti numeri intieri e positivi, de' quali la somma è = m.

Suppongo

$$x-\alpha = r, \quad x-\beta = s, \quad x-\gamma = t, \ \ldots, \ x-\omega = \zeta,$$

e ciò fatto, poichè la Y diventa sempre zero, allorchè facciasi $x = \alpha$, ovvero $x = \beta$, oppure $x = \gamma$, etc., e però mentre si supponga

$$x-\alpha = 0, \quad \text{od} \quad x-\beta = 0, \quad \text{od} \quad x-\gamma = 0, \ \ldots,$$

ossia

$$r = 0, \quad \text{od} \quad s = 0, \quad \text{oppure} \quad t = 0, \ \ldots,$$

ne viene dal n° 11 che dovrà la nostra Y essere $= f(r)(s)(t) \ldots (\zeta)$.

Ma questa per l'ipotesi essendo una funzione intiera e razionale della x (n^i 17, 18), viene appunto ad essere una funzione delle r, s, t, ..., come quelle dei n^i 12, 15; dunque per quanto si è colà dimostrato, dovrà essere

$$Y = Mr^a s^b t^c \ldots \zeta^\epsilon$$

(n° 16), esprimendo con le lettere $a, b, c, \ldots, e$ tanti numeri intieri e positivi; e però avremo

$$Y = M(x-\alpha)^a(x-\beta)^b(x-\gamma)^c \ldots (x-\omega)^\epsilon.$$

Ora in Y il numero m è il massimo esponente della x, e frattanto è chiaro che, essendo

$$r = x-\alpha, \quad s = x-\beta, \quad t = x-\gamma, \ \ldots,$$

la massima dimensione delle r, s, t, ... non può che essere la massima dimensione della x. Dunque pel n° 16 sarà

$$a+b+c+\cdots = m.$$

Finalmente supponiamo $x = \frac{1}{u}$; sostituendo nella

$$Y = Fx^m + Gx^{m-1} + Hx^{m-2} + Ix^{m-3} + \cdots = M(x-\alpha)^a(x-\beta)^b(x-\gamma)^c \ldots (x-\omega)^\epsilon,$$

otterremo

$$\frac{F}{u^m} + \frac{G}{u^{m-1}} + \frac{H}{u^{m-2}} + \frac{I}{u^{m-3}} + \cdots = M\left(\frac{1}{u}-\alpha\right)^a\left(\frac{1}{u}-\beta\right)^b\left(\frac{1}{u}-\gamma\right)^c \ldots \left(\frac{1}{u}-\omega\right)^\epsilon.$$

Ma a cagione di $m = a+b+c+\cdots+e$ abbiamo

$$u^m = u^{a+b+c+d+\cdots+\epsilon} = u^a u^b u^c u^d \ldots u^\epsilon.$$

Dunque, moltiplicando il primo membro dell'equazione ottenuta per u^m, ed il secondo per $u^a u^b u^c \ldots u^\epsilon$, fattore per fattore, otterremo

$$F + Gu + Hu^2 + Iu^3 + \cdots = M(1-\alpha u)^a(1-\beta u)^b \ldots.$$

Ora la precedente equazione

$$Fx^m + Gx^{m-1} + \cdots = M(x-\alpha)^a(x-\beta)^b \ldots (x-\omega)^\epsilon$$

Digitized by Google

si verifica sempre qualunque siasi la x, dunque anche quest'ultima dovrà sempre verificarsi qualunque siasi la u, e però ancora quando facciasi la $u = 0$.

Eseguendo pertanto quest'ultima supposizione, avremo $F = M \times 1 \times 1 \times 1 \times 1 \ldots \times 1$, e quindi $M = F$.

Sostituisco adunque questo valore in luogo della M, e risultandone

$$Y = F(x-\alpha)^a(x-\beta)^b(x-\gamma)^c \ldots (x-\omega)^e,$$

ne segue, che, etc.

21. Pel n° prec. avendosi

$$Fx^m + Gx^{m-1} + Hx^{m-2} + \cdots = F(x-\alpha)^a(x-\beta)^b(x-\gamma)^c \ldots (x-\omega)^e,$$

se dividerò per F ne verrà

$$x^m + \frac{G}{F}x^{m-1} + \frac{H}{F}x^{m-2} + \cdots = (x-\alpha)^a(x-\beta)^b(x-\gamma)^c \ldots (x-\omega)^e,$$

e riponendo in luogo dei coefficienti $\frac{G}{F}$, $\frac{H}{F}$, ... le lettere A, B, ... (n° 17), otterremo

$$x^m + Ax^{m-1} + Bx^{m-2} + Cx^{m-3} + \cdots = (x-\alpha)^a(x-\beta)^b(x-\gamma)^c \ldots (x-\omega)^e.$$

Ora le funzioni

$$Fx^m + Gx^{m-1} + Hx^{m-2} + \cdots, \quad x^m + Ax^{m-1} + Bx^{m-2} + \cdots$$

altro non sono che i primi membri delle equazioni (C), (D). Dunque il primo di essi essendo

$$= F(x-\alpha)^a(x-\beta)^b(x-\gamma)^c \ldots (x-\omega)^e,$$

ed il secondo

$$= (x-\alpha)^a(x-\beta)^b(x-\gamma)^c \ldots (x-\omega)^e,$$

qualunque siasi la x, ne viene che le equazioni algebraiche saranno sempre dotate delle seguenti proprietà:

1° Se α *esprime una delle radici di una qualsivoglia equazione algebraica* (C), (D), *il suo primo membro sarà sempre divisibile pel binomio* $x - \alpha$, *e ciò qualunque valore si attribuisca alla* x.

2° *Chiamandosi* α, β, γ, ..., ω *le radici tutte della* (C), (D), *il primo suo membro non solo sarà divisibile per ciascuno dei binomj*

$$x-\alpha, \quad x-\beta, \quad x-\gamma, \ldots,$$

ma anche pel loro prodotto.

3° *Tante saranno le radici della* (C), (D), *quanti sono i fattori semplici*

$$x-\alpha, \quad x-\beta, \quad x-\gamma, \ldots, x-\omega,$$

che entrano nella formazione della quantità

$$Fx^m + Gx^{m-1} + Hx^{m-2} + \cdots,$$
$$x^m + Ax^{m-1} + Bx^{m-2} + \cdots.$$

Che se abbiasi $a = 1$, $b = 1$, $c = 1$, ..., $e = 1$, *il numero delle radici verrà allora espresso dal massimo esponente* m *dell'equazione proposta.*

Digitized by Google

4° *Nel primo membro*

$$x^m + Ax^{m-1} + Bx^{m-2} + \cdots = (x-\alpha)^a(x-\beta)^b(x-\gamma)^c \ldots (x-\omega)^e,$$

come pure nell'altro della (*C*), *toltane la F, il numero dei fattori uguali o disuguali fra loro è sempre m; poichè* $m = a + b + c + d \cdots + e$ (n° prec.). *Considerando dunque, che tante siano le radici, o uguali fra loro, o disuguali della data equazione, quanti sono i fattori, che la formano, potremo dire in generale, che il suo massimo esponente m ci esprime sempre il numero delle sue radici.*

22. Secondo questa considerazione possiamo stabilire adunque, che in una data equazione esistono sempre delle radici uguali, ogni qualvolta alcuno o tutti gli esponenti a, b, c, d, ..., e sono maggiori dell'unità; e che esse appariscono tutte disuguali, se ciascuna delle quantità a, b, c, d, ... sia $= 1$.

In questo secondo caso però, in cui risulta

$$x^m + Ax^{m-1} + Bx^{m-2} + Cx^{m-3} + \cdots = (x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma) \ldots (x-\omega),$$

conviene riflettere che tutte le radici appariscono bensì fra loro disuguali, e tali sono difatti, se tutte le lettere α, β, γ, ..., ω ci esprimono valori diversi; ma se abbiasi il valore di $\alpha =$ a quello di β, il valore di $\alpha =$ a quello di β ed a quello di γ, ..., allora anche in quest'ultima supposizione esisteranno nella equazione delle radici uguali. Dunque, tanto nel caso in cui gli esponenti a, b, c, ..., pongonsi secondo l'opportunità maggiori od uguali ad 1, quanto nell'altro, nel quale supponesi costantemente $a = 1$, $b = 1$, $c = 1$, ..., potranno le radici nella data equazione essere uguali o disuguali fra loro; e quindi saranno sì l'un caso che l'altro generali egualmente. Ora la supposizione di $a = 1$, $b = 1$, $c = 1$, ..., riesce molto più comoda alle nostre considerazioni ulteriori; per tale ragione adunque sicuri della dovuta generalità, riterremo in avvenire piuttosto quest'ultima supposizione, e diremo perciò essere il primo membro della data equazione generale

$$(E) \quad x^m + Ax^{m-1} + Bx^{m-2} + Cx^{m-3} + \cdots = (x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)(x-\delta)\ldots(x-\omega).$$

23. Dividasi per $x - \alpha$ il primo membro della (*D*); poichè la divisione deve riuscire esatta (n° 21, 1°), è chiaro che il quoto risulterà della forma

$$x^{m-1} + A'x^{m-2} + B'x^{m-3} + C'x^{m-4} + \cdots + N'x^{m-k} + P'x^{m-(k+1)} + \cdots + R'x^2 + S'x + T',$$

chiamati A', B', C', ... i suoi coefficienti, e pel n° prec. avremo questo uguale ad

$$(x-\beta)(x-\gamma)(x-\delta) \ldots (x-\omega).$$

Moltiplico ora da una parte e dall'altra per x, e veggo che ci risulta

$$x^m + A'x^{m-1} + B'x^{m-2} + \cdots + N'x^{m-(k-1)} + P'x^{m-k} + \cdots$$
$$\cdots + R'x^3 + S'x^2 + T'x = x(x-\beta)(x-\gamma)(x-\delta) \ldots (x-\omega).$$

Ma il prodotto

$$x(x-\beta)(x-\gamma)(x-\delta) \ldots (x-\omega)$$

altro non è che l'altro

$$(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)(x-\delta) \ldots (x-\omega),$$

Digitized by Google

toltane la quantità α [2]; dunque anche la funzione

$$x^m + A'x^{m-1} + B'x^{m-2} + \cdots + N'x^{m-(k-1)} + P'x^{m-k} + \cdots + R'x^3 + S'x^2 + T'x$$

altro non sarà che la

$$x^m + Ax^{m-1} + Bx^{m-2} + \cdots,$$

levatine i termini che contengono la α, e per conseguenza è chiaro, dal n° 8, che avremo $A' = A^{\alpha}$, $B' = B^{\alpha}$, $C' = C^{\alpha}$, ..., $N' = N^{\alpha}$, $P' = P^{\alpha}$, ..., $R' = R^{\alpha}$, $S' = S^{\alpha}$, ...

Nella medesima maniera, diviso il primo membro della (D) per $x - \beta$, e supposto

$$x^{m-1} + A''x^{m-2} + B''x^{m-3} + \cdots + N''x^{m-k} + P''x^{m-(k+1)} + \cdots + R''x^2 + S''x + T''$$

il quoto, dovrà essere

$$A''=A^{\beta},\ B''=B^{\beta},\ C''=C^{\beta},\ \ldots,\ N''=N^{\beta},\ P''=P^{\beta},\ \ldots,\ R''=R^{\beta},\ S''=S^{\beta},\ \ldots.$$

In egual modo, esprimendo per A''', B''', C''', ... i coefficienti del quoto che risulta dalla divisione per $x - \gamma$, avremo

$$A''' = A^{\gamma},\quad B''' = B^{\gamma},\quad C''' = C^{\gamma},\ \ldots,$$

e così di seguito.

Se ciascuno di questi quoti si uguagli allo zero, avremo così tante equazioni del grado $m - 1$, ciascuna delle quali avrà per radici un numero $m - 1$ delle m quantità α, β, γ, δ, ..., ω.

24. *L'ultimo termine V della (D) uguaglia sempre il prodotto $\pm \alpha\beta\gamma\delta \ldots \omega$, prendendosi il segno $+$, se il grado dell'equazione è pari, ed il segno $-$, se esso è dispari.*

Dovendosi l'equazione (E), pei n[i] 20, 22, verificare qualunque siasi la x, sarà anche vera allorquando si faccia $x = 0$; eseguisco pertanto una tale supposizione, e quindi otterremo

$$V = (-\alpha) \times (-\beta) \times (-\gamma) \times (-\delta) \ldots \times (-\omega),$$

cioè uguale al prodotto delle quantità

$$-\alpha,\quad -\beta,\quad -\gamma,\quad -\delta,\ \ldots,\ -\omega.$$

Ora, se il numero dei fattori

$$x - \alpha,\quad x - \beta,\quad x - \gamma,\ \ldots,$$

e però il grado m dell'equazione (D), è pari, simile prodotto viene affetto di segno $+$, e se quello è dispari, viene questo affetto di segno $-$. Dunque, seguendo l'enunciata regola, avremo

$$V = \pm \alpha\beta\gamma\delta \ldots \omega.$$

25. *Il coefficiente T del penultimo termine Tx nella (D) è sempre uguale alla somma dei prodotti ad $m - 1$ ad $m - 1$ delle m radici α, β, γ, ..., presa col segno $+$, se $m - 1$ è pari, e col segno $-$, se $m - 1$ è dispari.*

Digitized by Google

Applicando ai quoti del n° 23 quanto si è detto nel n° 24 abbiamo

$$\begin{aligned} T' &= \pm\,\beta\gamma\delta\eta\ldots\omega \\ T'' &= \pm\,\alpha\gamma\delta\eta\ldots\omega \\ T''' &= \pm\,\alpha\beta\delta\eta\ldots\omega \\ T^{\text{IV}} &= \pm\,\alpha\beta\gamma\eta\ldots\omega \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots, \end{aligned}$$

risultati, ne' quali, entrando un numero $m-1$ delle α, β, γ, ..., dovrà apporsi il segno superiore, se $m-1$ è pari, l'inferiore, se $m-1$ è dispari. Ora dal n° 10 vedesi, che abbiamo

$$T'' = \alpha|T'', \quad T''' = \alpha\beta|T''', \quad T^{\text{IV}} = \alpha\beta\gamma|T^{\text{IV}}\ldots,$$

onde, a cagione di

$$T' = T^{\overline{\alpha}}, \quad T'' = T^{\overline{\beta}}, \quad T''' = T^{\overline{\gamma}}, \quad T^{\text{IV}} = T^{\overline{\delta}}, \ldots$$

(n° 23) ci risulta

$$T'' = \alpha|T^{\overline{\beta}}, \quad T''' = \alpha\beta|T^{\overline{\gamma}}, \quad T^{\text{IV}} = \alpha\beta\gamma|T^{\overline{\delta}}, \ldots.$$

Dunque, pel n° 9 essendo

$$T = T^{\overline{\alpha}} + \alpha|T^{\overline{\beta}} + \alpha\beta|T^{\overline{\gamma}} + \alpha\beta\gamma|T^{\overline{\delta}} + \cdots,$$

con la sostituzione otterremo

$$T = T' + T'' + T''' + T^{\text{IV}} + \cdots,$$

e quindi

$$T = \pm(\beta\gamma\delta\eta\cdots\omega + \alpha\gamma\delta\eta\cdots\omega + \alpha\beta\delta\eta\cdots\omega + \alpha\beta\gamma\eta\cdots\omega + \alpha\beta\gamma\delta\cdots\omega + \alpha\beta\gamma\delta\eta\cdots + \cdots).$$

Dunque, etc.

26. Supponiamo di voler formare *la somma di tutti i prodotti a tre a tre delle cinque radici* α, β, γ, δ, ω.

Chiamata C una simile somma, pel n° 9 abbiamo

$$C = C^{\overline{\alpha}} + \alpha|C^{\overline{\beta}} + \alpha\beta|C^{\overline{\gamma}} + \alpha\beta\gamma|C^{\overline{\delta}} + \cdots;$$

ma le radici α, β, γ, δ, ω non si possono contenere nei termini $C^{\overline{\alpha}}$, $\alpha|C^{\overline{\beta}}$, ..., che a tre a tre, ed in modo di moltiplicazione; dunque la nostra formola non potrà estendersi che al termine $\alpha\beta\gamma|C$, essendo quest'ultimo $= \alpha\beta\gamma$. Poichè dunque abbiamo

$$C = C^{\overline{\alpha}} + \alpha|C^{\overline{\beta}} + \alpha\beta|C^{\overline{\gamma}} + \alpha\beta\gamma,$$

è chiaro che otterremo la somma domandata, formando da prima tutti i prodotti a tre a tre, ossia tutti i terni fra le radici β, γ, δ, ω espressi dal termine $C^{\overline{\alpha}}$, tenendo conto in seguito di tutti quei prodotti, che, significati essendo dal termine $\alpha|C^{\overline{\beta}}$, contengono la α e mancano della β, poscia formando, come si vede dal termine $\alpha\beta|C^{\overline{\gamma}}$, tutte le combinazioni a tre a tre, che privi della γ contengono ed α, e β, e finalmente formando nel termine $\alpha\beta\gamma$ il solo terno, che contiene unite ed α, e β, e γ. Così ope-

Digitized by Google

rando adunque avremo la richiesta somma

$$C = \gamma\delta\omega + \beta\delta\omega + \beta\gamma\omega + \beta\gamma\delta + \alpha\delta\omega + \alpha\gamma\omega + \alpha\gamma\delta + \alpha\beta\omega + \alpha\beta\delta + \alpha\beta\gamma.$$

27. Ciò che si è detto delle combinazioni a tre a tre fra cinque radici, dicendosi egualmente di altri prodotti qualsivogliano a k a k di un qualunque numero m di radici, se vorremo la somma di questi prodotti, chiamata essa M, poichè abbiamo dalla (B)

$$M = M^{\alpha} + \alpha|M^{\beta} + \alpha\beta|M^{\gamma} + \alpha\beta\gamma|M^{\delta} + \cdots,$$

vedesi che l'otterremo col formare in principio l'aggregato M^{α} di tutti i prodotti a k a k fra tutte le radici date, esclusane la α; coll'unir questo poscia alla somma $\alpha|M^{\beta}$ di simili combinazioni che, contenendo la α, sono mancanti di β; unendo in terzo luogo alle precedenti M^{α}, $\alpha|M^{\beta}$ la somma $\alpha\beta|M^{\gamma}$ di tali prodotti, che privi della γ contengono, ed α, e β; e così proseguendo secondo le regole accennate nel n° prec.

28. Se viceversa troveremo essere

$$C = C^{\alpha} + \alpha|C^{\beta} + \cdots,$$

od una quantità qualunque

$$M = M^{\alpha} + \alpha|M^{\beta} + \alpha\beta|M^{\gamma} + \cdots,$$

e se sapremo d'altronde

C^{α} uguagliare la somma di tutti i terni fra le β, γ, δ, ω;

M^{α} uguagliare l'aggregato dei prodotti a k a k fra le m radici della data, esclusane la α;

C^{β} uguagliare tutti i terni fra le α, γ, δ, ω;

M^{β} essere uguale all'aggregato di tutti i prodotti a k a k fra le m radici senza la β;

C^{γ}, M^{γ} uguagliare, il primo tutti i terni fra le α, β, δ, ω, il secondo tutte le combinazioni a k a k fra le m radici senza la γ, e così in progresso;

io dico, che *in allora C sarà uguale alla somma dei terni tutti fra le cinque quantità* α, β, γ, δ, ω, *che M uguaglierà la somma di tutti i prodotti a k a k di tutte le m radici proposte.*

In questa supposizione, la somma delle quantità C^{α}, $\alpha|C^{\beta}$, $\alpha\beta|C^{\gamma}$, ..., ci viene a dare la somma di tutti i terni fra le β, γ, δ, ω, più la somma di quei terni, che mancano della β e contengono la α, più gli altri, che privi della γ contengono α, e β, e così di seguito. Ma questo è appunto ciò che si richiede per la formazione di tutti i terni delle cinque radici date (n° 26). Dunque la nostra C, che è uguale alla somma delle quantità C^{α}, $\alpha|C^{\beta}$, $\alpha\beta|C^{\gamma}$, ..., uguaglierà ancora l'aggregato di tutti i terni fra le α, β, γ, δ, ω.

Digitized by Google

Ora questo stesso dicesi in egual modo delle quantità M^{α}, $\alpha|M^{\beta}$, $\alpha\beta|M^{\gamma}$, ... rapporto alla M, ed ai prodotti a k a k delle m radici proposte. Dunque anche la M sarà uguale alla somma di tutti questi prodotti. C. D. D.

29. *Nella (D) il coefficiente S dell'antepenultimo termine* Sx^2 *uguaglia la somma di tutti i prodotti ad* $m-2$ *ad* $m-2$ *di tutte le m radici dell'equazione data; il coefficiente R del termine* Rx^3 *è uguale all'aggregato di tutti i prodotti ad* $m-3$ *ad* $m-3$ *delle radici medesime; il coefficiente Q del termine* Qx^4 *uguaglia la somma di tutti i loro prodotti ad* $m-4$ *ad* $m-4$, *e così di seguito: prendendosi ciascuna di queste somme positiva, se* $m-2$ *rapporto ad S,* $m-3$ *riguardo ad R,* $m-4$ *rapporto a Q, etc., sono pari, e prendendosi essa negativa, se tali numeri sono dispari.*

1° Nei quoti del n° 23 essendo le quantità S', S'', S''', S^{IV}, ... i coefficienti dei penultimi rispettivi termini $S'x$, $S''x$, $S'''x$, $S^{IV}x$, ..., ed essendo $m-1$ il grado di questi quoti considerati come equazioni, pel n° 25 avremo: $S' = \pm$ la somma di tutti i prodotti ad $m-2$ ad $m-2$ delle radici β, γ, δ, ...; $S'' = \pm$ l'aggregato di tutti i prodotti ad $m-2$ ad $m-2$ delle α, γ, δ, ...; $S''' = \pm$ la somma di tutte queste combinazioni fra le α, β, δ, ..., e così di seguito, prendendosi il segno superiore, quando $m-2$ è pari, e l'inferiore, quando $m-2$ è dispari. Ora abbiamo $S' = S^{\alpha}$, $S'' = S^{\beta}$, $S''' = S^{\gamma}$, $S^{IV} = S^{\delta}$, ... (n° 23). Dunque nel n° 28 posta in luogo di M la S, ed $m-2$ invece di k troveremo essere $S =$ alla somma di tutti i prodotti ad $m-2$ ad $m-2$ fra le radici α, β, γ, δ, ... affetta del segno $+$, mentre $m-2$ sia pari, e del segno $-$ in caso contrario.

2° Quanto si è ora dimostrato dell'antepenultimo coefficiente S nella (D), applicandosi egualmente al coefficiente dell'antepenultimo termine in ciascuno dei quoti del n° 23, ne viene, che sarà: $R' =$ all'aggregato dei prodotti tutti ad $m-3$ ad $m-3$ delle β, γ, δ, ...; $R'' =$ alla somma di tali combinazioni fra le α, γ, δ, ...; $R''' =$ all'aggregato di questi prodotti fra le α, β, δ, ..., e così in progresso, premettendosi a tali somme il segno $+$ od il segno $-$, secondo che $m-3$ è pari o dispari. Ma pel n° 23: $R' = R^{\alpha}$, $R'' = R^{\beta}$, $R''' = R^{\gamma}$, ... Dunque, facendo nel n° 28 $M = R$, $k = m-3$ ci risulterà $R = \pm$ la somma di tutti i prodotti ad $m-3$ ad $m-3$ di tutte le α, β, γ, δ, ..., prendendosi essa col segno superiore, se $m-3$ è pari, e con l'inferiore, se $m-3$ è dispari.

3° La proprietà dimostrata presentemente nel coefficiente dell'antepenultimo termine della (D) si verifica egualmente nei coefficienti Q', Q'', Q''', Q^{IV}, ... (n° 23), onde si hanno questi rispettivamente uguali ai prodotti ad $m-4$ ad $m-4$ fra le β, γ, δ, ..., fra le α, γ, δ, ..., fra le α, β, δ, ..., presi col segno positivo, o negativo, secondo che il numero $m-4$ è pari, o dispari. Dunque, replicati gli stessi precedenti discorsi, e supposto nel n° 28 $M = Q$, $k = m-4$, troveremo così essere con l'accennata regola dei segni $Q = \pm$ l'unione di tutti i prodotti ad $m-4$ ad $m-4$ fra le α, β, γ, δ, etc.

Digitized by Google

4° Lo stesso si dimostra nel coefficiente del termine Px^5, e così via via degli altri tutti, trovandosi per tal modo: $P = \pm$ l'aggregato dei prodotti tutti ad $m-5$ ad $m-5$; $N = \pm$ la somma delle combinazioni ad $m-6$ ad $m-6$ fra tutte le radici α, β, γ, δ, ..., e così di seguito, prendendosi in esse il segno $+$, o il segno $-$, secondo che abbiamo rispettivamente pari, o dispari, i numeri $m-5$, $m-6$, ... Dunque, etc.

30. Riduciamo la (D) alla forma

$$x^m + Ax^{m-1} + Bx^{m-2} + Cx^{m-3} + Dx^{m-4} + \cdots + Lx^{m-(k-1)} + Mx^{m-k} + \cdots$$
$$\cdots + Px^{m-(m-5)} + Qx^{m-(m-4)} + Rx^{m-(m-3)} + Sx^{m-(m-2)} + Tx^{m-(m-1)} + Vx^{m-m} = 0.$$

In questa si vede, che nell'ultimo termine Vx^{m-m}, ove nell'esponente della x da m togliesi m, abbiamo il coefficiente $V = \pm$ il prodotto di tutte le m radici α, β, γ, δ, ..., nel penultimo termine, in cui da m sottraesi $m-1$, il coefficiente che corrisponde, T, uguaglia $\pm$ la somma dei prodotti tutti ad $m-1$ ad $m-1$ delle medesime α, β, γ, δ, ...; laddove da m si toglie $m-2$, si ha il coefficiente $S = \pm$ i prodotti tutti ad $m-2$ ad $m-2$, ... Ora lo stesso si osserva in tutti gli altri termini. Dunque protremo dire in generale, che: *il coefficiente di un termine qualsivoglia è sempre uguale all'aggregato di tutti i prodotti delle radici α, β, γ, δ, ... combinate a tante fra loro, quanto nel rispettivo esponente della x è il numero che si sottrae dalla m; osservando poi, se questo numero che si sottrae è pari, o dispari, poichè nel primo caso all'esposto aggregato deve apporsi il segno $+$, nel secondo il segno $-$.*

31. Pertanto avremo il coefficiente del secondo termine

$$A = -(\alpha + \beta + \gamma + \delta + \cdots)$$

uguale alla somma delle radici tutte presa col segno contrario.

Avremo il coefficiente del terzo termine

$$B = +(\alpha\beta + \alpha\gamma + \alpha\delta + \beta\gamma + \beta\delta + \gamma\delta + \cdots)$$

uguale all'aggregato di tutti gli ambi fra le radici preso col segno naturale.

Sarà il coefficiente del quarto termine

$$C = -(\alpha\beta\gamma + \alpha\beta\delta + \alpha\gamma\delta + \beta\gamma\delta + \cdots)$$

uguale alla somma di tutti i terni fra le radici presa col segno contrario, e così dì seguito.

Abbiasi per esempio l'equazione $x^4 - 2x^3 - 23x^2 - 12x + 36 = 0$, di cui le radici sono 1, 6, -2, -3. Chiamati A, B, C, D i suoi coefficienti, pel dimostrato dovrà essere

$$A = -(1+6-2-3),$$
$$B = +[1\times6 + 1\times(-2) + 1\times(-3) + 6\times(-2) + 6\times(-3) - 2\times(-3)],$$
$$C = -[1\times6\times(-2) + 1\times6\times(-3) + 1\times(-2)\times(-3) + 6\times(-2)\times(-3)],$$
$$D = +[1\times6\times(-2)\times(-3)];$$

e difatti, eseguito il calcolo si ritrova $A = -2$, $B = -23$, $C = -12$, $D = +36$.

Digitized by Google

32. *Se l'equazione proposta manchi di un qualche termine*, come è la $x^3-19x+30=0$, ove manca il secondo termine, ciò indica, che *la somma, la quale corrisponde al coefficiente del termine mancante, è uguale allo zero;* imperciocchè possiamo sempre scrivere un tal termine nell'equazione senza turbarla, apponendovi lo zero per coefficiente. L'equazione precedente riducesi così alla $x^3 + 0x^2 - 19x + 30 = 0$, ed essendo 2, 3, — 5 le sue radici, abbiamo difatti la loro somma $2 + 3 - 5 = 0$.

33. Nel n° 23 si sono indicati con le lettere A', B', C', D', ... i coefficienti del quoto, che deve risultare dalla divisione del primo membro della (D) per $x - \alpha$; *cerchiamo presentemente di determinare, quale sia il valore di questi coefficienti, mentre in realtà si effettui una simile divisione.*

Avendosi pel n° 31

$$A = -(\alpha + \beta + \gamma + \delta + \cdots),$$

sarà

$$\alpha + A = -(\beta + \gamma + \delta + \cdots).$$

Ma pel numero istesso deve essere anche

$$A' = -(\beta + \gamma + \delta + \cdots).$$

Dunque avremo $A' = \alpha + A$.

Poichè B uguaglia tutti gli ambi fra le α, β, γ, δ, ..., e B' tutti gli ambi fra le β, γ, δ, ... (n° 31), ne segue che sarà $B = B' +$ la somma di tutti gli ambi che contengono α; ora quest'ultima somma è evidentemente eguale ad

$$\alpha(\beta + \gamma + \delta + \cdots),$$

e frattanto abbiamo

$$\beta + \gamma + \delta + \cdots = -A';$$

dunque, essendo

$$\alpha(\beta + \gamma + \delta + \cdots) = -\alpha A',$$

con la sostituzione otterremo

$$B = B' - \alpha A'.$$

Uguagliando C tutti i terni fra le α, β, γ, δ, ..., e C' tutti i terni fra le β, γ, δ, ... presi col segno —, avremo $C = C' -$ la somma dei terni che contengono α; ma questa somma è uguale ad

$$\alpha(\beta\gamma + \beta\delta + \gamma\delta + \cdots),$$

e però uguale ad $\alpha B'$; dunque sostituendo avremo $C = C' - \alpha B'$.

Essendo i coefficienti D, D' uguali a tutte le quaterne, il primo tra le α, β, γ, δ, ..., il secondo fra le β, γ, δ, ... (n° 31), ne verrà

$$D = D' + \alpha(\beta\gamma\delta + \cdots);$$

e quindi, a cagione di

$$\beta\gamma\delta + \cdots = -C',$$

otterremo $D = D' - \alpha C'$.

Nella maniera medesima si trova $E = E' - \alpha D'$, $F = F' = \alpha E'$, ..., e il coefficiente $M = M' - \alpha L'$.

Ciò posto, poniamo nella equazione $B = B' - \alpha A'$, ossia nella $B' = \alpha A' + B$, il valore di $A' = \alpha + A$; e così nelle altre

$$C = C' - \alpha B', \quad D = D' - \alpha C', \quad E = E' - \alpha D', \ldots,$$

Digitized by Google

ossia nelle

$$C' = \alpha B' + C, \quad D' = \alpha C' + D, \quad E' = \alpha D' + E, \ldots,$$

i valori successivi che risultano, e otterremo così

$$\begin{aligned}
A' &= \alpha + A,\\
B' &= \alpha^2 + A\alpha + B,\\
C' &= \alpha^3 + A\alpha^2 + B\alpha + C,\\
D' &= \alpha^4 + A\alpha^3 + B\alpha^2 + C\alpha + D,\\
E' &= \alpha^5 + A\alpha^4 + B\alpha^3 + C\alpha^2 + D\alpha + E,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
M' &= \alpha^k + A\alpha^{k-1} + B\alpha^{k-2} + \cdots + L\alpha + M;
\end{aligned}$$

e questi saranno i valori dei coefficienti nel quoto supposto; noi li vedremo risultare attualmente, se attualmente divideremo per $x - \alpha$ la quantità

$$x^m + Ax^{m-1} + Bx^{m-2} + Cx^{m-3} + \cdots + Lx^{m-(k-1)} + Mx^{m-k} + \cdots + V.$$

Dividendo il primo membro dell'equazione $x^4 - 2x^3 - 23x^2 - 12x + 36 = 0$ per $x - 6$, il quoto sarà $x^3 + A'x^2 + B'x + C'$, avendosi

$$\begin{aligned}
A' &= 6 - 2 = 4,\\
B' &= 6^2 - 2.6 - 23 = 1,\\
C' &= 6^3 - 2.6^2 - 23.6 - 12 = -6.
\end{aligned}$$

34. Indichiamo con la lettera $\sum$ la parola somma; supponiamo che l'espressione $\sum x$ ci denoti la somma $\alpha + \beta + \gamma + \delta + \cdots + \omega$, l'altra $\sum x^2$ c'indichi la somma dei quadrati $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + \delta^2 + \cdots + \omega^2$, la terza $\sum x^3$ ci esprima l'aggregato dei cubi $\alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3 + \delta^3 + \cdots + \omega^3$, e così di seguito; per modo che in generale $\sum x^k$ *indichi l'unione di tutte le k-esime potenze* $\alpha^k + \beta^k + \gamma^k + \delta^k + \cdots + \omega^k$. Ciò posto, io dico *che avremo*

$$(F) \quad \sum x^k + A\sum x^{k-1} + B\sum x^{k-2} + C\sum x^{k-3} + \cdots + H\sum x^3 + I\sum x^2 + L\sum x + kM = 0.$$

Affine di avere tutti gli ambi, che si possono fare con le nostre m radici α, β, γ, δ, ..., ω, sappiamo dall'algebra non doversi far altro che combinare ciascuna di tali radici con tutte le altre $m - 1$, e poi prendere la metà del risultato; affine di avere i terni, sappiamo doversi unire ciascuna radice con tutti gli ambi possibili fra le altre $m - 1$ che restano, prendendone in seguito la terza parte; e in generale, onde ottenere tutte le combinazioni a k a k delle m quantità supposte, sappiamo che ciascuna di esse devesi moltiplicare con tutte le combinazioni a $k - 1$ a $k - 1$ delle altre $m - 1$ radici, e che il risultato devesi poscia dividere per k. Avendosi dunque, pel n° 33, ciascuna quantità A', A'', A''', A^{IV}, ... $= -$ la somma semplice; ciascuna delle B', B'', B''', B^{IV}, $\cdots = +$ la somma degli ambi; cadauna delle C', C'', C''', C^{IV}, $\cdots = -$ l'aggregato dei terni, ed essendo così ciascun coefficiente L', L'', L''', L^{IV}, $\cdots = \pm$ l'aggregato dei prodotti a $k - 1$ a $k - 1$ di un numero $m - 1$ fra le m radici α, β, γ, δ, ..., ω, toltane la α rapporto alle quantità A', B', C', ..., L', toltane la β riguardo

Digitized by Google

alle A'', B'', C'', ..., L'', la γ relativamente alle A''', B''', C''', ..., L''', e così di seguito, ne viene che sarà

$$B = -\frac{1}{2}(\alpha A' + \beta A'' + \gamma A''' + \delta A^{iv} + \cdots),$$

$$C = -\frac{1}{3}(\alpha B' + \beta B'' + \gamma B''' + \delta B^{iv} + \cdots),$$

$$D = -\frac{1}{4}(\alpha C' + \beta C'' + \gamma C''' + \delta C^{iv} + \cdots),$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$M = -\frac{1}{k}(\alpha L' + \beta L'' + \gamma L''' + \delta L^{iv} + \cdots).$$

Ora tenendo conto soltanto di quest'ultima riga, come del caso generale, da cui tutti gli altri possonsi ricavare, osservo che essa si riduce alla

$$kM = -(\alpha L' + \beta L'' + \gamma L''' + \delta L^{iv} + \cdots).$$

Ma pel n° 33 abbiamo

$$L' = \alpha^{k-1} + A\alpha^{k-2} + B\alpha^{k-3} + C\alpha^{k-4} + \cdots + H\alpha^2 + I\alpha + L,$$

e nel modo medesimo si trova

$$L'' = \beta^{k-1} + A\beta^{k-2} + B\beta^{k-3} + C\beta^{k-4} + \cdots + H\beta^2 + I\beta + L,$$
$$L''' = \gamma^{k-1} + A\gamma^{k-2} + B\gamma^{k-3} + C\gamma^{k-4} + \cdots + H\gamma^2 + I\gamma + L,$$
$$L' = \delta^{k-1} + A\delta^{k-2} + B\delta^{k-3} + C\delta^{k-4} + \cdots + H\delta^2 + I\delta + L,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Dunque, sostituendo avremo

$$\begin{aligned} kM = &-(\alpha^k + \beta^k + \gamma^k + \delta^k + \cdots + \omega^k) \\ &- A\,(\alpha^{k-1} + \beta^{k-1} + \gamma^{k-1} + \delta^{k-1} + \cdots + \omega^{k-1}) \\ &- B\,(\alpha^{k-2} + \beta^{k-2} + \gamma^{k-2} + \delta^{k-2} + \cdots + \omega^{k-2}) \\ &- C\,(\alpha^{k-3} + \beta^{k-3} + \gamma^{k-3} + \delta^{k-3} + \cdots + \omega^{k-3}) \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ &- H\,(\alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3 + \delta^3 + \cdots + \omega^3) \\ &- I\,(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + \delta^2 + \cdots + \omega^2) \\ &- L\,(\alpha + \beta + \gamma + \delta + \cdots + \omega), \end{aligned}$$

e quindi ponendo $\sum x^k$, $\sum x^{k-1}$, $\sum x^{k-2}$, ... in luogo di queste somme, ne verrà

$$M = -\sum x^k - A\sum x^{k-1} - B\sum x^{k-2} - C\sum x^{k-3} - \cdots - H\sum x^3 - I\sum x^2 - L\sum x,$$

e finalmente

$$(F)\quad \sum x^k + A\sum x^{k-1} + B\sum x^{k-2} + C\sum x^{k-3} + \cdots + H\sum x^3 + I\sum x^2 + L\sum x + kM = 0\ *).$$

*) Non voglio omettere d'esporre la seguente elegantissima dimostrazione del precedente Teorema. L'Autore di questa è il Ch.mo Avvocato Paolo Cassiani, mio Predecessore e Maestro, del quale i rari talenti, le profonde cognizioni e l'ottimo carattere superano tutti gli encomii che se ne possono fare:

Digitized by Google

35. Esprimendo $m - k$ l'esponente di un termine qualunque della (D), ed M il coefficiente che gli corrisponde, se supporremo successivamente $k = 1, 2, 3, \ldots$, M diverrà in corrispondenza $A, B, C, D, \ldots$ (n° 17). Ora la precedente (F) con l'espo-

---

I. *Sia P il coefficiente di un termine qualunque Px^{m-k} dell'equazione algebraica determinata*

$$x^m + Ax^{m-1} + Bx^{m-2} + \ldots = 0.$$

Se nel coefficiente medesimo si supporranno successivamente uguali allo zero tutte le radici $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \ldots \omega$, ed i risultati di ciascheduna supposizione saranno rappresentati da'

$$\pi', \quad \pi'', \quad \pi''', \quad \pi^{IV}, \ldots \pi^{(\omega)},$$

si avrà

$$\pi' + \pi'' + \pi''' + \pi^{IV} + \ldots + \pi^{(\omega)} = (m - k)P.$$

Infatti, qualsivoglia termine del coefficiente P, espresso per mezzo delle radici dell'equazione, non è che il prodotto di un numero k delle stesse radici. Ora questo prodotto deve necessariamente svanire, quando si suppongono successivamente uguali allo zero le k radici in esso contenute; e per l'opposto deve sussistere, quando si suppongono successivamente uguali allo zero le altre $m - k$ radici, le quali non entrano nella sua formazione. Dunque, nella somma dei risultati $\pi' + \pi'' + \pi''' + \pi^{IV} + \ldots + \pi^{(\omega)}$ ciaschedun termine del coefficiente P si troverà replicato $m - k$ volte, e conseguentemente sarà

$$\pi' + \pi'' + \pi''' + \pi^{IV} + \ldots + \pi^{(\omega)} = (m - k)P.$$

II. *In un'equazione algebraica determinata qualunque*

$$x^m + Ax^{m-1} + Bx^{m-2} + \ldots + Px^{m-k} + \ldots + V = 0,$$

si ha

$$\sum x^k + A\sum x^{k-1} + B\sum x^{k-2} + C\sum x^{k-3} + \ldots + kP = 0.$$

Supposto che le radici dell'equazione siano $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \ldots \omega$, se si dividerà il primo membro per $x - \alpha$, si avrà la nuova equazione

$$x^{m-1} + (\alpha + A)x^{m-2} + (\alpha^2 + A\alpha + B)x^{m-3} + (\alpha^3 + A\alpha^2 + B\alpha + C)x^{m-4} + \ldots$$
$$\ldots + (\alpha^k + A\alpha^{k-1} + B\alpha^{k-2} + C\alpha^{k-3} + \ldots + P)x^{m-(k+1)} + \ldots + \alpha^{m-1} + A\alpha^{m-2} + B\alpha^{m-3} + C\alpha^{m-4} + \ldots + T = 0,$$

la quale comprenderà tutte le radici $\beta, \gamma, \delta, \ldots \omega$. È poi facile il comprendere, che i valori dei coefficienti di questa nuova equazione saranno affatto gli stessi che quelli a cui si ridurrebbero i coefficienti $A, B, C, \ldots, P$ della proposta per la supposizione di $\alpha = 0$. Si avrà dunque

$$\alpha^k + A\alpha^{k-1} + B\alpha^{k-2} + C\alpha^{k-3} + \ldots + P = \pi',$$

e nella stessa maniera si troverà

$$\beta^k + A\beta^{k-1} + B\beta^{k-2} + C\beta^{k-3} + \ldots + P = \pi'',$$
$$\gamma^k + A\gamma^{k-1} + B\gamma^{k-2} + C\gamma^{k-3} + \ldots + P = \pi''',$$
$$\delta^k + A\delta^{k-1} + B\delta^{k-2} + C\delta^{k-3} + \ldots + P = \pi^{IV},$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\omega^k + A\omega^{k-1} + B\omega^{k-2} + C\omega^{k-3} + \ldots + P = \pi^{(\omega)}.$$

Ora, se si sommano tutte queste equazioni, il numero delle quali è m, e si farà

$$\alpha^k + \beta^k + \gamma^k + \delta^k + \ldots + \omega^k = \sum x^k,$$
$$\alpha^{k-1} + \beta^{k-1} + \gamma^{k-1} + \delta^{k-1} + \ldots + \omega^{k-1} = \sum x^{k-1},$$
$$\alpha^{k-2} + \beta^{k-2} + \gamma^{k-2} + \delta^{k-2} + \ldots + \omega^{k-2} = \sum x^{k-2},$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

il risultato sarà

$$\sum x^k + A\sum x^{k-1} + B\sum x^{k-2} + C\sum x^{k-3} + \ldots + mP = \pi' + \pi'' + \pi''' + \pi^{IV} + \ldots + \pi^{(\omega)} = (m - k)P$$

Digitized by Google

nente generale k ha per ultimo suo termine kM; dunque, se supporremo successivamente $k = 1, 2, 3, \ldots$, la quantità kM divenendo A, $2B$, $3C$, ..., dalla (F) otterremo corrispondentemente le equazioni

$$\begin{aligned}
&\sum x + A = 0,\\
&\sum x^2 + A\sum x + 2B = 0,\\
&\sum x^3 + A\sum x^2 + B\sum x + 3C = 0,\\
&\sum x^4 + A\sum x^3 + B\sum x^2 + C\sum x + 4D = 0,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

Dalla prima di queste equazioni ricavo

$$\sum x = -A.$$

Sostituisco questo valore nella seconda, e ne viene

$$\sum x^2 = A^2 - 2B.$$

Ripongo i valori di $\sum x$ e $\sum x^2$ nella terza equazione, e otterremo

$$\sum x^3 = -A^3 + 3AB - 3C.$$

In egual modo ricaveremo

$$\sum x^4 = A^4 - 4A^2B + 4AC + 2B^2 - 4D,$$

e così in progresso. Dunque, data una qualunque equazione algebraica, potremo sempre col mezzo delle precedenti equazioni determinare *la somma delle potenze prime, seconde, terze, ... delle radici, e ciò fino alle loro potenze m-esime.*

36. Che se si vogliono le somme delle potenze di un grado maggiore di m, non servendo in tal caso la (F), ricorreremo all'equazione

$$(G)\quad \sum x^{m+h} + A\sum x^{m+h-1} + B\sum x^{m+h-2} + \cdots + T\sum x^{h+1} + V\sum x^h = 0,$$

di cui imprendiamo ora a dimostrarne la verità.

Pongansi successivamente nella data

$$x^m + Ax^{m-1} + Bx^{m-2} + Cx^{m-3} + \cdots + Tx + V = 0,$$

in luogo della x tutte le radici α, β, γ, δ, ...; avremo perciò

$$\begin{aligned}
&\alpha^m + A\alpha^{m-1} + B\alpha^{m-2} + C\alpha^{m-3} + \cdots + T\alpha + V = 0,\\
&\beta^m + A\beta^{m-1} + B\beta^{m-2} + C\beta^{m-3} + \cdots + T\beta + V = 0,\\
&\gamma^m + A\gamma^{m-1} + B\gamma^{m-2} + C\gamma^{m-3} + \cdots + T\gamma + V = 0,\\
&\delta^m + A\delta^{m-1} + B\delta^{m-2} + C\delta^{m-3} + \cdots + T\delta + V = 0,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

(n° prec.). Dunque

$$\sum x^k + A\sum x^{k-1} + B\sum x^{k-2} + C\sum x^{k-3} + \ldots + mP = (m-k)P,$$

e quindi

$$\sum x^k + A\sum x^{k-1} + B\sum x^{k-2} + C\sum x^{k-3} + \ldots + kP = 0.$$

Dello stesso Avvocato CASSIANI è pur anche l'ingegnosissima dimostrazione del Teorema esposto nel n° 52.

Digitized by Google

Moltiplico ora la prima di queste equazioni per α^h, la seconda per β^h, la terza per γ^h, la quarta per δ^h, ..., e ciò fatto eseguisco in colonna la somma di tutti i risultati che abbiamo così ottenuti; è chiaro che in fine ci risulterà appunto

$$(G)\quad \sum x^{m+h} + A\sum x^{m+h-1} + B\sum x^{m+h-2} + \cdots + T\sum x^{h+1} + V\sum x^h = 0.$$

Suppongo presentemente $h = 1$; avendosi quindi

$$\sum x^{m+1} + A\sum x^m + B\sum x^{m-1} + C\sum x^{m-2} + \cdots + T\sum x^2 + V\sum x = 0,$$

sostituisco in luogo di $\sum x^m$, $\sum x^{m-1}$, ... i valori rispettivi ottenuti pel n° 35, e otterremo così il valore di $\sum x^{m+1}$.

Faccio in secondo luogo $h = 2$, venendone

$$\sum x^{m+2} + A\sum x^{m+1} + B\sum x^m + C\sum x^{m-1} + \cdots + T\sum x^3 + V\sum x^2 = 0,$$

colloco quivi in luogo di $\sum x^{m+1}$, $\sum x^m$, ... i valori corrispondenti, e quindi ci risulterà il valore di $\sum x^{m+2}$. In simil modo ricaveremo i valori di $\sum x^{m+3}$, $\sum x^{m+4}$, etc.

37. Le equazioni ricavate nel n° 35 dalla (F) col supporre successivamente $k = 1, 2, 3, \ldots, m$, e le altre ottenute dalla (G) (n° prec.) col supporre successivamente $h = 1, 2, 3, \ldots$, equazioni mediante le quali possiamo sempre ottenere le somme di tutte le potenze intiere delle radici, quelle sono, che costituiscono i così detti dal loro inventore *Teoremi Newtoniani.*

Data sia ad esempio l'equazione $x^3 - x^2 - 14x + 24 = 0$, col paragonare questa con la (D) ricavandosi $m = 3$, $A = -1$, $B = -14$, e l'ultimo termine $V = 24$, supponendo successivamente nella (F) $k = 1, 2, 3$, otterremo

$$\sum x - 1 = 0, \quad \sum x^2 - \sum x - 28 = 0, \quad \sum x^3 - \sum x^2 - 14\sum x + 72 = 0,$$

e, supponendo nella (G) $h = 1, 2, 3, \ldots$, ne verrà

$$\begin{aligned}
\sum x^4 - \sum x^3 - 14\sum x^2 + 24\sum x &= 0,\\
\sum x^5 - \sum x^4 - 14\sum x^3 + 24\sum x^2 &= 0,\\
\sum x^6 - \sum x^5 - 14\sum x^4 + 24\sum x^3 &= 0,\\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots &
\end{aligned}$$

Ricavo ora dalle prime di queste equazioni il valore di $\sum x$, $\sum x^2$, ...; lo sostituisco nelle altre successive, e troveremo così $\sum x = 1$, $\sum x^2 = 29$, $\sum x^3 = -29$, $\sum x^4 = 353$, $\sum x^5 = -749$, ... Difatti, essendo 2, 3, -4 le radici della supposta equazione, abbiamo la loro somma $2 + 3 - 4 = 1$, la somma dei loro quadrati $4 + 9 + 16 = 29$, la somma dei loro cubi $8 + 27 - 64 = -29$, l'aggregato delle quarte potenze $16 + 81 + 256 = 353$, la somma delle potenze quinte $32 + 243 - 1024 = -749$ ..., come appunto avevam ritrovato coi Teoremi Newtoniani, indipendentemente dalle radici medesime.

38. *Formare un'equazione la quale abbia per radici le m quantità date* $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \ldots, \omega$.

Potremo sciogliere questo problema in tre maniere diverse, mediante i n^i 22, 31, 35. Imperciocchè pel n° 22 non avremo che a moltiplicare insieme i binomii

Digitized by Google

$x-\alpha$, $x-\beta$, $x-\gamma$, $x-\delta$, ..., ed uguagliare il loro prodotto allo zero; pel n° 31 non avremo che a trovare i valori della somma semplice, della somma degli ambi, di quella dei terni, ... delle date radici, e queste, prese nel modo indicato nel cit. n° 31, costituiranno i varii coefficienti della equazione che si cerca, il grado della quale sarà m. Finalmente, dalle radici cognite potendosi immediatamente determinare la somma di tutte le loro potenze, potremo, mediante queste e le equazioni del n° 35, determinare i coefficienti dell'equazione richiesta; poichè, chiamati $A, B, C, \ldots$ tali coefficienti, dalle

$$\sum x + A = 0, \quad \sum x^2 + A\sum x + 2B = 0, \quad \ldots$$

ricaviamo

$$A = -\sum x,$$

$$B = \frac{(\sum x)^2 - \sum x^2}{2},$$

$$C = \frac{3\sum x . \sum x^2 - 2\sum x^3 - (\sum x)^3}{2.3},$$

. . . . . .

Siano per esempio 1, 3, — 2 le radici date. Eseguisco secondo il primo metodo la moltiplicazione dei binomii $x-1$, $x-3$, $x+2$, e faccio il loro prodotto $x^3 - 2x^2 - 5x + 6 = 0$. Seguendo il secondo metodo, formo la somma semplice $1 + 3 - 2 = 2$, quella degli ambi $1.3 + 1.-2 + 3.-2 = 3 - 2 - 6 = -5$, e il prodotto $1.3.-2 = -6$, e prendendo il primo e l'ultimo di questi risultati col segno contrario, ne viene l'equazione $x^3 - 2x^2 - 5x + 6 = 0$. Finalmente, col terzo metodo, avendosi

$$\sum x = 1 + 3 - 2 = 2, \quad \sum x^2 = 1 + 9 + 4 = 14, \quad \sum x^3 = 1 + 27 - 8 = 20,$$

otterremo

$$A = -2,$$

$$B = \frac{2.2 - 14}{2} = \frac{-10}{2} = -5,$$

$$C = \frac{3.2.14 - 2.20 - (2)^3}{2.3} = \frac{84 - 40 - 8}{2.3} = \frac{36}{6} = 6;$$

e quindi $x^3 - 2x^2 - 5x + 6 = 0$.

In tutti e tre i casi abbiamo così ottenuta la stessa equazione, di cui 1, 3, — 2 sono le radici.

39. Indichiamo con l'espressione $\sum x^m x^n$ la somma di tutti i prodotti che si hanno moltiplicando la potenza n-esima di ciascuna radice con la somma di tutte le potenze m-esime delle altre, onde sia

$$\begin{aligned}\sum x^m x^n = {} & \alpha^n(\beta^m + \gamma^m + \delta^m + \cdots) \\ & + \beta^n(\alpha^m + \gamma^m + \delta^m + \cdots) \\ & + \gamma^n(\alpha^m + \beta^m + \delta^m + \cdots) \\ & + \delta^n(\alpha^m + \beta^m + \gamma^m + \cdots) \\ & + \cdots\cdots\cdots\cdots,\end{aligned}$$

Digitized by Google

ovvero

$$\begin{aligned}\sum x^m x^n = {} & \alpha^n \beta^m + \alpha^n \gamma^m + \alpha^n \delta^m + \cdots \\ & + \beta^n \alpha^m + \beta^n \gamma^m + \beta^n \delta^m + \cdots \\ & + \gamma^n \alpha^m + \gamma^n \beta^m + \gamma^n \delta^m + \cdots \\ & + \delta^n \alpha^m + \delta^n \beta^m + \delta^n \gamma^m + \cdots \\ & + \cdots\cdots\cdots\cdots\end{aligned}$$

L'espressione $\sum x^m x^n x^p$ indichi l'aggregato de' prodotti della potenza p di ciascuna radice nella somma de' prodotti fra le potenze m, n delle altre, e sia

$$\begin{aligned}\sum x^m x^n x^p = {} & \alpha^p(\beta^m\gamma^n + \beta^n\gamma^m + \beta^m\delta^n + \beta^n\delta^m + \gamma^n\delta^m + \gamma^m\delta^n + \cdots) \\ & + \beta^p(\alpha^m\gamma^n + \alpha^n\gamma^m + \alpha^m\delta^n + \alpha^n\delta^m + \gamma^n\delta^m + \gamma^m\delta^n + \cdots) \\ & + \gamma^p(\alpha^m\beta^n + \alpha^n\beta^m + \alpha^m\delta^n + \alpha^n\delta^m + \beta^n\delta^m + \beta^m\delta^n + \cdots) \\ & + \delta^p(\alpha^m\beta^n + \alpha^n\beta^m + \alpha^m\gamma^n + \alpha^n\gamma^m + \beta^n\gamma^m + \beta^m\gamma^n + \cdots) \\ & + \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots,\end{aligned}$$

ossia

$$\begin{aligned}\sum x^m x^n x^p = {} & \alpha^p\beta^m\gamma^n + \alpha^p\beta^n\gamma^m + \alpha^p\beta^m\delta^n + \alpha^p\beta^n\delta^m + \alpha^p\gamma^n\delta^m + \alpha^p\gamma^m\delta^n + \cdots \\ & + \beta^p\alpha^m\gamma^n + \beta^p\alpha^n\gamma^m + \beta^p\alpha^m\delta^n + \beta^p\alpha^n\delta^m + \beta^p\gamma^n\delta^m + \beta^p\gamma^m\delta^n + \cdots \\ & + \gamma^p\alpha^m\beta^n + \gamma^p\alpha^n\beta^m + \gamma^p\alpha^m\delta^n + \gamma^p\alpha^n\delta^m + \gamma^p\beta^n\delta^m + \gamma^p\beta^m\delta^n + \cdots \\ & + \delta^p\alpha^m\beta^n + \delta^p\alpha^n\beta^m + \delta^p\alpha^m\gamma^n + \delta^p\alpha^n\gamma^m + \delta^p\beta^n\gamma^m + \delta^p\beta^m\gamma^n + \cdots \\ & + \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\end{aligned}$$

Nella maniera medesima supponiamo

$$\begin{aligned}\sum x^m x^n x^p x^q = {} & \alpha^q(\beta^m\gamma^n\delta^p + \beta^n\gamma^m\delta^p + \cdots) \\ & + \beta^q(\alpha^m\gamma^n\delta^p + \alpha^n\gamma^m\delta^p + \cdots) \\ & + \gamma^q(\alpha^m\beta^n\delta^p + \alpha^n\beta^m\delta^p + \cdots) \\ & + \delta^q(\alpha^m\beta^n\gamma^p + \alpha^n\beta^m\gamma^p + \cdots) \\ & + \cdots\cdots\cdots\cdots\end{aligned}$$

e così di seguito.

40. Dal n° prec. e dal n° 8 è chiaro che sarà

$$\sum x^m x^n = \alpha^n \sum x^{m\,\underline{\alpha}} + \beta^n \sum x^{m\,\underline{\beta}} + \gamma^n \sum x^{m\,\underline{\gamma}} + \delta^n \sum x^{m\,\underline{\delta}} + \cdots,$$

$$\sum x^m x^n x^p = \alpha^p \sum x^m x^{n\,\underline{\alpha}} + \beta^p \sum x^m x^{n\,\underline{\beta}} + \gamma^p \sum x^m x^{n\,\underline{\gamma}} + \delta^p \sum x^m x^{n\,\underline{\delta}} + \cdots,$$

$$\sum x^m x^n x^p x^q = x^q \sum x^m x^n x^{p\,\underline{\alpha}} + \beta^q \sum x^m x^n x^{p\,\underline{\beta}} + \gamma^q \sum x^m x^n x^{p\,\underline{\gamma}} + \delta^q \sum x^m x^n x^{p\,\underline{\delta}} + \cdots,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

41. *Avremo sempre*

$$(H) \qquad \sum x^m x^n = \sum x^n \sum x^m - \sum x^{m+n},$$

$$(I) \qquad \sum x^m x^n x^p = \sum x^p \sum x^m x^n - \sum x^m x^{n+p} - \sum x^n x^{m+p},$$

$$(K) \qquad \sum x^m x^n x^p x^q = \sum x^q \sum x^m x^n x^p - \sum x^m x^n x^{p+q} - \sum x^m x^p x^{n+q} - \sum x^n x^p x^{m+q},$$

Digitized by Google

e in generale

$$(L)\quad \left\{\begin{aligned} \sum x^m x^n x^p x^q \ldots x^u &= \sum x^u \sum x^m x^n x^p x^q \cdots \\ &- \sum x^m x^n x^p \ldots x^{q+u} - \sum x^m x^n x^q \ldots x^{p+u} \\ &- \sum x^m x^p x^q \ldots x^{n+u} - \sum x^n x^p x^q \ldots x^{m+u} \\ &- \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}\right.$$

Ed infatti:

1° Poichè abbiamo

$$\sum x^m = \alpha^m + \sum x^{m\,\underline{\alpha}}$$

(n^i 9, 34), moltiplicando per α^n ne verrà

$$\alpha^n \sum x^m = \alpha^{m+n} + \alpha^n \sum x^{m\,\underline{\alpha}}.$$

In egual modo troveremo essere

$$\begin{aligned} \beta^n \sum x^m &= \beta^{m+n} + \beta^n \sum x^{m\,\underline{\beta}}, \\ \gamma^n \sum x^m &= \gamma^{m+n} + \gamma^n \sum x^{m\,\underline{\gamma}}, \\ \delta^n \sum x^m &= \delta^{m+n} + \delta^n \sum x^{m\,\underline{\delta}}, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

Dunque, sommando in colonna tutte queste equazioni, ci risulterà

$$(\alpha^n + \beta^n + \gamma^n + \delta^n + \cdots)\sum x^m = \alpha^{m+n} + \beta^{m+n} + \gamma^{m+n} + \delta^{m+n} + \cdots$$
$$\cdots + \alpha^n \sum x^{m\,\underline{\alpha}} + \beta^n \sum x^{m\,\underline{\beta}} + \gamma^n \sum x^{m\,\underline{\gamma}} + \delta^n \sum x^{m\,\underline{\delta}} + \cdots,$$

e ponendo le rispettive espressioni, otterremo

$$\sum x^n \sum x^m = \sum x^{m+n} + \sum x^m x^n$$

(n^i 34, 40), e quindi

$$(H)\qquad \sum x^m x^n = \sum x^n \sum x^m - \sum x^{m+n}.$$

2° Essendo

$$\sum x^m x^n = \alpha|\sum x^m x^n + \sum x^m x^{n\,\underline{\alpha}}$$

(n° 9), e come si vede nel n° 39 dalla prima fila orizzontale e dalla prima colonna del valore di $\sum x^m x^n$, essendo

$$\alpha|\sum x^m x^n = \alpha^n \sum x^{m\,\underline{\alpha}} + \alpha^m \sum x^{n\,\underline{\alpha}},$$

ne viene che avremo

$$\sum x^m x^n = \alpha^n \sum x^{m\,\underline{\alpha}} + \alpha^m \sum x^{n\,\underline{\alpha}} + \sum x^m x^{n\,\underline{\alpha}},$$

e in egual modo, cangiata semplicemente la α in β, γ, δ, ..., trovasi essere

$$\begin{aligned} \sum x^m x^n &= \beta^n \sum x^{m\,\underline{\beta}} + \beta^m \sum x^{n\,\underline{\beta}} + \sum x^m x^{n\,\underline{\beta}}, \\ \sum x^m x^n &= \gamma^n \sum x^{m\,\underline{\gamma}} + \gamma^m \sum x^{n\,\underline{\gamma}} + \sum x^m x^{n\,\underline{\gamma}}, \\ \sum x^m x^n &= \delta^n \sum x^{m\,\underline{\delta}} + \delta^m \sum x^{n\,\underline{\delta}} + \sum x^m x^{n\,\underline{\delta}}, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

Digitized by Google

Moltiplico presentemente queste equazioni rispettivamente per α^p, β^p, γ^p, δ^p, ..., e venendone

$$\alpha^p \sum x^m x^n = \alpha^{n+p} \sum x^m \overline{}^{\alpha} + \alpha^{m+p} \sum x^n \overline{}^{\alpha} + \alpha^p \sum x^m x^n \overline{}^{\alpha},$$
$$\beta^p \sum x^m x^n = \beta^{n+p} \sum x^m \overline{}^{\beta} + \beta^{m+p} \sum x^n \overline{}^{\beta} + \beta^p \sum x^m x^n \overline{}^{\beta},$$
$$\gamma^p \sum x^m x^n = \gamma^{n+p} \sum x^m \overline{}^{\gamma} + \gamma^{m+p} \sum x^n \overline{}^{\gamma} + \gamma^p \sum x^m x^n \overline{}^{\gamma},$$
$$\delta^p \sum x^m x^n = \delta^{n+p} \sum x^m \overline{}^{\delta} + \delta^{m+p} \sum x^n \overline{}^{\delta} + \delta^p \sum x^m x^n \overline{}^{\delta},$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

sommo in colonna tutti questi risultati. Ora la somma della prima colonna è $= \sum x^p \sum x^m x^n$, quella della seconda pel n° 40 è $= \sum x^m x^{n+p}$, quella della terza è $= \sum x^n x^{m+p}$, e quella della quarta è $= \sum x^m x^n x^p$. Dunque, eseguita l'operazione otterremo

$$\sum x^p \sum x^m x^n = \sum x^m x^{n+p} + \sum x^n x^{m+p} + \sum x^m x^n x^p,$$

e però

$$(I) \qquad \sum x^m x^n x^p = \sum x^p \sum x^m x^n - \sum x^m x^{n+p} - \sum x^n x^{m+p}.$$

3° Avendosi

$$\sum x^m x^n x^p = \alpha | \sum x^m x^n x^p + \sum x^m x^n x^p \overline{}^{\alpha}$$

(n° 9), e dal n° 39 vedendosi essere

$$\alpha | \sum x^m x^n x^p = \alpha^p \sum x^m x^n \overline{}^{\alpha} + \alpha^n \sum x^m x^p \overline{}^{\alpha} + \alpha^m \sum x^n x^p \overline{}^{\alpha},$$

ne segue che sarà

$$\sum x^m x^n x^p = \alpha^p \sum x^m x^n \overline{}^{\alpha} + \alpha^n \sum x^m x^p \overline{}^{\alpha} + \alpha^m \sum x^n x^p \overline{}^{\alpha} + \sum x^m x^n x^p \overline{}^{\alpha},$$

e cangiata la α in β, γ, δ, ..., avremo egualmente

$$\sum x^m x^n x^p = \beta^p \sum x^m x^n \overline{}^{\beta} + \beta^n \sum x^m x^p \overline{}^{\beta} + \beta^m \sum x^n x^p \overline{}^{\beta} + \sum x^m x^n x^p \overline{}^{\beta},$$
$$\sum x^m x^n x^p = \gamma^p \sum x^m x^n \overline{}^{\gamma} + \gamma^n \sum x^m x^p \overline{}^{\gamma} + \gamma^m \sum x^n x^p \overline{}^{\gamma} + \sum x^m x^n x^p \overline{}^{\gamma},$$
$$\sum x^m x^n x^p = \delta^p \sum x^m x^n \overline{}^{\delta} + \delta^n \sum x^m x^p \overline{}^{\delta} + \delta^m \sum x^n x^p \overline{}^{\delta} + \sum x^m x^n x^p \overline{}^{\delta},$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Moltiplico, come precedentemente, per α^q, β^q, γ^q, δ^q, ... queste successive equazioni, ed avutine i risultati

$$\alpha^q \sum x^m x^n x^p = \alpha^{p+q} \sum x^m x^n \overline{}^{\alpha} + \alpha^{n+q} \sum x^m x^p \overline{}^{\alpha} + \alpha^{m+q} \sum x^n x^p \overline{}^{\alpha} + \alpha^q \sum x^m x^n x^p \overline{}^{\alpha},$$
$$\beta^q \sum x^m x^n x^p = \beta^{p+q} \sum x^m x^n \overline{}^{\beta} + \beta^{n+q} \sum x^m x^p \overline{}^{\beta} + \beta^{m+q} \sum x^n x^p \overline{}^{\beta} + \beta^q \sum x^m x^n x^p \overline{}^{\beta},$$
$$\gamma^q \sum x^m x^n x^p = \gamma^{p+q} \sum x^m x^n \overline{}^{\gamma} + \gamma^{n+q} \sum x^m x^p \overline{}^{\gamma} + \gamma^{m+q} \sum x^n x^p \overline{}^{\gamma} + \gamma^q \sum x^m x^n x^p \overline{}^{\gamma},$$
$$\delta^q \sum x^m x^n x^p = \delta^{p+q} \sum x^m x^n \overline{}^{\delta} + \delta^{n+q} \sum x^m x^p \overline{}^{\delta} + \delta^{m+q} \sum x^n x^p \overline{}^{\delta} + \delta^q \sum x^m x^n x^p \overline{}^{\delta},$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

li sommo in colonna, ed è chiaro che, come nell'altro caso, ci risulterà, pel n° 40,

Digitized by Google

$$\sum x^q \sum x^m x^n x^p = \sum x^m x^n x^{p+q} + \sum x^m x^p x^{n+q} + \sum x^n x^p x^{m+q} + \sum x^m x^n x^p x^q,$$

onde ricaveremo

$$(K) \quad \sum x^m x^n x^p x^q = \sum x^q \sum x^m x^n x^p - \sum x^m x^n x^{p+q} - \sum x^m x^p x^{n+q} - \sum x^n x^p x^{m+q},$$

4° Ripetendo gl'istessi discorsi, facilmente vedremo verificarsi sempre proprietà simili alle precedenti rapporto alle somme dei prodotti fra le varie potenze delle radici, qualunque queste siansi, e qualunque si sia il loro numero, onde in generale avremo

$$(L) \quad \left\{ \begin{array}{l} \sum x^m x^n x^p x^q \ldots x^u = \sum x^u . \sum x^m x^n x^p x^q \ldots \\ \qquad - \sum x^m x^n x^p \ldots x^{q+u} - \sum x^m x^n x^q \ldots x^{p+u} \\ \qquad - \sum x^m x^p x^q \qquad x^{n+u} - \sum x^n x^p x^q \ldots x^{m+u} \\ \qquad - \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array} \right.$$

42. Col mezzo delle precedenti formole (H), (I), (K), (L), *data un'equazione qualunque, potremo sempre determinare le somme dei prodotti di qualsivogliano potenze delle sue radici.* La formola (H) ci darà la somma dei prodotti fra due sole potenze, la formola (I) ci darà la somma dei prodotti fra tre potenze, e così di seguito.

Venga proposta per esempio l'equazione

$$x^3 - 2x^2 - 5x + 6 = 0,$$

e vogliasi l'aggregato di tutti i prodotti fra le potenze seconda e terza delle sue radici. Supposto nella (H) $m = 2$, $n = 3$, venendone

$$\sum x^2 x^3 = \sum x^2 \sum x^3 - \sum x^5,$$

e dalle (F), (G) ricavandosi

$$\sum x^2 = 14, \qquad \sum x^3 = 20, \qquad \sum x^5 = 212,$$

otterremo

$$\sum x^2 x^3 = 14.20 - 212 = 280 - 212 = 68$$

per la somma richiesta.

Venga in secondo luogo domandata la somma di tutti i prodotti fra le potenze prima, seconda e quarta delle radici medesime. Suppongo perciò nella (I) $m = 1$, $n = 2$, $p = 4$, e da essa ottenendo

$$\sum x^1 x^2 x^4 = \sum x^4 \sum x^1 x^2 - \sum x^1 x^6 - \sum x^2 x^5,$$

ritrovo col mezzo della (H) i valori delle quantità

$$\sum x^1 x^2 = 8, \qquad \sum x^1 x^6 = -472, \qquad \sum x^2 x^5 = 908,$$

ed abbiamo $\sum x^4 = 98$. Dunque, sostituendo avremo

$$\sum x^1 x^2 x^4 = 98.8 + 472 - 908,$$

e però

$$\sum x^1 x^2 x^4 = 348.$$

Difatti, essendo 1, 3, — 2 le radici della proposta (n° 38), è facile il verificare da esse medesime i ritrovati valori delle somme propostici $\sum x^2 x^3$, $\sum x^1 x^2 x^4$.

Digitized by Google

43. Data una funzione, per esempio la $f(\alpha)(\beta)(\gamma)$, *supponiamo di cambiare in essa fra loro le lettere che la compongono*, scrivendo per esempio la α in luogo della β, e la β invece della α, come nella $f(\beta)(\alpha)(\gamma)$, o siccome nell'altra $f(\beta)(\gamma)(\alpha)$, ponendo la α in luogo di γ, la β in luogo di α, e la γ in vece di β. *Questi diversi collocamenti delle lettere, e quindi i varii risultati, che ottengonsi nella funzione, quelli sono, che dai Matematici si dicono* PERMUTAZIONI.

44. Se sia $f(\alpha)(\beta)(\gamma) = \alpha\beta\gamma$, al cangiarsi fra loro delle lettere, non cambiando mai il valore del prodotto, vedesi che in questo caso, qualunque permutazione si faccia, il valore della funzione resta sempre il medesimo; ma se abbiasi

$$f(\alpha)(\beta)(\gamma) = \alpha + \beta - \gamma,$$

oppure

$$f(\alpha)(\beta)(\gamma) = \frac{\alpha}{\beta} + \gamma^2,$$

nel primo di questi casi la funzione non cambia valore per la permutazione di α in β, ma lo cambia bensì nella permutazione di α, o di β, in γ; nell'altro caso poi il valore della funzione diviene sempre diverso, qualunque permutazione si faccia, donde si vede, che una data funzione sotto le varie permutazioni o non cambia mai di valore, o lo cambia sempre, o alcune volte soltanto.

45. *Proposta una funzione qualunque di un numero m di lettere, determinare il numero di tutte le sue possibili permutazioni.*

1° Sia primieramente $m = 1$, e $f(\alpha)$ la data funzione; in questo caso non potendosi dare che una sola posizione alla α, non vi sarà che una sola permutazione.

2° Abbiasi $m = 2$, e $f(\alpha)(\beta)$ la funzione proposta; in tale supposizione potremo scrivere la β, o dopo, o prima della α, ed anzi non potremo attribuirle altro collocamento; due adunque ne saranno i risultati, cioè $f(\alpha)(\beta)$, $f(\beta)(\alpha)$, e in numero di $2 = 2.1$ per conseguenza le permutazioni richieste.

3° Supposto $m = 3$, aggiungasi nella data funzione alle due precedenti α, β la terza lettera γ. Questa, qualunque collocamento abbiansi le α, β, può sempre avere tre posizioni diverse, poichè può scriversi, e dopo, e in mezzo, e prima di esse; ora pel prec. 2° due sono i cangiamenti fra le α e β; a ciascuno dunque di questi, tre corrispondendone di γ, ne viene che $3.2 = 3.2.1 = 6$ sarà il numero delle permutazioni nella proposta funzione, e tali saranno le

$$f(\alpha)(\beta)(\gamma), \quad f(\alpha)(\gamma)(\beta), \quad f(\gamma)(\alpha)(\beta),$$
$$f(\beta)(\alpha)(\gamma), \quad f(\beta)(\gamma)(\alpha), \quad f(\gamma)(\beta)(\alpha).$$

4° Essendo $m = 4$, alle α, β, γ della precedente funzione uniscasi la δ; poichè sotto qualsivoglia posizione delle α, β, γ può la δ evidentemente occupare quattro luoghi diversi, ne segue, che le permutazioni della $f(\alpha)(\beta)(\gamma)(\delta)$ saranno quattro volte tante, quante sono le permutazioni fra le tre quantità α, β, γ, e quindi saranno in numero di $4.3.2.1 = 24$.

5° Se $f(\alpha)(\beta)(\gamma)(\delta)(\eta)$ sia la funzione proposta, troveremo in egual modo $5.4.3.2.1$ essere il numero delle sue permutazioni, e così di seguito; onde in generale:

Digitized by Google

6° Le permutazioni fra m lettere dovendo essere m volte tante, quante sono le permutazioni fra $m-1$ quantità; il numero delle permutazioni tra queste $m-1$ quantità dovendo essere $=m-1$ replicato tante volte, quante sono le permutazioni fra $m-2$ delle medesime; il numero di queste permutazioni ultime uguagliando $m-2$ moltiplicato pel numero delle permutazioni fra $m-3$ di tali lettere, e così in progresso; ne risulta chiaramente, che il *numero delle permutazioni fra le m supposte quantità dovrà essere*

$$=m(m-1)(m-2)(m-3)\ldots 3.2.1,$$

ossia

$$=1.2.3.4.\ldots m.$$

46. 1° Supponiamo nelle formole del n° 39 $m=n$; per tale ipotesi i due termini $\alpha^m\beta^n+\alpha^n\beta^m$ si cangeranno nel solo $2\alpha^m\beta^m$, e così gli altri tutti

$$\alpha^m\gamma^n+\alpha^n\gamma^m,\quad \beta^m\gamma^n+\beta^n\gamma^m,\ldots,\quad \alpha^m\beta^n\gamma^p+\alpha^n\beta^m\gamma^p,\quad \alpha^m\gamma^n\beta^p+\alpha^n\gamma^m\beta^p,\ldots,$$

si cambieranno nei corrispondenti

$$2\alpha^m\gamma^m,\quad 2\beta^m\gamma^m,\ldots,\ 2\alpha^m\beta^m\gamma^p,\quad 2\alpha^m\gamma^m\beta^p,\ldots.$$

Dunque, se supporremo che la espressione $\sum\overline{xx}^m$ ci rappresenti la somma $\alpha^m\beta^m+\alpha^m\gamma^m+\beta^m\gamma^m+\cdots$, è chiaro che ne verrà

$$2\sum\overline{xx}^m=\sum x^m x^n.$$

In egual modo, se le espressioni

$$\sum\overline{xx}^m x^p,\quad \sum\overline{xx}^m x^p x^q\ldots$$

ci significano le somme

$$\alpha^m\beta^m\gamma^p+\alpha^m\gamma^m\beta^p+\beta^m\gamma^m\alpha^p+\cdots,$$

$$\alpha^m\beta^m\gamma^p\delta^q+\alpha^m\gamma^m\beta^p\delta^q+\alpha^m\delta^m\beta^p\gamma^q+\beta^m\gamma^m\alpha^p\delta^q+\cdots,$$

avremo

$$\sum x^m x^n x^p=2\sum\overline{xx}^m x^p,\quad \sum x^m x^n x^p x^q=2\sum\overline{xx}^m x^p x^q,\ldots.$$

2° Facciamo $m=n=p$. Poichè nel valore di $\sum x^m x^n x^p$ i termini ove entrano insieme le tre radici α, β, γ sono tanti, evidentemente, quante sono le permutazioni fra gli esponenti m, n, p (n° 39), onde sono in numero di 1.2.3 (n° 45, 3°), e poichè per la nostra supposizione ciascuno di questi termini si cangia nel $\alpha^m\beta^m\gamma^m$, ne segue chiaramente che nella quantità $\sum x^m x^n x^p$ il termine $\alpha^m\beta^m\gamma^m$ verrà ad essere ripetuto le volte 1.2.3; ora lo stesso dicesi pure degli altri termini tutti; dunque, divenendo ciascuno di essi un termine simile al precedente, e venendo perciò ad essere replicato le volte 1.2.3, ne risulta che, se esprimeremo per $\sum\overline{xxx}^m$ la somma

$$\alpha^m\beta^m\gamma^m+\alpha^m\beta^m\delta^m+\alpha^m\gamma^m\delta^m+\beta^m\gamma^m\delta^m+\cdots,$$

dovrà essere

$$\sum x^m x^n x^p=1.2.3\sum\overline{xxx}^m.$$

Con lo stesso discorso vedremo essere

$$\sum x^m x^n x^p x^q=1.2.3\sum\overline{xxx}^m x^q,\quad \sum x^m x^n x^p x^q x^r=1.2.3\sum\overline{xxx}^m x^q x^r,\ldots.$$

3° Abbiasi $m=n=p=q$. Essendo in $\sum x^m x^n x^p x^q$ tanti i termini ne' quali

Digitized by Google

entrano insieme le radici α, β, γ, δ, quanto è il numero delle permutazioni fra le quantità m, n, p, q, vedesi che nell'ipotesi fatta, divenendo ciascuno di tali termini $= \alpha^m \beta^m \gamma^m \delta^m$, verrà questo termine ad essere ripetuto le volte 1.2.3.4; e, lo stesso accadendo degli altri, se sia

$$\sum \overline{xxxx}^m = \alpha^m \beta^m \gamma^m \delta^m + \alpha^m \beta^m \gamma^m \eta^m + \cdots,$$

avremo, per $m = n = p = q$,

$$\sum x^m x^n x^p x^q = 1.2.3.4 \sum \overline{xxxx}^m,$$

e così troveremo essere, nella stessa ipotesi,

$$\sum x^m x^n x^p x^q x^r = 1.2.3.4 \sum \overline{xxxx}^m x^r, \ldots.$$

4° Ripetendo il discorso medesimo si vedrà agevolmente che, mentre sia

$$m = n = p = q = r,$$

otterremo

$$\sum x^m x^n x^p x^q x^r = 1.2.3.4.5 \sum \overline{xxxxx}^m,$$

e così in progresso.

47. Supponiamo in (H) $m = n$, riponendo in luogo di $\sum x^m x^n$ la quantità $2\sum \overline{xx}^m$ (n° 46, 1°), ci verrà

$$2\sum \overline{xx}^m = \sum x^m \sum x^m - \sum x^{2m},$$

e però

$$\sum \overline{xx}^m = \frac{\sum x^m \sum x^m - \sum x^{2m}}{2}.$$

2° Poniamo in (I) $m = n = p$; pei n^i 41, 2°; 46, 1°, 2°, sostituendo ci verrà

$$1.2.3 \sum \overline{xxx}^m = 2 \sum x^m \sum \overline{xx}^m - \sum x^m x^{2m} - \sum x^m x^{2m} = 2 \sum x^m \sum \overline{xx}^m - 2 \sum x^m x^{2m},$$

e quindi

$$\sum \overline{xxx}^m = \frac{\sum x^m \sum \overline{xx}^m - \sum x^m x^{2m}}{3}.$$

3° Facciasi in (K) $m = n = p = q$; colla sostituzione, pei n^i 41, 3°; 46, 1°, 2°, 3°, avremo

$$1.2.3.4 \sum \overline{xxxx}^m = 1.2.3 \sum x^m \sum \overline{xxx}^m - 1.2.3 \sum \overline{xx}^m x^{2m},$$

e però

$$\sum \overline{xxxx}^m = \frac{\sum x^m \sum \overline{xxx}^m - \sum \overline{xx}^m x^{2m}}{4}.$$

4° In eguale maniera, allorchè $m = n = p = q = r$, troveremo, pei n^i 41, 4°; 46, 2°, 3°, 4°, essere

$$\sum \overline{xxxxx}^m = \frac{\sum x^m \sum \overline{xxxx}^m - \sum \overline{xxx}^m x^{2m}}{5},$$

e così di seguito.

48. Data un'equazione algebraica determinata, per esempio la $x^3 - 2x^2 - 5x + 6 = 0$ (n° 42), potremo sempre dedurre da' suoi coefficienti il valor delle somme $\sum \overline{xx}^m$,

Digitized by Google

$\sum \overline{xxx}^m$, ..., servendoci delle formole precedenti. Facciasi per esempio $m = 2$, ne verrà

$$\sum \overline{xx}^2 = \frac{\sum x^2 \sum x^2 - \sum x^4}{2}, \qquad \sum \overline{xxx}^2 = \frac{\sum x^2 \sum \overline{xx}^2 - \sum x^2 x^4}{3}, \ldots,$$

e però dalla posta equazione, avendosi per le (F), (G), (H)

$$\sum x^2 = 14, \quad \sum x^4 = 98, \quad \sum x^2 x^4 = \sum x^2 \sum x^4 - \sum x^6 = 14 \times 98 - 794 = 578,$$

otterremo rapporto ad essa

$$\sum \overline{xx}^2 = \frac{14 \times 14 - 98}{2} = 49; \qquad \sum \overline{xxx}^2 = \frac{14 \times 49 - 578}{3} = 36.$$

49. *Quale sarà il valore della quantità*

$$\sum x^{-k} = \alpha^{-k} + \beta^{-k} + \gamma^{-k} + \delta^{-k} + \cdots = \frac{1}{\alpha^k} + \frac{1}{\beta^k} + \frac{1}{\gamma^k} + \frac{1}{\delta^k} + \cdots ?$$

Col ridurre tutte queste frazioni allo stesso denominatore, poichè si ottiene

$$\sum x^{-k} = \left(\frac{\beta^k \gamma^k \delta^k \cdots + \alpha^k \gamma^k \delta^k \cdots + \alpha^k \beta^k \delta^k \cdots + \alpha^k \beta^k \gamma^k \cdots + \cdots}{\alpha^k \beta^k \gamma^k \delta^k \cdots} \right),$$

se sia V l'ultimo termine dell'equazione data, ed m il suo grado, avremo

$$\sum x^{-k} = \frac{\sum \overline{xxx}^k \cdots}{(\pm V)^k},$$

comprendendosi sotto la $\sum$ nel numeratore un numero $m - 1$ di x, e anteponendo alla V il segno superiore, se m è pari, e l'inferiore, se m è dispari. Ora, mediante il n° 47 trovo il valore di $\sum \overline{xxx}^k \ldots$, dividendo questo adunque per $(\pm V)^k$, tostamente ricavo il valore di $\sum x^{-k}$.

Digitized by Google

CAPO III.

ALTRE PROPRIETÀ GENERALI DELLE EQUAZIONI.

50. *Supposto*

$$Y = x^m + Ax^{m-1} + Bx^{m-2} + Cx^{m-3} + \cdots = f(x),$$

e dato un valore alla x, *se supporremo che questo vada aumentandosi continuatamente, ovvero si accresca di una quantità infinitamente piccola, anche la* Y *si varierà in corrispondenza continuatamente, ossia per un valore infinitesimo.*

Ed infatti: si aumenti la x della quantità z, e chiamiamo V il risultato che ne proviene; avremo perciò

$$f(x+z) = V, \quad \text{e} \quad V = V^{\overset{z}{-}} + z|V$$

(n° 9). Ora per essere $f(x)$, e quindi $f(x+z) = V$ funzione intera, non può la quantità $z|V$ contenere la z che in forma di moltiplicazione; chiamato adunque T l'aggregato dei termini che in $f(x+z)$ moltiplicano la z, e però supposto

$$z|V = zT,$$

avremo

$$V = V^{\overset{z}{-}} + zT,$$

ossia

$$f(x+z) = V^{\overset{z}{-}} + zT.$$

Dovendo ora quest'ultima equazione sempre verificarsi, qualunque siasi la z, sarà vera anche quando $z = 0$; ma per tale supposizione la $V^{\overset{z}{-}}$ non si altera punto (n° 11), la zT scomparisce, e la $f(x+z)$ diviene $f(x)$; dunque otterremo $f(x) = V^{\overset{z}{-}}$, e però $V^{\overset{z}{-}} = Y$; sostituisco questo valore nella

$$f(x+z) = V^{\overset{z}{-}} + zT,$$

e ci verrà

$$f(x+z) = Y + zT.$$

Ciò ritrovato, supponiamo che, attribuito alla x un dato valore, si dia un valore infinitesimo alla z; per tale supposizione la T, non essendo evidentemente che una funzione intera delle x, z, od una costante, non potrà mai acquistare che un valore finito, od infinitesimo [3]; ma chiamata a una quantità finita qualunque, abbiamo

Digitized by Google

$\zeta T : a :: T : \frac{a}{\zeta}$; e frattanto la frazione $\frac{a}{\zeta}$ a cagione del denominatore ζ infinitesimo ha un valore infinito; dunque entro di essa contenendosi la T infinite volte, altrettanto si dovrà contenere la ζT entro della a, e quindi la ζT avrà un valore infinitamente piccolo; ma allorchè in Y aumentiamo la x di ζ, la Y istessa resta appunto aumentata di ζT. Dunque, etc.

51. *Se nella* $Y = f(x)$, *poste successivamente in luogo della* x *due quantità reali* p, q *ne vengano i due risultati* $f(p)$, $f(q)$ *affetti di segno contrario, fra queste* p, q *dovrà sempre esistere una terza quantità reale, la quale collocata in luogo della* x *renderà* $f(x) = 0$, ossia fra le p, q esisterà sempre una radice reale dell'equazione (D).

Supponiamo $p < q$, e sia $f(p) = -P$ quantità negativa, $f(q) = Q$ quantità positiva.

Facciamo, che nella $f(x)$, dopo essersi fatto $x = p$, la x si aumenti continuatamente, ossia per passi infinitesimi sino ad acquistare il valore q, anche la quantità $-P$ anderà perciò variando continuatamente, ossia per passi infinitesimi (n° prec.) fino a cangiarsi nella Q; ma con queste successive variazioni noi passiamo ad un risultato $-P$ negativo ad un altro Q positivo, e vi passiam senza salti. Dunque nella nostra supposizione, non potendo evidentemente una quantità negativa giungere ad esser positiva senza passar per lo zero, ne segue che, tra i valori i quali si hanno al successivo aumentarsi della p, uno ve ne sarà il quale, sostituito in luogo della x, renderà $f(x)=0$, ossia sarà radice della (D), ma questo, è chiaro, che non può essere se non un valore reale. Dunque, etc.

52. *Ponendo nella precedente* $Y = f(x)$ *in luogo della* x *il massimo coefficiente dei termini negativi aumentato di un'unità, il risultato, che quindi nasce, sarà sempre una quantità positiva.*

Nella funzione data possiamo sempre supporre che esistano tutte le potenze della x, dalla m^{esima} fino alla prima ed al termine cognito, introducendo col coefficiente zero quei termini che possono mancare.

Se sia per esempio

$$Y = x^m + Ax^{m-1} - Cx^{m-3} - Ex^{m-5} + Fx^{m-6} + \cdots + V,$$

scriveremo

$$Y = x^m + Ax^{m-1} + 0x^{m-2} - Cx^{m-3} + 0x^{m-4} - Ex^{m-5} + Fx^{m-6} + \cdots + V,$$

e avremo così nella Y tutte le successive potenze m, $m-1$, $m-2$, $m-3$, ...

Chiamiamo ora Nx^n uno qualunque dei suoi termini positivi, $-Px^p$ ne esprima un qualsivoglia dei negativi, e $0x^r$ uno qualunque dei mancanti: avendosi

$$0x^r = Mx^r - Mx^r, \quad Nx^n = (M+N)x^n - Mx^n, \quad \text{e} \quad -Px^p = (M-P)x^p - Mx^p,$$

essendo M un numero qualunque, potremo scrivere queste espressioni in luogo delle altre $0x^r$, Nx^n, $-Px^p$, e così facendo avremo la nostra

$$Y = \begin{cases} x^m + (M+A)x^{m-1} + Mx^{m-2} + (M-C)x^{m-3} - Mx^{m-1} - Mx^{m-2} - Mx^{m-3} \\ \quad + Mx^{m-4} + (M-E)x^{m-5} + \cdots + (M+V) - Mx^{m-4} - Mx^{m-5} - \cdots - M. \end{cases}$$

Digitized by Google

Supponiamo che M ci rappresenti il massimo coefficiente dei termini negativi, e che la somma

$$(M+A)x^{m-1}+Mx^{m-2}+(M-C)x^{m-3}+Mx^{m-4}+\cdots+(M+V)$$

si chiami X. Non potendo mai essere alcuno dei coefficienti $C, E, \ldots > M$, è chiaro che la X non potrà contenere alcun termine negativo, e la Y si ridurrà alla forma

$$X+x^m-M(x^{m-1}+x^{m-2}+x^{m-3}+x^{m-4}+x^{m-5}+\cdots+1),$$

ove sotto le parentesi esistono tutte le successive potenze $m-1$, $m-2$, ..., e la X acquisterà sempre un valor positivo, mentre si faccia $x=$ ad una quantità positiva. Moltiplichiamo per $x-1$ la nostra

$$Y=X+x^m-M(x^{m-1}+x^{m-2}+\cdots+1),$$

otterremo

$$(x-1)Y=(x-1)X+(x-1)x^m-M(x^m-1),$$

e però

$$(x-1)Y=x^m(x-M-1)+M+(x-1)X.$$

Supponiamo $x=M+1$, e chiamiamo rispettivamente P, Q ciò che divengono, per ciò, le quantità X, Y; sostituendo avremo

$$(M+1-1)Q=(M+1)^m(M+1-M-1)+M+(M+1-1)P,$$

e quindi

$$MQ=M(1+P),$$

e finalmente

$$Q=1+P.$$

Ma P non è che una quantità positiva. Dunque, tale essendo anche $Q=1+P$, ne viene che, etc.

53. *Un'equazione algebraica determinata di grado pari, se ha l'ultimo termine negativo, sarà sempre dotata di due radici reali, l'una positiva, e l'altra negativa.*

Essendo

$$x^m+Ax^{m-1}+Bx^{m-2}+\cdots-V=0$$

la supposta equazione, ove m sia numero pari, pongasi nel suo primo membro lo zero in luogo della x: esso diverrà perciò $-V$; che se in luogo della x si ponga il massimo coefficiente M dei termini negativi aumentato di 1, otterremo il risultato $1+P$ quantità sempre positiva (n° prec.). Dunque, avendosi per tali sostituzioni i due risultati $-V$, $1+P$ di segno contrario, pel n° 51 tra lo zero e $P+1$ esister dovrà una quantità reale positiva, la quale renda

$$x^m+Ax^{m-1}+Bx^{m-2}+\cdots-V=0,$$

e sia perciò radice di questa equazione.

2° Scriviamo ora nella data equazione $-x$ in luogo di x. Essendo l'esponente m numero pari, non si cangieranno per ciò nè il primo termine x^m, nè l'ultimo $-V$, e avremo così la nuova equazione

$$x^m-Ax^{m-1}+Bx^{m-2}-Cx^{m-3}+\cdots-V=0,$$

Digitized by Google

le cui radici, cambiatone il segno, altro non sono che le radici della data. Ora replicato il precedente discorso si trova, che la

$$x^m - Ax^{m-1} + Bx^{m-2} - \cdots - V = 0$$

ha una radice reale positiva. Dunque, tale radice cangiata di segno altro non sarà che una radice reale negativa dell'equazione proposta; ma pel dimostrato essa avea già una radice reale positiva. Dunque, etc.

54. *Un'equazione algebraica determinata di grado dispari ha sempre una radice reale positiva, se l'ultimo termine è negativo, e negativa, se l'ultimo termine è positivo.*

1° Supposto m numero dispari, ed

$$x^m + Ax^{m-1} + Bx^{m-2} + \cdots - V = 0$$

l'equazione data, la lettera M ci rappresenti il massimo coefficiente dei suoi termini negativi; vedremo agevolmente, come nel n° prec., che tale equazione ha sempre una radice reale posta tra lo zero e la quantità $P + 1$: essa dunque sarà sempre dotata di una radice reale positiva.

2° Restando m numero dispari, sia ora

$$x^m + Ax^{m-1} + Bx^{m-2} + Cx^{m-3} + \cdots + V = 0$$

l'equazione data. Posta $-x$ in luogo di x, avremo

$$-x^m + Ax^{m-1} - Bx^{m-2} + Cx^{m-3} - \cdots + V = 0,$$

e però

$$x^m - Ax^{m-1} + Bx^{m-2} - Cx^{m-3} + \cdots - V = 0.$$

Ma quest'ultima equazione, a cagione dell'ultimo termine $-V$ negativo, ha una radice reale positiva, e le radici positive di questa altro non sono, cambiate di segno, che tante radici negative della data (n° prec., 2°). Dunque in questo caso la data avrà necessariamente una radice reale negativa. Dunque, etc.

55. *Se un'equazione pertanto algebraica determinata ha tutte le sue radici immaginarie, essa dovrà ascendere ad un grado pari, ed avere l'ultimo termine positivo*, onde sarà della forma

$$x^m + Ax^{m-1} + Bx^{m-2} + \cdots + V = 0$$

con l'esponente m numero pari. Ora pel n° 24 abbiamo la nostra $V =$ al prodotto di tutte le radici prese col suo proprio segno. Dunque, essendo essa V positiva, ne viene che *in un equazione, la quale abbia tutte le sue radici immaginarie, sarà positivo anche il prodotto delle radici medesime.*

56. *In un'equazione algebraica determinata qualunque, il numero delle radici immaginarie è sempre pari.*

Siano le n radici μ, ν, π, ... della data (D) tutte immaginarie, e siano le altre $m - n$ radici α, β, γ, ... tutte reali. Suppongasi

$$(x-\mu)(x-\nu)(x-\pi)\cdots = x^n + fx^{n-1} + gx^{n-2} + \cdots,$$
$$(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)\cdots = x^{m-n} + ax^{m-n-1} + bx^{m-n-2} + \cdots,$$

e però

$$(x^n + fx^{n-1} + gx^{n-2} + \cdots)(x^{m-n} + ax^{m-n-1} + bx^{m-n-2} + \cdots) = x^m + Ax^{m-1} + Bx^{m-2} + \cdots.$$

Digitized by Google

È chiaro che potremo quindi risolvere l'equazione data nelle due

$$x^n + fx^{n-1} + gx^{n-2} + \cdots = 0, \qquad x^{m-n} + ax^{m-n-1} + bx^{m-n-2} + \cdots = 0,$$

la prima delle quali conterrà tutte le radici immaginarie della proposta, e la seconda tutte le reali. Ora tutti i coefficienti della

$$x^{m-n} + ax^{m-n-1} + bx^{m-n-2} + \cdots = 0$$

non ponno evidentemente che essere tante quantità reali; dunque saranno anche reali tutti i coefficienti della

$$x^n + fx^{n-1} + gx^{n-2} + \cdots = 0;$$

e quindi pel n° prec. l'esponente n di questa equazione dovrà essere un numero pari; ma n ci esprime il numero di tutte le radici immaginarie μ, ν, π, ... della (D). Dunque, etc.

57. Supponiamo il grado dell'equazione data, ossia l'esponente m, numero dispari; a cagione di n numero pari (n° prec.) $m - n$ sarà dispari, e dispari per conseguenza sarà il numero delle radici reali α, β, γ, ... Supponiamo inoltre, che fra queste radici reali α, β, γ, ... ne esistano delle uguali fra loro; in tale supposizione è chiaro che, o queste stesse saranno di numero dispari o, se non esse, tali saranno le altre disuguali fra loro.

58. *Nelle equazioni di grado dispari aventi l'ultimo termine negativo, sarà necessariamente dispari anche il numero delle sue radici reali positive.*

Supposta l'equazione del 1° caso del n° 54, avendosi in essa l'ultimo termine $-V$ negativo, ed occupando questo un luogo pari, per esser dispari l'esponente m, è manifesto dal n° 24 che il prodotto di tutte le radici della supposta equazione dovrà essere positivo: ora ritenendo che α, β, γ, ... ci esprimano le radici reali, e μ, ν, π, ... le immaginarie, il prodotto $\mu\nu\pi\ldots$ è sempre positivo (n° 55); dunque, acciocchè sia positivo il prodotto totale $\alpha\beta\gamma\ldots\mu\nu\pi\ldots$, dovrà essere positivo anche il prodotto delle radici reali $\alpha\beta\gamma\ldots$; ma affinchè questo succeda, il numero delle radici reali negative non può, che esser pari. Dunque il numero totale delle radici reali essendo dispari (n° 57), ne segue che fra queste sarà dispari ancora il numero delle radici reali positive.

59. *Nel primo membro di un'equazione, ove tutte le radici siano immaginarie, se pongasi in luogo dell'incognita una quantità reale qualunque, il risultato che ne viene sarà sempre positivo.*

Sia data l'equazione

$$x^n + fx^{n-1} + gx^{n-2} + \cdots = 0$$

del n° 56, di cui le radici μ, ν, π, ... sono tutte immaginarie; pongasi nel suo primo membro invece della x una quantità reale p; il risultato

$$p^n + fp^{n-1} + gp^{n-2} + \cdots$$

io dico che dovrà sempre essere positivo. Difatti, se si volesse mai negativo, giacchè, ponendo in

$$x^n + fx^{n-1} + gx^{n-2} + \cdots$$

in luogo dell'incognita il massimo coefficiente dei termini negativi aumentato di un'unità,

Digitized by Google

se ne ottiene sempre un risultato positivo (n° 52), tra questo coefficiente così accresciuto e la supposta quantità p, esister dovrebbe pel n° 51 una radice reale della data

$$x^n + fx^{n-1} + gx^{n-2} + \cdots = 0;$$

ma ciò è contro la supposizione. Dunque, etc.

Che se la supposta equazione non avesse alcun termine negativo, col porre allora in luogo della x un qualche numero positivo, la quantità

$$x^n + fx^{n-1} + gx^{n-2} + \cdots$$

non potendo mai diventare che positiva, verremo evidentemente alla medesima conseguenza di prima. Avendosi dunque

$$x^n + fx^{n-1} + gx^{n-2} + \cdots = (x-\mu)(x-\nu)(x-\pi)\ldots$$

(n° 56), ne viene che sarà

$$p^n + fp^{n-1} + gp^{n-2} + \cdots = (p-\mu)(p-\nu)(p-\pi)\ldots$$

quantità sempre positiva.

60. *Ritenendo come sopra*

$$Y = x^m + Ax^{m-1} + Bx^{m-2} + Cx^{m-3} + \cdots + Tx + V$$
$$= (x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)\ldots(x-\mu)(x-\nu)(x-\pi)\ldots,$$

se moltiplicheremo ciascun termine della Y pel proprio esponente, diminuiremo ciascun esponente di un'unità, e porremo in luogo di x la radice α; *il risultato che nasce,*

$$m\alpha^{m-1} + (m-1)A\alpha^{m-2} + (m-2)B\alpha^{m-3} + (m-3)C\alpha^{m-4} + \cdots + T,$$

sarà uguale al prodotto

$$(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)(\alpha-\delta)\ldots(\alpha-\mu)(\alpha-\nu)(\alpha-\pi)\ldots.$$

Ed infatti: dividiamo la quantità Y pel binomio $x-\alpha$, pel n° 33 otterremo il quoto

$$x^{m-1} + (\alpha+A)x^{m-2} + (\alpha^2+A\alpha+B)x^{m-3} + (\alpha^3+A\alpha^2+B\alpha+C)x^{m-4} + \cdots$$
$$\cdots + (\alpha^{m-1} + A\alpha^{m-2} + \cdots + T) = (x-\beta)(x-\gamma)(x-\delta)\ldots(x-\mu)(x-\nu)(x-\pi)\ldots,$$

e posta quivi la α in luogo della x, ne verrà

$$\alpha^{m-1} + (\alpha+A)\alpha^{m-2} + (\alpha^2+A\alpha+B)\alpha^{m-3} + (\alpha^3+A\alpha^2+B\alpha+C)\alpha^{m-4} + \cdots$$
$$\cdots + (\alpha^{m-1} + A\alpha^{m-2} + \cdots + T) = (\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)(\alpha-\delta)\ldots(\alpha-\mu)(\alpha-\nu)(\alpha-\pi)\ldots.$$

Ora è facile a vedersi che abbiamo

$$\alpha^{m-1} + (\alpha+A)\alpha^{m-2} + (\alpha^2+A\alpha+B)\alpha^{m-3} + (\alpha^3+A\alpha^2+B\alpha+C)\alpha^{m-4} + \cdots$$
$$\cdots + (\alpha^{m-1} + A\alpha^{m-2} + \cdots + T) = (\alpha^{m-1} + \alpha^{m-1} + \alpha^{m-1} + \alpha^{m-1} + \cdots + \alpha^{m-1})$$
$$+ A(\alpha^{m-2} + \alpha^{m-2} + \alpha^{m-2} + \cdots + \alpha^{m-2}) + B(\alpha^{m-3} + \alpha^{m-3} + \cdots + \alpha^{m-3})$$
$$+ C(\alpha^{m-4} + \cdots + \alpha^{m-4}) + \cdots + T,$$

ove i termini contenuti nella prima parentesi del 2° membro sono in numero m, quei della seconda in numero $m-1$, quei della terza in numero $m-2$, e così via discorrendo. Dunque, con l'unire insieme tali termini, risultando

$$\alpha^{m-1} + (\alpha+A)\alpha^{m-2} + \cdots = m\alpha^{m-1} + (m-1)A\alpha^{m-2} + (m-2)B\alpha^{m-3} + (m-3)C\alpha^{m-4} + \cdots + T,$$

Digitized by Google

ne segue evidentemente, che sarà

$$m\alpha^{m-1} + (m-1)A\alpha^{m-2} + (m-2)B\alpha^{m-3} + (m-3)C\alpha^{m-4} + \cdots + T$$
$$= (\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)(\alpha-\delta)\ldots(\alpha-\mu)(\alpha-\nu)(\alpha-\pi)\ldots \quad \text{C. D. D.}$$

61. Ponendo nel n° prec. in luogo della α la β, la γ, la δ, etc., troveremo in egual modo essere

$$m\beta^{m-1} + (m-1)A\beta^{m-2} + (m-2)B\beta^{m-3} + (m-3)C\beta^{m-4} + \cdots + T$$
$$= (\beta-\alpha)(\beta-\gamma)(\beta-\delta)\ldots(\beta-\mu)(\beta-\nu)(\beta-\pi)\ldots,$$

$$m\gamma^{m-1} + (m-1)A\gamma^{m-2} + (m-2)B\gamma^{m-3} + (m-3)C\gamma^{m-4} + \cdots + T$$
$$= (\gamma-\alpha)(\gamma-\beta)(\gamma-\delta)\ldots(\gamma-\mu)(\gamma-\nu)(\gamma-\pi)\ldots$$

. . . . . .

Ritenendo poscia, come al n° 56, che le α, β, γ, δ, ... esprimano tutte le radici reali, e le μ, ν, π, ... tutte le immaginarie della nostra $Y = 0$, se supporremo per brevità di scrivere

$$(\alpha-\mu)(\alpha-\nu)(\alpha-\pi)\cdots = X',$$
$$(\beta-\mu)(\beta-\nu)(\beta-\pi)\cdots = X'',$$
$$(\gamma-\mu)(\gamma-\nu)(\gamma-\pi)\cdots = X''',$$
. . . . . .

poichè le α, β, γ, ... non sono che tante quantità reali, *tutte queste* X', X'', X''', ... *pel* n° 59 *saranno altrettante quantità positive.*

62. *Posta la quantità*

$$Z = mx^{m-1} + (m-1)Ax^{m-2} + (m-2)Bx^{m-3} + (m-3)Cx^{m-4} + \cdots + T,$$

se porremo in essa successivamente in luogo della x le radici reali α, β, γ, δ, ... *secondo l'ordine della loro grandezza, il primo risultato sarà positivo, il secondo negativo, il terzo positivo, il quarto negativo, e così di seguito.*

Sia $\alpha > \beta$, $\beta > \gamma$, $\gamma > \delta$, ..., avendosi perciò le quantità $\alpha-\beta$, $\alpha-\gamma$, $\alpha-\delta$, ..., e la X' pel n° prec. tutte positive, il loro prodotto

$$(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)(\alpha-\delta)\ldots X'$$

sarà esso pur positivo. Poichè $\beta < \alpha$, e $\beta > \gamma$, $\beta > \delta$, ..., avremo $\beta - \alpha$ quantità negativa, e positive tutte le altre

$$\beta-\gamma, \quad \beta-\delta, \ldots, X''$$

(n° prec.); onde il prodotto

$$(\beta-\alpha)(\beta-\gamma)(\beta-\delta)\ldots X''$$

risulterà negativo. Nel modo medesimo trovandosi i due fattori $\gamma-\alpha$, $\gamma-\beta$ negativi, e gli altri tutti $\gamma-\delta$, ..., X''' positivi (n° prec.), dovrà essere positivo il prodotto

$$(\gamma-\alpha)(\gamma-\beta)(\gamma-\delta)\ldots X'''.$$

Troveremo in simil guisa negativo il prodotto

$$(\delta-\alpha)(\delta-\beta)(\delta-\gamma)\ldots X^{IV},$$

Digitized by Google

e così in progresso. Ora questi successivi prodotti uguagliano rispettivamente le quantità

$$m\alpha^{m-1} + (m-1)A\alpha^{m-2} + (m-2)B\alpha^{m-3} + (m-3)C\alpha^{m-4} + \cdots + T,$$
$$m\beta^{m-1} + (m-1)A\beta^{m-2} + (m-2)B\beta^{m-3} + (m-3)C\beta^{m-4} + \cdots + T,$$
$$m\gamma^{m-1} + (m-1)A\gamma^{m-2} + (m-2)B\gamma^{m-3} + (m-3)C\gamma^{m-4} + \cdots + T,$$
$$m\delta^{m-1} + (m-1)A\delta^{m-2} + (m-2)B\delta^{m-3} + (m-3)C\delta^{m-4} + \cdots + T,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

(n^i prec.), e tali quantità altro non sono se non ciò che diventa la supposta Z col sostituire in essa le radici reali α, β, γ, δ, ... invece della x. Dunque, etc.

I segni pertanto dei nostri risultati si proseguiranno con l'ordine seguente $+$, $-$, $+$, $-$, $+$, $-$, etc.

Sia per esempio

$$Y = x^5 - 2x^4 - 15x^3 + 20x^2 + 44x - 48,$$

e però

$$Z = 5x^4 - 8x^3 - 45x^2 + 40x + 44.$$

Essendo 4, 2, 1, — 2, — 3 le radici della $Y = 0$ scritte secondo l'ordine della loro grandezza, le sostituisco successivamente nella Z, e otterremo, secondo ciò che è stato dimostrato, le quantità alternantisi di segno $+$ 252, — 40, $+$ 36, — 72, $+$ 140.

63. *Moltiplicato ciascun termine della*

$$Y = x^m + Ax^{m-1} + Bx^{m-2} + Cx^{m-3} + \cdots$$

per ciascun termine corrispondente della serie aritmetica

$$a, \quad a - b, \quad a - 2b, \quad a - 3b, \ldots,$$

e posto il risultato

$$ax^m + (a-b)Ax^{m-1} + (a-2b)Bx^{m-2} + (a-3b)Cx^{m-3} + \cdots = R,$$

avremo

$$R = (a - mb)Y + bxZ.$$

Si moltiplichi la Y per m, la Z per x, e sottraggasi il secondo risultato

$$xZ = mx^m + (m-1)Ax^{m-1} + (m-2)Bx^{m-2} + (m-3)Cx^{m-3} + \cdots$$

dal primo

$$mY = mx^m + mAx^{m-1} + mBx^{m-2} + mCx^{m-3} + \cdots;$$

otterremo

$$mY - xZ = Ax^{m-1} + 2Bx^{m-2} + 3Cx^{m-3} + \cdots.$$

Ora abbiamo

$$R = ax^m + (a-b)Ax^{m-1} + (a-2b)Bx^{m-2} + (a-3b)Cx^{m-3} + \cdots$$
$$= a(x^m + Ax^{m-1} + Bx^{m-2} + Cx^{m-3} + \cdots) - b(Ax^{m-1} + 2Bx^{m-2} + 3Cx^{m-3} + \cdots).$$

Dunque, sostituendo sarà

$$R = aY - b(mY - xZ),$$

e però

$$R = (a - mb)Y + bxZ.$$

64. Siano di numero p le radici reali positive della $Y = 0$, di numero q le reali

Digitized by Google

negative, e supponiamo di porre successivamente secondo l'ordine della loro grandezza tutte queste $p + q$ radici in luogo di x nella funzione

$$R = (a - mb)Y + bxZ;$$

per ciascuna di tali sostituzioni dovendo divenir $Y = 0$, in R non resterà mai che la parte bxZ. Ora i successivi valori di Z devono risultare affetti dei segni $+$, $-$, $+$, $-$, $+$, $-$, $\cdots$ (n° 62); dunque anche i successivi valori di bxZ, e però di R dovranno seguire lo stesso andamento, finchè sostituisconsi le p radici reali positive; ma nella sostituzione delle q radici reali negative, cangiandosi x in $-x$, è chiaro che i risultati provenienti dalla funzione bxZ dovranno essere di segno contrario a quelli che provengono dalla Z. Mentre adunque si passa dalla sostituzione dell'ultima delle p radici reali positive alla sostituzione della prima delle q radici negative, cangiando di segno i risultati della Z (n° 62), i due risultati corrispondenti della bxZ, e però della R, dovranno evidentemente conservarsi del segno medesimo, alternandosi poi nella sostituzione delle altre radici.

Suppongasi per esempio $a = 7$, $b = 2$, onde moltiplicata la precedente

$$Y = x^5 - 2x^4 - 15x^3 + 20x^2 + 44x - 48$$

per la serie

$$7,\ 5,\ 3,\ 1,\ -1,\ -3$$

termine per termine, si ottenga

$$R = 7x^5 - 10x^4 - 45x^3 + 20x^2 - 44x + 144;$$

faccio successivamente

$$x = 4,\ 2,\ 1,\ -2,\ -3$$

(n° 62), e ottenendosi in corrispondenza

$$R = +2016,\ -160,\ +72,\ +288,\ -840,$$

si vede che abbiamo in realtà due risultati $+72$, $+288$, che si succedono con segno uguale, e ciò mentre suppongasi $x = 1$, $x = -2$; in tutti poi gli altri casi i segni non fanno che alternarsi.

65. Avendosi dalla R pel n° prec. p risultati alternantisi successivamente nei segni per la successiva sostituzione delle p radici reali positive della $Y = 0$ (n° 62) in luogo della x, dovranno pel n° 51 tra queste p radici esistere almeno $p - 1$ radici reali positive della equazione $R = 0$; così dovranno per ugual ragione esistere per lo meno $q - 1$ radici reali negative della $R = 0$ fra le q radici reali negative della $Y = 0$; non risultando poi alcuna alternazione di segni per la sostituzione dell'ultima delle p radici positive, e della prima delle q negative (n° prec.), non potremo asserire che siavi alcuna radice reale della $R = 0$ tra queste due ora accennate radici della $Y = 0$.

Così la precedente

$$R = 7x^5 - 10x^4 - 45x^3 + 20x^2 - 44x + 144 = 0$$

avrà sicuramente due radici reali positive fra i tre numeri 4, 2, 1, ed una negativa fra i due -2, -3; ma tra i due numeri 1, -2 dir non possiamo che ne abbia alcuna.

Digitized by Google

66. *L'equazione* $Y = 0$ *non potrà avere che una radice reale positiva, ed una reale negativa più del numero delle radici reali positive e delle negative della* $R = 0$.

Siano di numero r le radici reali positive della $R = 0$; io dico che la $Y = 0$ non ne potrà avere che un numero $r + 1$, poichè se ne avesse $r + 1 + t$, dal n° prec. si vede che la $R = 0$ ne dovrebbe avere un numero $r + t$, contro la supposizione. Egualmente si dimostra che, se la $R = 0$ ha un numero s di radici reali negative, la $Y = 0$ non ne può avere che $s + 1$.

67. Si moltiplichi la $R = 0$ per un'altra serie aritmetica simile alla precedente, e chiamata $R' = 0$ la nuova equazione che risulta, se questa ha un numero r' di radici reali positive, la $R = 0$ pel n° prec. non ne potrà avere che $r' + 1$; ma la $Y = 0$ non può avere che una radice reale positiva più della $R = 0$ (n° prec.). Dunque le radici reali positive della $Y = 0$ non potranno essere in un numero maggiore di $r' + 2$. In simil guisa trovasi che se s' ci esprime il numero delle radici reali negative della $R' = 0$, tali radici nella $Y = 0$ non potranno esser più di $s' + 2$.

Moltiplicando la $R' = 0$ per una terza serie, e chiamata $R'' = 0$ l'equazione che ne viene, se r'' ci rappresenta il numero delle sue radici reali positive, ed s'' il numero delle negative, è facile il vedere con un raziocinio uguale al precedente, che la $Y = 0$ non potrà perciò avere più di $r'' + 3$ radici reali positive, nè più di $s'' + 3$ radici reali negative.

Proseguendo così a moltiplicare per nuove serie aritmetiche, se si ritrovino 3, 4, 5, ..., μ di tali equazioni $R = 0$, $R' = 0$, $R'' = 0$, ..., e se ρ esprima il numero delle radici reali positive dell'ultima di queste, le radici reali positive della data $Y = 0$ non potranno essere in numero maggiore di $\rho + 3$, $\rho + 4$, $\rho + 5$, ..., $\rho + \mu$. Nella istessa maniera troveremo, che, contenendo l'ultima equazione σ radici reali negative, la data $Y = 0$ non può contenerne più di $\sigma + 3$, $\sigma + 4$, $\sigma + 5$, ..., $\sigma + \mu$.

68. In un'equazione algebraica chiamo VARIAZIONE *il cangiamento di segno che succede passando da un termine positivo ad un negativo, o da un negativo ad un positivo; e la costanza dei segni, allorchè si passa da un termine positivo ad un positivo, o da un negativo ad un negativo, la chiamo* PERMANENZA.

69. Moltiplicando nell'esposta maniera (n° 63) il primo membro dell'equazione $Y=0$ pei termini della serie a, $a - b$, $a - 2b$, $a - 3b$, ..., se questi saranno tutti positivi, i termini della $Y = 0$ si conserveranno tutti evidentemente del medesimo segno, e se i termini della serie saran tutti negativi, i termini della $Y = 0$ cambieran tutti di segno nel tempo medesimo; onde, e nell'un caso e nell'altro, le variazioni e le permanenze resteranno nell'equazione che risulta dello stesso numero di quelle della $Y=0$; ma se la serie passi da' termini positivi a' negativi, corrispondentemente ai due termini ove si fa questo passaggio è chiaro che, moltiplicando nel modo supposto, si toglierà in Y una variazione od una permanenza.

Supposto $a = 12$, $b = 2$, moltiplichiamo la precedente

$$Y = x^5 - 2x^4 - 15x^3 + 20x^2 + 44x - 48$$

per la serie 12, 10, 8, 6, 4, 2; ne verrà il risultato

Digitized by Google

$$12x^5 - 20x^4 - 120x^3 + 120x^2 + 176x - 96;$$

fatto poscia $a = -1$, $b = 2$, moltiplichiamo la stessa Y per la serie

$$-1, \quad -3, \quad -5, \quad -7, \quad -9, \quad -11;$$

otterremo così la quantità $-x^5 + 6x^4 + 75x^3 - 140x^2 - 396x + 528$; e sì nell'uno che nell'altro di questi risultati il numero delle variazioni e delle permanenze è lo stesso, come nella Y. Ma se facciasi $a = 5$, $b = 2$, e si moltiplichi per la serie

$$5, \quad 3, \quad 1, \quad -1, \quad -3, \quad -5,$$

poichè ne viene

$$5x^5 - 6x^4 - 15x^3 - 20x^2 - 132x + 240,$$

vedesi che i due termini $-15x^3 + 20x^2$ moltiplicati corrispondentemente pei due 1, -1, divenendo $-15x^3 - 20x^2$, cangiano la loro variazione in una permanenza; e nel n° 64, ove, supposto $a = 7$, $b = 2$, dalla stessa Y ne è derivata la

$$7x^5 - 10x^4 - 45x^3 + 20x^2 - 44x + 144,$$

la permanenza dei due termini $+20x^2 + 44x$ si è mutata per la moltiplicazione dei numeri 1, -1 nella variazione $+20x^2 - 44x$.

70. Quindi, moltiplicando per la nostra serie a, $a - b$, $a - 2b$, $a - 3b$, ..., il primo membro di una data equazione, potremo sempre ridurre una qualunque sua variazione ad una permanenza, e viceversa, coll'attribuire ad a ed a b gli opportuni valori. Negli ultimi due casi dell'esempio precedente fatto $b = 2$, abbiam tolta nella Y la variazione fra i due termini terzo e quarto col supporre $a = 5$, e abbiam cambiata la permanenza del quarto al quinto termine col fare $a = 7$. Tal cambiamento poi non potendo succedere che mentre dal termine positivo $+1$ si passa nella serie al negativo -1, vedesi che le variazioni e permanenze corrispondenti agli altri termini devonsi tutte conservar come prima.

71. Abbiasi nell'equazione $Y = 0$ (n° 60) un numero μ di variazioni; supposto costantemente $b = 2$, si moltiplichi questa per la serie a, $a - 2$, $a - 4$, $a - 6$, ..., e, con l'attribuire ad a l'opportuno valore, si tolga la prima variazione; l'equazione risultante, che conterrà una variazione di meno, si moltiplichi di nuovo per la data serie, onde distruggere la seconda variazione; se così proseguiremo a fare, potremo ottenere un numero μ di equazioni oltre la $Y = 0$, nell'ultima delle quali più non esisteran variazioni.

Facendo $a = 1$, moltiplichiamo la nostra

$$Y = x^5 - 2x^4 - 15x^3 + 20x^2 + 44x - 48 = 0$$

per la serie

$$1, \quad -1, \quad -3, \quad -5, \quad -7, \quad -9, \quad \ldots;$$

ne verrà l'equazione

$$x^5 + 2x^4 + 45x^3 - 100x^2 - 308x + 432 = 0,$$

in cui manca la variazione tra i primi due termini. Moltiplico questa, fatto $a = 5$, per la serie 5, 3, 1, -1, -3, -5, e ci risulta

$$5x^5 + 6x^4 + 45x^3 + 100x^2 + 924x - 2160 = 0,$$

Digitized by Google

equazione che non ha più variazione fra il terzo e il quarto termine. Supposto finalmente $a = 9$, moltiplico per la serie 9, 7, 5, 3, 1, — 1, e risultandoci

$$45x^5 + 42x^4 + 225x^3 + 300x^2 + 924x + 2160 = 0,$$

siamo giunti così ad un equazione ove più non esiste alcuna variazione; e frattanto tante sono le equazioni ottenute, quante erano le variazioni nella supposta $Y = 0$.

72. *Una qualunque equazione algebraica determinata non può avere giammai più radici reali positive, di quel che siano le sue variazioni.*

Ritenute le supposizioni ed eseguite le successive operazioni del n° prec., se ρ esprima il numero delle radici reali positive dell'ultima equazione risultata, l'equazione data $Y = 0$ pel n° 67 non ne potrà avere più di $\mu + \rho$. Ora quest'ultima equazione non contenendo alcuna variazione ha tutti i suoi termini positivi (n° 71). Dunque, non potendo essa avere evidentemente alcuna radice reale positiva, ne segue che sarà $\rho = 0$, e per conseguenza avendosi $\mu + \rho = \mu + 0 = \mu$, la $Y = 0$ non potrà avere più di μ radici reali positive, ossia più radici reali positive di quel che siano le sue variazioni.

La precedente equazione

$$x^5 - 2x^4 - 15x^3 + 20x^2 + 44x - 48 = 0,$$

avendo tre variazioni, non potrà avere più di tre radici reali positive.

73. In modo somigliante togliendo pel n° 70 dalla $Y = 0$ tutte le permanenze, e giungendo ad una equazione finale dotata di sole variazioni, e quindi di niuna radice reale negativa, si dimostra che: *essa* $Y = 0$ *non può avere più radici reali negative di quel che siano le sue permanenze.*

Moltiplico la nostra solita equazione per la serie 3, 1, — 1, — 3, — 5, — 7, e avuto il risultato

$$3x^5 - 2x^4 + 15x^3 - 60x^2 - 220x + 336 = 0,$$

moltiplico questo nuovamente per la serie 7, 5, 3, 1, — 1, — 3; avendosi quindi

$$21x^5 - 10x^4 + 45x^3 - 60x^2 + 220x - 1008 = 0,$$

siamo giunti ad un'equazione in cui non esistono che delle variazioni; ma questa, è chiaro, che non può avere alcuna radice reale negativa. Dunque la data

$$x^5 - 2x^4 - \cdots = 0$$

pel n° 67 non potrà avere più di $2 + 0 = 2$ radici reali negative, e perciò più di quel che siano le sue permanenze.

74. Poichè supposto in $Y = 0$ μ il numero delle variazioni, e perciò $m - \mu$ il numero delle permanenze, non può il numero delle radici reali positive oltrepassare μ, e quello delle reali negative oltrepassare $m - \mu$; *se supporremo in questa equazione reali tutte le m radici, è evidente che in questo caso le radici reali positive saranno tante, precisamente, quante sono le* μ *variazioni, e le radici reali negative, quante sono le* $m - \mu$ *permanenze.*

Digitized by Google

CAPO IV.

DELLE TRASFORMAZIONI IN PARTICOLARE.

75. *Trasformare un'equazione altro non significa, se non determinarne un'altra, le radici della quale abbiano una qualche relazione con le radici della data.*

76. *Vogliasi trasformare la*

$$(D) \qquad x^m + Ax^{m-1} + Bx^{m-2} + \cdots = 0$$

in un'altra equazione, le radici della quale eguaglino le radici della data diminuite di una quantità p.

Chiamata y l'incognita della nuova equazione, avremo $y=x-p$, e però $x=y+p$. Sostituisco nella data in luogo di x il valore $y+p$, e l'equazione in y, che ne risulta, sarà la richiesta. Istituito il calcolo, la trasformata sarà

$$y^m + (mp + A)y^{m-1} + \left[\frac{m(m-1)}{2}p^2 + (m-1)Ap + B\right]y^{m-2} + \cdots = 0.$$

Se la data sia per esempio l'equazione

$$x^4 + 2x^3 - 17x^2 - 18x + 72 = 0,$$

e vogliasi $p = 4$, fatto $x = y + 4$ e sostituito, otterremo la trasformata

$$y^4 + 18y^3 + 103y^2 + 198y + 112 = 0,$$

di cui le radici uguaglieranno quelle della proposta diminuite di 4: e difatti le radici della prima essendo i numeri 3, 2, — 3, — 4, quelle della seconda sono i numeri

$$-1 = 3 - 4, \quad -2 = 2 - 4, \quad -7 = -3 - 4, \quad -8 = -4 - 4.$$

77. Se al contrario le radici della trasformata volessersi maggiori di quelle della data della quantità p, supposto in allora $y = x + p$, e però $x = y - p$, sostituirei, come precedentemente, in luogo della x la quantità $y - p$.

78. *L'accennata trasformazione potrà sempre servire, onde togliere dalla trasformata un suo termine qualsivoglia a riserva del primo,* e ciò col solo attribuire alla p un valore opportuno. Infatti, se si supponga la p tale che risulti $mp + A = 0$, in allora è chiaro che dalla trasformata scomparirà il secondo termine. Se alla p attribuiscasi un valore capace di rendere

$$\frac{m(m-1)}{2}p^2 + (m-1)Ap + B = 0,$$

Digitized by Google

in tale supposizione scomparirà il terzo termine, e così di seguito. Frattanto riflettasi, che i valori opportuni da attribuirsi alla p ricavansi dalle equazioni corrispondenti

$$mp + A = 0, \qquad \frac{m(m-1)}{2}p^2 + (m-1)Ap + B = 0, \quad \ldots,$$

e che perciò alla eliminazione del secondo termine basta risolvere un'equazione di primo grado; ma per la eliminazione del terzo bisogna risolverne una del grado secondo; per quella del quarto termine conviene scioglierne una del terzo; e finalmente, per fare svanire l'ultimo termine, fa d'uopo sciogliere un'equazione in p del grado m affatto simile alla proposta, come facilmente vedremo dalla trasformata medesima, che accenneremo fra poco.

79. Poichè dalla $mp + A = 0$ ritraesi $p = -\frac{A}{m}$, ne viene che, *se porremo nella* (D) *in luogo della* x *la quantità* $y - \frac{A}{m}$, *otterremo una trasformata la quale sarà mancante del secondo termine.*

Sia per esempio

$$x^3 + 12x^2 - 5x + 13 = 0$$

l'equazione data. Suppongo

$$x = y - \tfrac{12}{3} = y - 4,$$

sostituisco, e ci verrà la trasformata

$$y^3 - 53y + 161 = 0$$

priva del secondo termine.

80. *Determinare una maniera facile e spedita di eseguire la precedente trasformazione.*

Poichè abbiamo $x = p + y$, ne verrà

$$x^m = (p+y)^m = p^m + mp^{m-1}y + \frac{m(m-1)}{2}p^{m-2}y^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{2.3}p^{m-3}y^3 + \frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{2.3.4}p^{m-4}y^4 + \cdots$$

$$Ax^{m-1} = A(p+y)^{m-1} = Ap^{m-1} + (m-1)Ap^{m-2}y + \frac{(m-1)(m-2)}{2}Ap^{m-3}y^2 + \frac{(m-1)(m-2)(m-3)}{2.3}Ap^{m-4}y^3 + \cdots$$

$$Bx^{m-2} = B(p+y)^{m-2} = Bp^{m-2} + (m-2)Bp^{m-3}y + \frac{(m-2)(m-3)}{2}Bp^{m-4}y^2 + \cdots$$

$$Cx^{m-3} = C(p+y)^{m-3} = Cp^{m-3} + (m-3)Cp^{m-4}y + \cdots$$

$$Dx^{m-4} = D(p+y)^{m-4} = Dp^{m-4} + \cdots$$

. . . . . .

Dunque, sommando tutte queste equazioni in colonna, giacchè ne viene

$$x^m + Ax^{m-1} + Bx^{m-2} + \cdots = 0,$$

Digitized by Google

dovrà anch'essere

$$\left.\begin{array}{l}(p^m + Ap^{m-1} + Bp^{m-2} + Cp^{m-3} + Dp^{m-4} + \cdots)\\ + [mp^{m-1} + (m-1)Ap^{m-2} + (m-2)Bp^{m-3} + (m-3)Cp^{m-4} + \cdots]y\\ + \left[\frac{m(m-1)}{2}p^{m-2} + \frac{(m-1)(m-2)}{2}Ap^{m-3} + \frac{(m-2)(m-3)}{2}Bp^{m-4} + \cdots\right]y^2\\ + \left[\frac{m(m-1)(m-2)}{2.3}p^{m-3} + \frac{(m-1)(m-2)(m-3)}{2.3}Ap^{m-4} + \cdots\right]y^3\\ + \left[\frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{2.3.4}p^{m-4} + \cdots\right]y^4\\ + \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\end{array}\right\} = 0$$

e questa non sarà che la trasformata. Ora, dalla semplice ispezione di tale equazione, si vede:

1° *che la sua quantità cognita, ossia l'ultimo suo termine scritto in primo luogo, altro non è che il primo membro dell'equazione data, sostituita la p invece della x;*

2° *che il coefficiente del penultimo termine, posto in secondo luogo, uguaglia l'ultimo, tutti i termini del quale siano stati moltiplicati pel proprio esponente e divisi per p;*

3° *che il coefficiente dell'antepenultimo termine uguaglia il coefficiente del penultimo, di cui tutti i termini siano stati moltiplicati pel proprio esponente e divisi per 2p;*

4° *che il coefficiente del termine anteriore all'antepenultimo altro non è che il coefficiente dell'antepenultimo, tutti i cui termini siano stati moltiplicati per gli esponenti rispettivi e divisi per 3p;* e così di seguito. Nei termini adunque di questa trasformata abbiamo un andamento costante, per mezzo del quale potremo speditamente formare una simile equazione, senza eseguire le sostituzioni del n° 76; e difatti:

Nel primo membro dell'equazione data, posta la p in luogo della x, scrivasi questo risultato in una riga. Ciascun termine di questa prima riga si moltiplichi in seguito pel propio esponente, si divida per p, e ciò che ne viene pongasi in una seconda riga. Si moltiplichi poscia ciascun termine della seconda riga pel proprio esponente, dividasi per $2p$, e scrivasi in una terza riga quel che risulta. Tutti i termini di questa terza riga si moltiplichino pei rispettivi esponenti, si dividano per $3p$, e si collochino in una quarta, e si prosegua in tal modo, finchè si giunga ad un risultato uguale allo zero. Uniscansi allora tutte queste righe insieme, dopo aver moltiplicata la seconda per y, la terza per y^2, la quarta per y^3, e così di seguito, e quella, che così ne proviene, sarà l'equazione cercata.

Vogliasi per esempio trasformare la

$$x^4 - 2x^3 - 13x^2 + 14x + 24 = 0$$

in un'altra equazione, di cui le radici superino quelle della data del numero 4. Supposto perciò $x = y - 4$, faccio nel primo membro della nostra equazione la sostituzione della p in luogo della x, eseguisco la sovraccennata operazione, e avutone il risultato

Digitized by Google

$$\left.\begin{array}{l} p^4 - 2p^3 - 13p^2 + 14p + 24 \\ +(4p^3 - 6p^2 - 26p + 14)y \\ +(6p^2 - 6p - 13)y^2 \\ +(4p - 2)y^3 \\ +y^4 \end{array}\right| = 0$$

faccio $p = -4$, sostituisco, e avremo

$$144 - 234y + 107y^2 - 18y^3 + y^4 = 0,$$

ossia

$$y^4 - 18y^3 + 107y^2 - 234y + 144 = 0$$

per l'equazione richiesta. Le radici difatti dell'equazione in x sono 4, 2, -1, -3, e quelle della trasformata sono 8, 6, 3, 1, radici, ciascuna delle quali supera del numero 4 la sua corrispondente tra le 4, 2, -1, -3.

81. Chiamati per brevità A', B', C', ..., S', T', V' i coefficienti della trasformata precedente, poniamo $y = \frac{1}{u}$; sostituendo essa diverrà

$$V' + \frac{T'}{u} + \frac{S'}{u^2} + \cdots + \frac{C'}{u^{m-3}} + \frac{B'}{u^{m-2}} + \frac{A'}{u^{m-1}} + \frac{1}{u^m} = 0,$$

e quindi, moltiplicando per u^m,

$$V'u^m + T'u^{m-1} + S'u^{m-2} + \cdots + C'u^3 + B'u^2 + A'u + 1 = 0;$$

donde si vede, che nella supposizione di $x = p + \frac{1}{u}$ si avrà la trasformata in u, determinando come nella trasformazione precedente i coefficienti A', B', C', ..., S', T', V', e moltiplicando in seguito l'ultimo V' per u^m, il penultimo T' per u^{m-1}, S' per u^{m-2}, e così in progresso.

82. *Trasformare l'equazione (D) in un'altra tale, che l'unità risulti media proporzionale fra le radici della proposta e quelle della trasformata.*

Chiamata perciò y l'incognita della trasformata, poichè deve essere $x : 1 :: 1 : y$, e però $x = \frac{1}{y}$, sostituisco nella data $\frac{1}{y}$ in luogo di x, e il risultato

$$\frac{1}{y^m} + \frac{A}{y^{m-1}} + \frac{B}{y^{m-2}} + \frac{C}{y^{m-3}} + \cdots + \frac{T}{y} + V = 0,$$

ovvero

$$Vy^m + Ty^{m-1} + \cdots + Cy^3 + By^2 + Ay + 1 = 0$$

altro non sarà che la trasformata richiesta.

83. Essendo α, β, γ, δ, ..., ω le radici dell'equazione proposta, $\frac{1}{\alpha}$, $\frac{1}{\beta}$, $\frac{1}{\gamma}$, $\frac{1}{\delta}$, ..., $\frac{1}{\omega}$ saranno quelle della trasformata; onde, se le prime siano disposte in modo che $\alpha > \beta > \gamma > \delta > \cdots > \omega$, verran le seconde distribuite in un ordine affatto contrario, cosicchè $\frac{1}{\alpha} < \frac{1}{\beta} < \frac{1}{\gamma} < \frac{1}{\delta} < \cdots < \frac{1}{\omega}$; e in tal modo la radice massima α della proposta verrà cangiata nella $\frac{1}{\alpha}$, che sarà la minima della trasformata,

Digitized by Google

e la radice ω minima della proposta si cangierà in $\frac{1}{\omega}$ radice massima della trasformata. Mediante adunque questa trasformazione, potremo mutare le radici massime di un'equazione in minime, e viceversa.

84. *Data la solita (D), trasformarla in un'altra in y tale, che le radici della prima stiano a quelle della seconda in una data ragione di r:s.*

Avendosi per la ipotesi $x:y::r:s$, sarà $x=\frac{ry}{s}$, e quindi, sostituendo, avremo la trasformata

$$\frac{r^m}{s^m}y^m+A\frac{r^{m-1}}{s^{m-1}}y^{m-1}+B\frac{r^{m-2}}{s^{m-2}}y^{m-2}+C\frac{r^{m-3}}{s^{m-3}}y^{m-3}+\cdots+T\frac{r}{s}y+V=0.$$

Questa, e le precedenti trasformazioni, eseguisconsi tutte egualmente ancorchè il primo termine dell'equazione proposta abbia un coefficiente diverso dall'unità.

85. *Liberare una data equazione*

$$x^m+\frac{A}{a}x^{m-1}+\frac{B}{b}x^{m-2}+\frac{C}{c}x^{m-3}+\cdots+\frac{V}{v}=0$$

dalle frazioni, senza che il primo termine acquisti nuovo coefficiente.

Supponiamo, nella precedente $x=\frac{ry}{s}$, la quantità $r=1$, e sostituiscasi il valore $\frac{y}{s}$ in luogo di x nella data equazione; otterremo così la trasformata

$$\frac{y^m}{s^m}+\frac{Ay^{m-1}}{as^{m-1}}+\frac{By^{m-2}}{bs^{m-2}}+\frac{Cy^{m-3}}{cs^{m-3}}+\cdots+\frac{V}{v}=0,$$

ossia

$$y^m+\frac{Asy^{m-1}}{a}+\frac{Bs^2y^{m-2}}{b}+\frac{Cs^3y^{m-3}}{c}+\cdots+\frac{Vs^m}{v}=0.$$

Ora, se la s sia divisibile per ciascuno dei denominatori $a, b, c, \ldots, v$, come se sia $s=abc\ldots v$, eseguite le divisioni è chiaro che la trasformata non contiene più frazioni di sorte alcuna, e frattanto al primo termine non apponesi nuovo coefficiente; dunque, al nostro intento, non avremo che a sostituire nella data in luogo di x la quantità $\frac{y}{s}$, essendo in generale $s=abc\ldots v$, e l'equazione che ne risulta sarà la richiesta.

Così nella

$$x^3-\tfrac{3}{2}x^2+\tfrac{2}{3}x+\tfrac{1}{5}=0,$$

fatto $x=\frac{y}{2.3.5}=\frac{y}{30}$, e sostituito, otterremo la trasformata

$$y^3-45y^2+600y+5400$$

priva affatto di rotti, e non avente nel primo termine altro coefficiente che l'unità.

86. *Trasformare la nostra (D) in un'altra equazione, le cui radici siano i quadrati delle differenze fra le radici della proposta; ossia determinare la così detta* EQUAZIONE DELLE DIFFERENZE.

Digitized by Google

Essendo α, β, γ, δ, ... le radici della data,

$$(\alpha-\beta)^2,\quad (\alpha-\gamma)^2,\quad (\alpha-\delta)^2,\quad (\beta-\gamma)^2,\ \ldots$$

dovranno formar le radici della trasformata. Supponiamo per tanto esser questa la

$$y^n + My^{n-1} + Ny^{n-2} + \cdots = 0,$$

ed è chiaro che avremo sciolto il problema, quando saremo in essa giunti a determinare l'esponente n ed i coefficienti M, N, ...; ora in quanto al primo, tante essendo le radici della trasformata e però tanto il suo grado, quante sono le combinazioni che si possono fare a due a due con le m quantità α, β, γ, δ, ... nella formazione dei quadrati superiori, vedesi che avremo $n = \frac{m(m-1)}{2}$; in quanto poi ai coefficienti M, N, ..., affine di determinarli, istituiscasi il seguente calcolo.

Eleviamo ad una potenza pari qualunque $2k$ le quantità

$$\alpha-\beta,\qquad \alpha-\gamma,\qquad \beta-\gamma,\qquad \ldots;$$

otterremo così

$$(\alpha-\beta)^{2k} = \alpha^{2k} - 2k\alpha^{2k-1}\beta + \frac{2k(2k-1)}{2}\alpha^{2k-2}\beta^2 - \frac{2k(2k-1)(2k-2)}{2.3}\alpha^{2k-3}\beta^3 + \cdots$$
$$\pm\frac{2k(2k-1)(2k-2)\ldots(k+2)}{2.3\ldots(k-1)}\alpha^{k+1}\beta^{k-1} \mp \frac{2k(2k-1)(2k-2)\ldots(k+1)}{2.3\ldots k}\alpha^k\beta^k$$
$$\pm\frac{2k(2k-1)(2k-2)\ldots(k+2)}{2.3\ldots(k-1)}\alpha^{k-1}\beta^{k+1} \mp \cdots - \frac{2k(2k-1)(2k-2)}{2.3}\alpha^3\beta^{2k-3}$$
$$+\frac{2k(2k-1)}{2}\alpha^2\beta^{2k-2} - 2k\alpha\beta^{2k-1} + \beta^{2k},$$

$$(\alpha-\gamma)^{2k} = \alpha^{2k} - 2k\alpha^{2k-1}\gamma + \frac{2k(2k-1)}{2}\alpha^{2k-2}\gamma^2 - \frac{2k(2k-1)(2k-2)}{2.3}\alpha^{2k-3}\gamma^3 + \cdots$$
$$\pm\frac{2k(2k-1)(2k-2)\ldots(k+2)}{2.3\ldots(k-1)}\alpha^{k+1}\gamma^{k-1} \mp \frac{2k(2k-1)(2k-2)\ldots(k+1)}{2.3\ldots k}\alpha^k\gamma^k$$
$$\pm\frac{2k(2k-1)(2k-2)\ldots(k+2)}{2.3\ldots(k-1)}\alpha^{k-1}\gamma^{k+1} \mp \cdots - \frac{2k(2k-1)(2k-2)}{2.3}\alpha^3\gamma^{2k-3}$$
$$+\frac{2k(2k-1)}{2}\alpha^2\gamma^{2k-2} - 2k\alpha\gamma^{2k-1} + \gamma^{2k},$$

$$(\beta-\gamma)^{2k} = \beta^{2k} - 2k\beta^{2k-1}\gamma + \frac{2k(2k-1)}{2}\beta^{2k-2}\gamma^2 - \frac{2k(2k-1)(2k-2)}{2.3}\beta^{2k-3}\gamma^3 + \cdots$$
$$\pm\frac{2k(2k-1)(2k-2)\ldots(k+2)}{2.3\ldots(k-1)}\beta^{k+1}\gamma^{k-1} \mp \frac{2k(2k-1)(2k-2)\ldots(k+1)}{2.3\ldots k}\beta^k\gamma^k$$
$$\pm\frac{2k(2k-1)(2k-2)\ldots(k+2)}{2.3\ldots(k-1)}\beta^{k-1}\gamma^{k+1} \mp \cdots - \frac{2k(2k-1)(2k-2)}{2.3}\beta^3\gamma^{2k-3}$$
$$+\frac{2k(2k-1)}{2}\beta^2\gamma^{2k-2} - 2k\beta\gamma^{2k-1} + \gamma^{2k},$$

. . . . . ;

potenze, nelle quali dovranno prendersi i segni superiori, mentre k sia un numero di-

Digitized by Google

spari, e gl'inferiori, mentre k sia pari. Sommiamo tutte queste potenze, e avremo

$$(\alpha-\beta)^{2k}+(\alpha-\gamma)^{2k}+(\beta-\gamma)^{2k}+\cdots$$
$$=(m-1)(\alpha^{2k}+\beta^{2k}+\gamma^{2k}+\cdots)-2k(\alpha^{2k-1}\beta+\alpha\beta^{2k-1}+\alpha^{2k-1}\gamma+\alpha\gamma^{2k-1}+\beta^{2k-1}\gamma+\beta\gamma^{2k-1}+\cdots)$$
$$+\frac{2k(2k-1)}{2}(\alpha^{2k-2}\beta^2+\alpha^2\beta^{2k-2}+\alpha^{2k-2}\gamma^2+\alpha^2\gamma^{2k-2}+\beta^{2k-2}\gamma^2+\beta^2\gamma^{2k-2}+\cdots)$$
$$-\frac{2k(2k-1)(2k-2)}{2.3}(\alpha^{2k-3}\beta^3+\alpha^3\beta^{2k-3}+\alpha^{2k-3}\gamma^3+\alpha^3\gamma^{2k-3}+\beta^{2k-3}\gamma^3+\beta^3\gamma^{2k-3}+\cdots)$$
$$+\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\pm\frac{2k(2k-1)(2k-2)\ldots(k+2)}{2.3\ldots(k-1)}(\alpha^{k+1}\beta^{k-1}+\alpha^{k-1}\beta^{k+1}+\alpha^{k+1}\gamma^{k-1}+\alpha^{k-1}\gamma^{k+1}$$
$$+\beta^{k+1}\gamma^{k-1}+\beta^{k-1}\gamma^{k+1}+\cdots)$$
$$\mp\frac{2k(2k-1)(2k-2)\ldots(k+1)}{2.3\ldots k}(\alpha^k\beta^k+\alpha^k\gamma^k+\beta^k\gamma^k+\cdots).$$

Ora, pei n^{i} 34, 39 abbiamo

$$(\alpha-\beta)^{2k}+(\alpha-\gamma)^{2k}+(\beta-\gamma)^{2k}+\cdots=\sum y^k,\quad \alpha^{2k}+\beta^{2k}+\gamma^{2k}+\cdots=\sum x^{2k},$$

e le quantità comprese sotto le parentesi nel secondo, terzo, quarto, ... termine vengono rappresentate dalle espressioni

$$\sum x^{2k-1}x,\quad \sum x^{2k-2}x^2,\quad \sum x^{2k-3}x^3,\quad \ldots,\quad \sum x^{k+1}x^{k-1},\quad \sum \overline{xx}^k;$$

avendosi inoltre pei n^{i} 41, 47

$$\sum x^{2k-1}x=\sum x^{2k-1}\sum x-\sum x^{2k},$$
$$\sum x^{2k-2}x^2=\sum x^{2k-2}\sum x^2-\sum x^{2k},$$
$$\sum x^{2k-3}x^3=\sum x^{2k-3}\sum x^3-\sum x^{2k},$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\sum x^{k+1}x^{k-1}=\sum x^{k+1}\sum x^{k-1}-\sum x^{2k},$$
$$\sum \overline{xx}^k=\frac{\sum x^k\sum x^k-\sum x^{2k}}{2}.$$

Sostituendo adunque ne verrà

$$\sum y^k=(m-1)\sum x^{2k}-2k\left(\sum x^{2k-1}\sum x-\sum x^{2k}\right)$$
$$+\frac{2k(2k-1)}{2}\left(\sum x^{2k-2}\sum x^2-\sum x^{2k}\right)$$
$$-\frac{2k(2k-1)(2k-2)}{2.3}\left(\sum x^{2k-3}\sum x^3-\sum x^{2k}\right)$$
$$+\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\pm\frac{2k(2k-1)(2k-2)\ldots(k+2)}{2.3\ldots(k-1)}\left(\sum x^{k+1}\sum x^{k-1}-\sum x^{2k}\right)$$
$$\pm\frac{2k(2k-1)(2k-2)\ldots(k+1)}{2.3\ldots k}\left(\frac{\sum x^k\sum x^k-\sum x^{2k}}{2}\right),$$

Digitized by Google

ossia

$$\begin{aligned}\sum y^k = m\sum x^{2k} &- \Big[1 - 2k + \frac{2k(2k-1)}{2} \\ &- \frac{2k(2k-1)(2k-2)}{2.3} + \cdots \pm \frac{2k(2k-1)(2k-2)\ldots(k+2)}{2.3\ldots(k-1)} \\ &\mp \frac{2k(2k-1)(2k-2)\ldots(k+1)}{2.3\ldots k}\cdot\frac{1}{2}\Big]\sum x^{2k} \\ &- 2k\sum x^{2k-1}\sum x + \frac{2k(2k-1)}{2}\sum x^{2k-2}\sum x^2 \\ &- \frac{2k(2k-1)(2k-2)}{2.3}\sum x^{2k-3}\sum x^3 \\ &+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &\pm \frac{2k(2k-1)(2k-2)\cdots(k+2)}{2.3\ldots(k-1)}\sum x^{k+1}\sum x^{k-1} \\ &\pm \frac{2k(2k-1)(2k-2)\ldots(k+1)}{2.3\ldots k}\times\frac{\sum x^k\sum x^k}{2}.\end{aligned}$$

Ma per la natura dei coefficienti nel binomio Newtoniano abbiamo

$$\begin{aligned}1 - 2k + \frac{2k(2k-1)}{2} &- \frac{2k(2k-1)(2k-2)}{2.3} + \cdots \\ &\pm \frac{2k(2k-1)(2k-2)\ldots(k+2)}{2.3\ldots(k-1)} \\ &\pm \frac{2k(2k-1)(2k-2)\ldots(k+1)}{2.3\ldots k} \\ \mp \frac{2k(2k-1)(2k-2)\ldots(k+2)}{2.3\ldots(k-1)} &\mp \cdots - \frac{2k(2k-1)(2k-2)}{2.3} \\ &+ \frac{2k(2k-1)}{2} - 2k + 1 = 0,\end{aligned}$$

e conseguentemente abbiamo anche la sua metà

$$\begin{aligned}1 - 2k + \frac{2k(2k-1)}{2} &- \frac{2k(2k-1)(2k-2)}{2.3} + \cdots \\ &\pm \frac{2k(2k-1)(2k-2)\ldots(k+2)}{2.3\ldots(k-1)} \\ &\mp \frac{2k(2k-1)(2k-2)\ldots(k+1)}{2.3\ldots k}\times\frac{1}{2} = 0.\end{aligned}$$

Tolto adunque, dal valore di $\sum y^k$, ciò che uguaglia lo zero, resterà

$$\begin{aligned}\sum y^k = m\sum x^{2k} &- 2k\sum x^{2k-1}\sum x + \frac{2k(2k-1)}{2} \\ &\times\sum x^{2k-2}\sum x^2 - \frac{2k(2k-1)(2k-2)}{2.3}\sum x^{2k-3}\sum x^3 + \cdots \\ &\pm \frac{2k(2k-1)(2k-2)\ldots(k+2)}{2.3\ldots(k-1)}\sum x^{k+1}\sum x^{k-1} \\ &\mp \frac{2k(2k-1)(2k-2)\ldots(k+1)}{2.3\ldots k}\times\frac{\sum x^k\sum x^k}{2}.\end{aligned}$$

Digitized by Google

Abbiamo così una formola, da cui, supponendo successivamente $k = 1, 2, 3, \ldots$, potremo ricavare i valori delle quantità $\sum y$, $\sum y^2$, $\sum y^3$, ... espressi per le somme delle x, e quindi pei coefficienti A, B, C, ... della data (n° 35); onde poi potremo determinare pel n° 38 i coefficienti M, N, ..., che si richieggono, della trasformata.

87. Cominciamo dal fare $k = 1$; poichè l'ultimo termine della nostra formola deve esser diviso per 2, e deve avere per coefficiente la quantità

$$\frac{2k(2k-1)\ldots(k+1)}{2.3\ldots k},$$

ne segue che sarà

$$\sum y = m\sum x^2 - \sum x \sum x.$$

Facciamo in secondo luogo $k = 2$, otterremo perciò

$$\sum y^2 = m\sum x^4 - 4\sum x^3 \sum x + \frac{4.3}{2} \times \frac{\sum x^2 \sum x^2}{2}.$$

Così, facendo $k = 3$, ne verrà

$$\sum y^3 = m\sum x^6 - 6\sum x^5 \sum x + \frac{6.5}{2}\sum x^4 \sum x^2 - \frac{6.5.4}{2.3} \times \frac{\sum x^3 \sum x^3}{2},$$

e così in progresso.

Sia per esempio $x^3 - 2x^2 - 33x + 90 = 0$ l'equazione data, di cui si voglia l'equazione delle differenze. Avendosi in questo caso $m = 3$, ne verrà $n = \frac{3.2}{2} = 3$, ed essendo perciò la trasformata della forma

$$y^3 + My^2 + Ny + P = 0,$$

cerco il valore dei coefficienti M, N, P. Poichè

$$\sum x = 2, \quad \sum x^2 = 70, \quad \sum x^3 = -64, \quad \sum x^4 = 2002,$$
$$\sum x^5 = -4408, \quad \sum x^6 = 63010,$$

sostituendo ci risulta

$$\sum y = 3 \times 70 - 2.2 = 210 - 4 = 206,$$

$$\sum y^2 = 3.2002 + 4.64.2 + \frac{4.3}{2} \times \frac{70.70}{2} = 21218,$$

$$\sum y^3 = 3.63010 + 6.4408.2 + \frac{6.5}{2} \times 2002.70 - \frac{6.5.4}{2.3} \times \frac{64.64}{2} = 2303066.$$

Ma pel n° 35 abbiamo

$$\sum y + M = 0,$$
$$\sum y^2 + M\sum y + 2N = 0,$$
$$\sum y^3 + M\sum y^2 + N\sum y + 3P = 0.$$

Digitized by Google

Dunque otterremo, sostituendo,

$M = -206,$

$$N = -\frac{\sum y^2 + M\sum y}{2} = 10609, \qquad P = -\frac{\sum y^3 + M\sum y^2 + N\sum y}{3} = -39204,$$

e quindi l'equazione richiesta sarà

$$y^3 - 206y^2 + 10609y - 39204 = 0.$$

Le radici della

$$x^3 - 2x^2 - 33x + 90 = 0$$

sono 3, 5, — 6, quelle della equazione in y sono

$$(3-5)^2 = 4, \qquad (3+6)^2 = 81, \qquad (5+6)^2 = 121.$$

Digitized by Google

CAPO V.

DELLE TRASFORMAZIONI IN GENERALE.

88. Le radici d'un'equazione trasformata avendo pel n° 75 una relazione con le radici della proposta, ne viene che le une potrannosi sempre esprimere per mezzo delle altre, o in tutto, o in parte, e le une perciò saranno funzioni delle altre; ora i coefficienti pel n° 31 sono funzioni delle rispettive radici; dunque anche i coefficienti della trasformata saranno funzioni delle radici e dei coefficienti della proposta, e viceversa. Essendo pertanto

$$x^m + Ax^{m-1} + Bx^{m-2} + \cdots = 0$$

l'equazione data,

$$y^n + My^{n-1} + Ny^{n-2} + \cdots = 0$$

la trasformata, e chiamate x', x'', x''', ..., $x^{(m)}$ le radici della prima, y', y'', y''', ..., $y^{(n)}$ le radici della seconda, avremo una qualunque di queste, per esempio la

$$y' = f(x')(x'')(x''') \ldots (x^{(m)}).$$

89. *Vogliasi trasformare l'equazione*

$$x^2 + Ax + B = 0$$

in un'altra, le radici della quale uguaglino quelle della proposta aumentate di $\frac{A}{2}$.

Chiamata perciò y la nuova incognita, sarà $y = x + \frac{A}{2}$, e perciò $x = y - \frac{A}{2}$; sostituisco, e otterremo la trasformata

$$y^2 + B - \frac{A^2}{4} = 0.$$

Pongasi, nella supposta $y = x + \frac{A}{2}$, la radice x' in luogo di x, la corrispondente y' in luogo di y, e $-(x' + x'')$ invece di A (n° 31), ci risulterà così

$$y = x' - \frac{x' + x''}{2} = \frac{x' - x''}{2}$$

pel valore della radice y' della trasformata: funzione, come si vede, delle radici della proposta.

90. Ciò che si è detto nel presente esempio di x', dir si poteva egualmente di x'', e viceversa; in quanto che il discorso fatto nella trasformazione e le proprietà di-

Digitized by Google

pendenti dall'equazione sono comuni ad amendue le radici x', x''; dunque nell'espressione $\frac{x' - x''}{2}$ se porrò x'' in luogo di x', ed x' in luogo di x'', ne verrà tuttora un vero valore di y, e però non solo sarà radice della trasformata la quantità $\frac{x' - x''}{2}$, ma lo sarà l'altra pure $\frac{x'' - x'}{2}$. Dunque, avendosi già $y' = \frac{x' - x''}{2}$, dovrà essere $y'' = \frac{x'' - x'}{2}$.

91. Proposta l'equazione

$$x^3 + Ax^2 + Bx + C = 0,$$

vogliasene un'altra in y, di cui le radici altro non siano che i diversi quoti di due qualunque delle radici della data diminuiti dell'altra radice che rimane; ritenute cioè le precedenti denominazioni, debba uno dei valori di y, per esempio y', essere $= \frac{x'}{x''} - x'''$.

Affine di avere tutti i valori della y, è chiaro che non dovremo se non formare tutti i quoti possibili a due a due fra le x', x'', x''', e da essi sottrarre l'altra radice che rimane; ma, così operando, otteniamo i risultati

$$\frac{x'}{x''} - x''', \quad \frac{x''}{x'} - x''', \quad \frac{x'''}{x''} - x', \quad \frac{x''}{x'''} - x', \quad \frac{x'}{x'''} - x'', \quad \frac{x'''}{x'} - x'';$$

questi dunque saranno i valori della y, ossia le radici della trasformata. Ora supposto

$$y' = \frac{x'}{x''} - x''' = f(x')(x'')(x''')$$

(n° 2), ne viene

$$y'' = \frac{x''}{x'} - x''' = f(x'')(x')(x'''),$$

$$y''' = \frac{x'''}{x''} - x' = f(x''')(x'')(x'),$$

$$y^{IV} = \frac{x''}{x'''} - x' = f(x'')(x''')(x'),$$

$$y^{V} = \frac{x'}{x'''} - x'' = f(x')(x''')(x''),$$

$$y^{VI} = \frac{x'''}{x'} - x'' = f(x''')(x')(x'').$$

Questi sei risultati adunque quelli essendo, evidentemente, che nascono dalla $f(x')(x'')(x''')$ per le varie permutazioni fra le x', x'', x''', ne segue che, affine di ottenere le radici y', y'', ..., e conoscere così il grado della trasformata, non dovremo che determinare le permutazioni della $f(x')(x'')(x''')$; ed il loro numero $1.2.3 = 6$ ci esprimerà il grado richiesto.

92. *Sia l'equazione proposta di un grado qualunque m, e sia y una delle radici della trasformata = ad una funzione algebraica razionale qualunque siasi delle*

$$x', \quad x'', \quad x''', \ldots, x^{(m)},$$

Digitized by Google

che esprimerò in generale per

$$f(x')(x'')(x''')(x^{iv}) \ldots (x^{(m)}).$$

In tal caso io dico, che il grado della trasformata, chiamato π, *sarà generalmente parlando* $= 1.2.3.4 \ldots m$.

Mentre si eseguisce una qualsivoglia trasformazione, considerandosi tutte le radici x', x'', x''', ..., egualmente, e ciò che di una si asserisce, asserendosi in egual modo delle altre, ne viene evidentemente che, nella supposta funzione, nel luogo ove pel valore di y' si è collocata una delle radici, per esempio x', affine di ottenere tutte le radici della trasformata, dovremo collocare successivamente ciascuna delle altre x'', x''', x^{iv}, ...; laddove è stata posta la x'', dovransi porre successivamente le x', x''', x^{iv}, ... ; nel luogo della x''' dovransi mettere successivamente le x', x'', x^{iv}, ..., e così in progresso. Per tal modo nel n° prec., ove avevamo $y' = \frac{x'}{x''} - x'''$, abbiam prima posto x'' nel luogo della x', e la x' nel luogo della x'', e ci è risultato il valore $y'' = \frac{x''}{x'} - x'''$; poscia lasciata in y' la x'' al suo posto, abbiam messa la x''' nel luogo della x', e la x' nel luogo della x''', risultandoci in tal guisa il valore $y''' = \frac{x'''}{x''} - x'$; e così operando in seguito, dalla sola $y' = \frac{x'}{x''} - x'''$ tutti abbiamo ottenuti i valori della y. Ora nell'eseguire la precedente operazione, come si è detto della $f(x')(x'')(x''')$ (n° prec.), così nella funzione generale

$$f(x')(x'')(x''')(x^{iv}) \ldots (x^{(m)})$$

altro non facciamo evidentemente, che formare tutte le permutazioni possibili tra le

$$x', \quad x'', \quad x''', \quad x^{iv}, \ldots, x^{(m)}.$$

Dunque tali permutazioni essendo di numero $1.2.3.4 \ldots m$ (n° 45), ne viene che un simile prodotto esprimerà in generale il numero delle radici, e quindi il grado della nostra trasformata.

Così nel n° prec., ove $m = 3$, abbiam veduto essere $\pi = 1.2.3 = 6$.

93. Eseguite le π permutazioni della (A)

$$f(x')(x'')(x''')(x^{iv}) \ldots (x^{(m)}),$$

le radici della trasformata saranno

$$\begin{aligned}
y' &= f(x')(x'')(x''')(x^{iv}) \ldots (x^{(m)}),\\
y'' &= f(x'')(x')(x''')(x^{iv}) \ldots (x^{(m)}),\\
y''' &= f(x''')(x'')(x')(x^{iv}) \ldots (x^{(m)}),\\
y^{iv} &= f(x^{iv})(x'')(x''')(x') \ldots (x^{(m)}),\\
y^{v} &= f(x')(x''')(x'')(x^{iv}) \ldots (x^{(m)}),\\
y^{vi} &= f(x')(x^{iv})(x''')(x'') \ldots (x^{(m)}),\\
y^{vii} &= f(x''')(x')(x'')(x^{iv}) \ldots (x^{(m)}),\\
y^{viii} &= f(x''')(x'')(x^{iv})(x') \ldots (x^{(m)}),\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

Digitized by Google

94. Se la supposta (A) sia razionale, abbiamo nel n° 92 asserito, e dimostrato, che generalmente parlando il grado della trasformata sarà $= \pi = 1.2.3.4 \ldots m$.

Si è detto generalmente parlando, poichè se le permutazioni della (A) ci dànno dei risultati tutti disuguali fra loro, la cosa è sempre vera a tutto rigore; ma se alcuni di questi risultati sono fra loro uguali, in allora il numero π ci esprimerà bensì il grado della trasformata in certo modo, ma non già con tutta la precisione. Che succeda in questa supposizione, noi lo vedremo fra poco, premesse le osservazioni che seguono; e che succeda poi, mentre la (A) sia funzione irrazionale, lo vedremo in altro Capo.

95. *Fatte le permutazioni tutte della* $f(x')(x'')(x''')$, *e scritti i risultati, come qui sotto,*

$$\begin{array}{llll} 1^a & f(x')(x'')(x'''), & 2^a & f(x''')(x')(x''), \\ 3^a & f(x'')(x''')(x'), & 4^a & f(x')(x''')(x''), \\ 5^a & f(x'')(x')(x'''), & 6^a & f(x''')(x'')(x'), \end{array}$$

supponiamo, che una di tali funzioni sia uguale ad un'altra qualunque corrispondente, che per es. sia la 1^a = alla 4^a. *Tale uguaglianza potrà succedere in due maniere diverse, primo pel valore particolare delle radici, secondo per la forma della funzione;* nel primo caso le due funzioni dovranno evidentemente esser uguali fra loro solamente in certi casi determinati; nel secondo si avrà l'uguaglianza, qualunque valore diasi alla x. Siano per es. le due funzioni $\frac{x' - x''}{x'''}$, $x'^2 - x''x'''$, e facciamo in amendue la permutazione di x'' in x'''; la prima diverrà $\frac{x' - x'''}{x''}$, la seconda $x'^2 - x'''x''$; ora se si vuole che la $\frac{x' - x''}{x'''}$ sia $= \frac{x' - x'''}{x''}$, questo non potrà succedere, che mentre abbiano le x, collocate come si ritrovano, certi particolari valori, mentre per es. sia

$$x' = 10, \qquad x'' = 7, \qquad x''' = 3,$$

risultando da ciò

$$\frac{x' - x''}{x'''} = \frac{10 - 7}{3} = 1, \qquad \frac{x' - x'''}{x''} = \frac{10 - 3}{7} = 1;$$

ma se, supposto

$$x' = 10, \qquad x'' = 7,$$

abbiasi $x''' = 5$, ottenendosi

$$\frac{x' - x''}{x'''} = \frac{10 - 7}{5} = \frac{3}{5}, \qquad \frac{x' - x'''}{x''} = \frac{10 - 5}{7} = \frac{5}{7},$$

non potrà essere

$$\frac{x' - x''}{x'''} = \frac{x' - x'''}{x''}.$$

Al contrario, la funzione $x'^2 - x''x'''$ essendo $= x'^2 - x'''x''$ a cagione della sua forma, e però indipendentemente dal valore particolare delle radici, tale uguaglianza sempre si verificherà, qualunque valore si attribuisca alle x', x'', x'''.

Se le permutazioni si eseguiscono sulla funzione generale (A), è chiaro che potrà farsi lo stesso discorso, e la distinzione medesima, nelle uguaglianze che abbiamo ora esposte.

Digitized by Google

96. Supponiamo inoltre, che *sopra due funzioni corrispondenti uguali eseguiscasi una medesima permutazione;* se queste supposte funzioni sono uguali per la loro forma, come le due $x'^2 - x''x'''$, $x'^2 - x'''x''$ (n° prec.), in allora tale uguaglianza dovendosi conservare, qualunque quantità pongasi in luogo della x in amendue le funzioni nel tempo medesimo (n° prec.), ne viene che essa dovrà conservarsi ancora sotto la permutazione supposta, non facendosi con questa che porre in entrambe, nel tempo stesso, in luogo della x certi determinati valori diversi dai primi. Così, permutando nelle

$$x'^2 - x''x''', \qquad x'^2 - x'''x''$$

la x' nella x''', la x'' nella x', e la x''' nella x'', ne verranno le due funzioni

$$x'''^2 - x'x'', \qquad x'''^2 - x''x'$$

uguali totalmente fra loro, come lo erano fra loro le

$$x'^2 - x''x''', \qquad x'^2 - x'''x''.$$

Ma se le funzioni supposte, come le due

$$\frac{x' - x''}{x'''}, \qquad \frac{x' - x'''}{x''},$$

sono fra loro uguali soltanto per certi particolari valori della x (n° prec.), in allora sotto la permutazione cambiandosi la certa posizione di quelle certe determinate radici da cui solo dipendeva l'uguaglianza, ne viene, generalmente parlando, che le due nuove funzioni dovranno risultare disuguali. Cambiamo per esempio nelle $\frac{x' - x''}{x'''}$, $\frac{x' - x'''}{x''}$ la x' nella x'' lasciando la x''' al suo luogo; ne nasceranno perciò le funzioni $\frac{x'' - x'}{x'''}$, $\frac{x'' - x'''}{x'}$; ora mentre $x' = 10$, $x'' = 7$, $x''' = 3$, abbiamo bensì $\frac{x' - x''}{x'''} = \frac{x' - x'''}{x''}$ (n° prec.); ma non abbiamo già $\frac{x'' - x'}{x'''} = \frac{x'' - x'''}{x'}$, risultando

$$\frac{x'' - x'}{x'''} = \frac{7 - 10}{3} = -1, \qquad \frac{x'' - x'''}{x'} = \frac{7 - 3}{10} = \frac{4}{10}.$$

97. *Se due delle π funzioni del* n° 93 *sono per la loro forma fra loro uguali, saranno fra loro uguali a due a due anche tutte le altre.*

Abbiasi la

$$y' = f(x')(x'')(x''')(x^{iv}) \dots (x^{(m)})$$

tale, che per la sua forma sia

$$= y''' = f(x''')(x'')(x')(x^{iv}) \dots (x^{(m)}).$$

Ciò posto, si eseguisca nel medesimo tempo in amendue le y', y''' un'eguale permutazione, si cangi per es. la x' in x''; ne verranno i due risultati

$$f(x'')(x')(x''')(x^{iv}) \dots (x^{(m)}), \qquad f(x''')(x')(x'')(x^{iv}) \dots (x^{(m)}).$$

Ora questi non sono, evidentemente, che due delle π funzioni del n° 93, cioè le due y'', y^{vii}, e deggiono frattanto pel n° 96 essere uguali fra loro. Dunque, lo stesso

Digitized by Google

discorso facendosi qualunque altra permutazione eseguiscasi in entrambe le y', y'', ne segue chiaramente che tutte le permutazioni nate corrispondentemente da simili permutazioni, e perciò tutte le π funzioni del n° 93, dovranno essere uguali fra loro a due a due.

Se sia per es.

$$y' = x' + x''' - \frac{x'' - x^{iv}}{x^{(m)}},$$

e perciò

$$y''' = x''' + x' - \frac{x'' - x^{iv}}{x^{(m)}},$$

venendone

$$y'' = x'' + x''' - \frac{x' - x^{iv}}{x^{(m)}}, \qquad y^{vii} = x''' + x'' - \frac{x' - x^{iv}}{x^{(m)}},$$

risulterà $y'' = y^{vii}$; ed eseguendo un'altra permutazione, quella per esempio di x' in x^{iv}, otterremo $y^{iv} = y^{viii}$, e così di seguito [4].

98. In egual modo si dimostra che, *se tre, quattro, etc. delle funzioni del* n° 93 *sono uguali tra loro per la loro forma, ancora tutte le altre saranno fra loro uguali a tre a tre, a quattro a quattro,* etc. Che se due, o più, delle stesse π funzioni si uguagliano fra loro, non per la forma, ma pel valore particolare delle x (n° 95), in tal caso è facile il vedersi dal n° 96, che non si verificherà il teorema precedente, e la uguaglianza perciò non potrà, generalmente parlando, conservarsi tra le altre funzioni che rimangono.

99. Poichè nella supposizione del n° 97 le π funzioni sono tutte fra loro uguali a due a due, e quindi i valori diversi della y sono di numero $\frac{\pi}{2}$, ne segue che, se nell'equazione proposta (n° 92) volessimo una trasformata la quale comprendesse le radici tutte, sì uguali che disuguali, essa bensì verrebbe del grado π (n° 92); ma volendosi quella trasformata la quale non comprende che le radici disuguali, e quella che solo a tutto rigor si ricerca, essa risulterà del grado $\frac{\pi}{2}$. Così, pel n° 98, *se la*

$$y' = f(x')(x'')(x''')(x^{iv}) \ldots (x^{(m)})$$

è di tal forma che conservi sempre lo stesso valore, facendo tre, quattro, o più permutazioni diverse, la vera trasformata diverrà del grado $\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{4}, \ldots$.

Nell'altro caso poi del n° 98, è chiaro che non possonsi avere in considerazione che casi particolari, e che la trasformata, coll'escludersi delle radici uguali, si ridurrà al grado $\pi - 1$, $\pi - 2$, etc., secondo che due, o tre, o etc. sono i valori della y tra loro uguali.

100. Chiamiamo n il grado della trasformata; se sia

$$y' = f(x', x'')(x''')(x^{iv}) \ldots (x^{(m)}),$$

pei n^{i} 3, 97 ne verrà $n = \frac{\pi}{2}$. Se pongasi

$$y' = f(x', x'', x''')(x^{iv}) \ldots (x^{(m)}),$$

Digitized by Google

non cangiando la y' di valore qualunque permutazione si faccia tra le x', x'', x''' (n° 3), ne viene che si avranno $1.2.3 = 6$ risultati della nostra funzione per la forma tra loro uguali (n° 96), e però i valori tutti della y essendo tra loro uguali a 6 a 6 (n° 98), la trasformata diverrà del grado

$$n = \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{1.2.3}.$$

In egual modo, se abbiasi

$$y' = f(x', x'', x''', x^{iv}) \dots (x^{(m)}),$$

ne verrà

$$n = \frac{\pi}{1.2.3.4} = \frac{\pi}{24}$$

(n^i 3, 98). Se sia

$$y' = f(x', x'', x''', x^{iv}, x^{v}) \dots (x^{(m)}),$$

avremo

$$n = \frac{\pi}{1.2.3.4.5} = \frac{\pi}{120},$$

e così di seguito.

101. Pertanto, supponendo

$$y' = f(x', x'', x''', x^{iv}, x^{v}, \dots, x^{(m)}),$$

giacchè in questo caso risulta

$$n = \frac{\pi}{1.2.3.4.5 \dots m} = \frac{\pi}{\pi} = 1$$

(n° 3), ne viene che *una funzione, come la proposta, di tal forma cioè che resti sempre la medesima qualunque permutazione si faccia fra tutte le* x', x'', x''', $\dots$, $x^{(m)}$, ne viene, dico, che essa *dipenderà da una trasformata di primo grado*, e potremo perciò determinare il suo valore col mezzo della data senza sciogliere equazione di grado maggiore del primo.

102. Supponiamo

$$y' = f(x', x'')(x''', x^{iv}) \dots (x^{(m)});$$

dovendo questa funzione rimanere la stessa, comunque si cambino fra loro le x', x'', come pure tra loro le altre x''', x^{iv}, i valori della y dovranno tutti essere uguali fra loro a $1.2.1.2.$ a $1.2.1.2$, e avremo perciò corrispondentemente

$$n = \frac{\pi}{1.2.1.2} = \frac{\pi}{4}.$$

Così nella ipotesi di

$$y' = f(x', x'')(x''', x^{iv}, x^{v}) \dots (x^{(m)}),$$

otterremo

$$n = \frac{\pi}{1.2.1.2.3} = \frac{\pi}{12};$$

e in generale, supposto

$$y' = f(x', x'', x''' \dots x^{(a)})(x^{(a+1)}, x^{(a+2)}, x^{(a+3)}, \dots, x^{(a+b)})(x^{(a+b+1)}, x^{(a+b+2)}, x^{(a+b+3)} \dots),$$

ne verrà

$$n = \frac{\pi}{1.2.3 \dots a.1.2.3. \dots b.1.2.3 \dots}.$$

Digitized by Google

103. *Sia finalmente y' uguale ad una funzione in cui non si contengano che alcune delle radici della data;* se ne contenga per es. un numero λ, cosicchè abbiasi

$$y' = f(x')(x'')(x''') \dots (x^{(\lambda)}).$$

Sommiamo con questa tutte le altre $m-\lambda$ radici che rimangono, moltiplicando ciascuna per lo zero, non alterandosi per ciò il valore della funzione proposta; otterremo

$$y' = f(x')(x'')(x''') \dots (x^{(\lambda)}) + (0\,x^{(\lambda+1)} + 0\,x^{(\lambda+2)} + 0\,x^{(\lambda+3)} + \dots + 0\,x^{(m)});$$

ma questa altro non è che una funzione della forma

$$y' = f(x')(x'')(x''') \dots (x^{(\lambda)})(x^{(\lambda+1)}, x^{(\lambda+2)}, x^{(\lambda+3)}, \dots, x^{(m)}),$$

e tale essendo conduce ad una trasformata del grado

$$\frac{\pi}{1.2.3 \dots (m-\lambda)}$$

(n° 100). Dunque, avendosi

$$\pi = 1.2.3 \dots (m-\lambda)(m-\lambda+1)(m-\lambda+2) \dots m,$$

e però

$$\frac{\pi}{1.2.3 \dots (m-\lambda)} = \frac{1.2.3 \dots [(m-\lambda)(m-\lambda+1)(m-\lambda+2) \dots m]}{1.2.3 \dots (m-\lambda)}$$

$$= (m-\lambda+1)(m-\lambda+2)(m-\lambda+3) \dots m = m(m-1)(m-2)(m-3) \dots [m-(\lambda-1)],$$

sarà questo numero $= n$, ossia ci esprimerà il grado della trasformata corrispondente alla supposta funzione

$$y' = f(x')(x'')(x''') \dots (x^{(\lambda)}).$$

104. Replicando quanto si disse ai n^i 102, 103, vedesi che qualunque funzione della forma

$$f(x', x'', x''', \dots x^{(a)})(x^{(a+1)}, x^{(a+2)}, x^{(a+3)}, \dots, x^{(a+b)})(x^{(a+b+1)})(x^{(a+b+2)}) \dots (x^{(\lambda)})$$

ci darà una trasformata del grado

$$\frac{m(m-1)(m-2) \dots [m-(\lambda-1)]}{1.2.3 \dots a.\,1.2.3 \dots b};$$

e se sia

$$y' = f(x', x'', x''', x^{iv}, \dots, x^{(\lambda)}),$$

avremo

$$n = \frac{m(m-1)(m-2) \dots [m-(\lambda-1)]}{1.2.3 \dots \lambda}.$$

105. *Data l'equazione generale*

$$x^m + Ax^{m-1} + Bx^{m-2} + \dots = 0,$$

trasformare questa in un'altra, di cui sia radice una qualunque funzione razionale

$$f(x')(x'')(x''') \dots (x^{(m)}).$$

Supponiamo essere

$$y^n + Ly^{n-1} + My^{n-2} + Ny^{n-3} + \dots = 0$$

la trasformata che si domanda; è chiaro che avremo sciolto il problema, ogni qualvolta avremo determinato il valore dell'esponente n e quello dei coefficienti L, M, N, ...

Digitized by Google

Ora rapporto ad n, conosciuta la forma della data funzione, conosceremo immediatamente il valore di essa n col mezzo dei n^{i} prec.; affine poi di determinare i coefficienti è necessario il premettere le seguenti riflessioni.

Chiamate

$$y', \quad y'', \ldots, y^{(n)}$$

le radici della trasformata, poichè, fatta astrazione dai segni, L uguaglia la somma di queste, M è uguale alla somma dei loro ambi, N è uguale a quella dei terni, etc. (n° 31), evidentemente avremo ciascuno di tali coefficienti uguale ad una funzione della forma

$$f(y', y'', y''', \ldots, y^{(n)}).$$

Ma ottenuti, come nel n° 93, i valori delle y', y'', y''', ..., se facciamo in questi tutte le permutazioni possibili tra le x', x'', x''', ..., essi pei n^{i} prec. non fanno che restare gli stessi, o cangiarsi gli uni negli altri; dunque nei coefficienti L, M, N, ... ponendo in luogo delle y', y'', y''', ... i valori corrispondenti in x', x'', x''', ..., essi risulteranno tante funzioni di queste radici tutti della forma

$$f(x', x'', x''', \ldots x^{(m)})$$

e razionali. Ora, noi sappiamo, dal n° 101, che il valore delle funzioni razionali di tal forma può sempre determinarsi col mezzo della data, senza sciogliere equazione alcuna di grado maggiore del primo. Dunque ricercando, come negli esempi che seguono, col mezzo dei n^{i} 31, 35, 36, 41, 46, 49, simili valori, noi otterremo i valori dei coefficienti L, M, N, ..., e avremo così sciolto con tutta la generalità il problema proposto.

106. *Data l'equazione di terzo grado*

$$x^3 + ax^2 + bx + c = 0,$$

vogliasene un'altra, le cui radici siano le differenti somme delle radici della data prese a due a due.

Chiamate x', x'', x''' le radici dell'equazione proposta, ed y' una delle radici della trasformata, avremo, per la supposizione,

$$y' = x' + x''.$$

Ora questa è una funzione della forma $f(x', x'')$; il grado adunque della trasformata che si cerca, dovendo pel n° 104 essere

$$= \frac{3[3-(2-1)]}{1.2} = \frac{3.2}{1.2} = 3,$$

giacchè $m = 3$, $\lambda = 2$, essa trasformata diverrà

$$y^3 + Ly^2 + My + N = 0,$$

e le sue radici saranno

$$y' = x' + x'', \qquad y'' = x' + x''', \qquad y''' = x'' + x'''.$$

Affine presentemente di determinare il valore dei coefficienti L, M, N, ..., osservo che abbiamo

$$L = -(y' + y'' + y'''), \quad M = +(y'y'' + y'y''' + y''y'''), \quad N = -y'y''y'''$$

Digitized by Google

(n° 31); sostituendo adunque, e riducendo, sarà

$$L = -(2x' + 2x'' + 2x'''),$$

$$M = +(x'^2 + x''^2 + x'''^2 + 3x'x'' + 3x'x''' + 3x''x'''),$$

$$N = -(x'^2x'' + x'x''^2 + x'^2x''' + x'x'''^2 + x''^2x''' + x''x'''^2 + 2x'x''x'''),$$

ossia pei n^i 31, 34, 39

$$L = -2\sum x, \qquad M = \sum x^2 + 3b, \qquad N = -(\sum xx^2 + 2x'x''x''');$$

e finalmente pei n^i 31, 35, 41

$$L = 2a, \quad M = a^2 - 2b + 3b = a^2 + b, \quad N = -(3c - ab - 2c) = ab - c.$$

Pongo pertanto questi valori nella supposta equazione in y, e la

$$y^3 + 2ay^2 + (a^2 + b)y + (ab - c) = 0,$$

che ne risulta, sarà la trasformata richiesta.

Sia per esempio $x' = 1$, $x'' = 3$, $x''' = 5$, e però $a = -9$, $b = 23$, $c = -15$, ed

$$x^3 - 9x^2 + 23x - 15 = 0$$

l'equazione data. Otterremo in tal caso

$$2a = -18, \qquad a^2 + b = 104, \qquad ab - c = -192,$$

onde la trasformata sarà

$$y^3 - 18y^2 + 104y - 192 = 0,$$

di cui le radici sono $y' = 4$, $y'' = 6$, $y''' = 8$, uguali per l'appunto alle radici della data sommate fra loro a due a due.

107. *Ritenuta l'equazione istessa del n° prec., un'altra se ne voglia, di cui sia radice la funzione del n° 96* $x'^2 - x''x'''$.

Essendo la proposta funzione della forma

$$f(x')(x'', x'''),$$

avremo pel n° 100

$$n = \frac{1.2.3}{2} = 3,$$

ed

$$y^3 + Ly^2 + My + N = 0$$

la trasformata, di cui

$$y' = x'^2 - x''x''', \qquad y'' = x''^2 - x'x''', \qquad y''' = x'''^2 - x'x''$$

saranno le radici. Ora sostituisco nei valori dei coefficienti

$$L = -(y' + y'' + y'''), \quad M = +(y'y'' + y'y''' + y''y'''), \quad N = -y'y''y'''$$

i valori espressi col mezzo delle x', x'', x''', e riducendo avremo

$$L = -[x'^2 + x''^2 + x'''^2 - (x'x'' + x'x''' + x''x''')] = -\sum x^2 + b,$$

$$M = +[x'^2x''^2 + x'^2x'''^2 + x''^2x'''^2 - (x'^3x'' + x'x''^3 + x'^3x''' + x'x'''^3 + x''^3x''' + x''x'''^3)$$
$$+ (x'^2x''x''' + x'x''^2x''' + x'x''x'''^2)] = \sum \overline{xx}^2 - \sum x^3x + \sum x(x'x''x'''),$$

$$N = +(x'^3x''^3 + x'^3x'''^3 + x''^3x'''^3) - (x'^4x''x''' + x'x''^4x''' + x'x''x'''^4)$$
$$= \sum \overline{xx}^3 - \sum x^3(x'x''x''').$$

Digitized by Google

Ricavo dai n^{i} 41, 47 i valori corrispondenti, e ottenendosi

$$L = b - \sum x^2,$$

$$M = \frac{\sum x^2 \sum x^2 - \sum x^4}{2} - \sum x^3 \sum x + \sum x^4 + ac,$$

$$N = \frac{\sum x^3 \sum x^3 - \sum x^6}{2} + c \sum x^3,$$

istituito il calcolo, ne verrà

$$L = 3b - a^2, \qquad M = 3b^2 - a^2 b, \qquad N = b^3 - a^3 c,$$

e finalmente

$$y^3 + (3b - a^2)y^2 + (3b^2 - a^2 b)y + (b^3 - a^3 c) = 0.$$

Dalla precedente

$$x^3 - 9x^2 + 23x - 15 = 0$$

ricavandosi

$$3b - a^2 = -12, \qquad 3b^2 - a^2 b = -276, \qquad b^3 - a^3 c = 1232,$$

la trasformata corrispondente sarà

$$y^3 - 12y^2 - 276y + 1232 = 0,$$

e le radici di questa

$$y' = -14, \qquad y'' = 4, \qquad y''' = 22$$

uguagliano appunto le tre funzioni

$$x'^2 - x'' x''', \qquad x'''^2 - x' x''', \qquad x''''^2 - x' x'',$$

avendosi

$$x' = 1, \qquad x'' = 3, \qquad x''' = 5$$

(n° prec.).

108. *Ridurre la equazione*

$$z^3 + dz^2 + ez + f = 0$$

ad un'altra, le radici della quale siano le differenze a due a due delle radici della data.

Affine di facilitare il calcolo, supponiamo

$$z = x - \frac{d}{3},$$

riduco l'equazione data ad un'altra priva del coefficiente del secondo termine, e da questa deduco immediatamente la trasformata. Chiamata essa

$$x^3 + bx^2 + c = 0,$$

avendosi

$$z' = x' - \frac{d}{3}, \qquad z'' = x'' - \frac{d}{3}, \qquad z''' = x''' - \frac{d}{3},$$

ripongo nella funzione $z' - z''$, che per la ipotesi ci esprime una delle radici della richiesta equazione trasformata, ripongo, dissi, i valori corrispondenti in x; risultando da ciò

$$z' - z'' = x' - \frac{d}{3} - x'' + \frac{d}{3} = x' - x'',$$

faccio, come precedentemente (n^{i} 105, 106, 107), su questa $x' - x''$ i raziocinii dovuti

Digitized by Google

e il calcolo opportuno. Essendo essa una funzione della forma

$$f(x')(x''),$$

a cagione di $m=3$, $\lambda=2$, ne verrà $n=3.2=6$ (n° 103), e quindi la trasformata

$$y^6+Ly^5+My^4+Ny^3+Py^2+Qy+R=0.$$

Ora, essendo

$$y'=x'-x'',$$

e però

$$y''=x''-x',\quad y'''=x'-x''',\quad y^{iv}=x'''-x',\quad y^{v}=x''-x''',\quad y^{vi}=x'''-x'',$$

colloco questi valori delle radici nei coefficienti

$$L=-(y'+y''+y'''+y^{iv}+\cdots),\quad M=+(y'y''+y'y'''+y'y^{iv}+\cdots),\ \ldots,$$

e fatte le riduzioni, poichè ci risulta

$$L=0,\quad M=-\sum x^2+2\sum\overline{xx},\quad N=0,\quad P=\sum x^4-2\sum xx^3+3\sum\overline{xx}^2,\quad Q=0,$$
$$R=-\sum x^4x^2+2\sum\overline{xx}^3-2\sum x^3x^2x+2\sum x^4\overline{xx}+6\sum\overline{xxx}^2,$$

col mezzo dei n^i 31, 41, 47 otterremo

$$M=2b-\sum x^2,\qquad P=(3\sum x^4-4\sum x\sum x^3+3\sum x^2\sum x^2):2$$
$$R=-2\sum x^6+3\sum x^3\sum x^3-2\sum x^3\sum x^2\sum x+\sum x^4\sum x\sum x+6c^24b^3+27c^2.$$

Ciò ritrovato ricorro ai teoremi Newtoniani (n° 35), e a cagione del coefficiente del secondo termine = zero, avendosi

$$\sum x=0,\quad \sum x^2=-2b,\quad \sum x^3=-3c,\quad \sum x^4=2b^2,\quad \sum x^5=5bc,\quad \sum x^6=3c^2-2b^3,$$

colla sostituzione ci risulterà

$$M=4b,\qquad P=9b^2,\qquad R=4b^3+27c^2;$$

e però

$$y^6+4by^4+9b^2y^2+(4b^3+27c^2)=0$$

sarà la trasformata, che proviene dall'equazione in x. Ora per cagione di $z=x-\frac{d}{3}$, abbiamo

$$b=e-\frac{d^2}{3},\qquad c=f-\frac{ed}{3}+\frac{2d^3}{27};$$

sostituendo adunque otterremo

$$y^6+4\left(e-\frac{d^2}{3}\right)y^4+9\left(e-\frac{d^2}{3}\right)^2y^2+\left[4\left(e-\frac{d^2}{3}\right)^3+27\left(f-\frac{ed}{3}+\frac{2d^3}{27}\right)^2\right]=0,$$

e questa sarà finalmente la trasformata risultante dalla proposta

$$z^3+dz^2+ez+f=0.$$

109. Nel modo medesimo dei n^i prec., e con le regole accennate, potremo eseguire presentemente una qualunque trasformazione, mentre però la data

$$f(x')(x'')(x''')\ldots(x^{(m)})$$

Digitized by Google

sia una funzione razionale. Nei casi particolari, come in quello del n° prec., e come in quei tutti del Capo prec., nei quali il rapporto fra le radici della trasformata e quella della proposta è assai semplice, potremo talvolta con particolari artifizii agevolare il calcolo, d'altronde il più delle volte brigoso, mentre l'equazione data sia di grado superiore, e la data funzione sia complicata.

Digitized by Google

CAPO VI.

DELLA ELIMINAZIONE, E DEL MODO DI TOGLIERE I RADICALI DA UNA DATA EQUAZIONE.

110. Sappiamo dall'algebra cosa intender si debba col nome di *eliminazione di una o più incognite da due o più date equazioni,* e allora quando le equazioni sono di primo grado, suppongo noto, dall'algebra, come eseguiscasi una simile operazione.

Passeremo ora ad esporre come essa medesima si faccia nelle equazioni algebraiche di grado superiore; prima però di far questo, amiamo di accennare un altro metodo assai elegante, oltre gli esposti comunemente nell'algebra, onde eliminare le incognite nelle equazioni di primo grado.

111. Vengano proposte le due equazioni

$$ax + by + c = 0, \qquad fx + gy + h = 0,$$

onde esporre su di esse questo metodo di eliminare.

Moltiplico a tal fine la seconda di simili equazioni per una quantità da determinarsi M, e poscia la sommo con la prima; ci risulterà così una terza equazione

$$(fM + a)x + (gM + b)y + (hM + c) = 0,$$

in cui la quantità M può determinarsi ad arbitrio. Determiniamola pertanto in maniera che abbiasi

$$fM + a = 0;$$

dovrà perciò essere

$$M = -\frac{a}{f},$$

e la nostra equazione diverrà

$$(gM + b)y + (hM + c) = 0,$$

ossia, sostituendo,

$$\left(b - \frac{ag}{f}\right)y + \left(c - \frac{ah}{f}\right) = 0,$$

equazione da cui si è già eliminata la x. Che se si voglia eliminare la y, cerco di determinare la M per modo che divenga zero il coefficiente della y, e suppongo a tal fine

$$gM + b = 0;$$

ricavandosi da ciò

$$M = -\frac{b}{g},$$

Digitized by Google

riduco la nostra equazione alla

$$(fM + a)x + (hM + c) = 0,$$

sostituisco in luogo di M il valore ritrovato, e l'equazione

$$\left(a - \frac{bf}{g}\right)x + \left(c - \frac{bh}{g}\right) = 0$$

quella sarà che risulta dalla eliminazione della y.

112. Eliminare due qualsivogliano delle incognite dalle tre equazioni

$$ax + by + cz + d = 0,$$
$$fx + gy + hz + i = 0,$$
$$mx + ny + pz + q = 0.$$

Moltiplicata la seconda di queste per un'indeterminata M, e la terza per un'altra N, le sommo insieme, e mi risulta così l'equazione

$$(a + fM + mN)x + (b + gM + nN)y + (c + hM + pN)z + (d + iM + qN) = 0.$$

Volendo ora eliminare la x e la y, suppongo

$$a + fM + mN = 0, \quad b + gM + nN = 0,$$

determino da queste equazioni i valori corrispondenti di M e di N (n° prec.), li sostituisco, e l'equazione

$$(c + hM + pN)z + (d + iM + qN) = 0,$$

ossia

$$\left[c + \frac{h(an - bm) + p(bf - ag)}{gm - fn}\right]z + \left[d + \frac{i(an - bm) + q(bf - ag)}{gm - fn}\right] = 0,$$

essendo priva delle x, y, sarà la richiesta. Se fosse stato domandato di eliminare le x, z, avrei supposto

$$a + fM + mN = 0, \quad c + hM + pN = 0,$$

onde mi risultasse l'equazione

$$(b + gM + nN)y + (d + iM + qN) = 0,$$

e quindi avrei determinati pel n° prec., e poscia sostituiti, i valori corrispondenti di M e di N. Finalmente, volendo che sussista la sola x, supporrò

$$b + gM + nN = 0, \quad c + hM + pN = 0$$

e poi proseguirò il calcolo, come precedentemente.

113. Se le equazioni date sono quattro con quattro incognite al primo grado, e vogliasi una quinta equazione con un'incognita sola, moltiplico le tre ultime delle equazioni date per le indeterminate M, N, P, in seguito sommo, come nei n^i 111, 112, tutte e quattro le equazioni insieme, prendo nella equazione che risulta i coefficienti delle tre incognite che voglionsi eliminare, li uguaglio allo zero, determino quindi pel n° prec. i valori di M, N, P, li sostituisco, e l'equazione che finalmente me ne risulta, non contenendo che un'incognita sola, quella sarà che domandavasi.

Digitized by Google

Qualunque sia il numero delle equazioni, e qualunque quello delle incognite, col metodo accennato potremo sempre ottenere la chiesta eliminazione, purchè le incognite montino solamente al primo grado; che se esse lo superano, conviene ricorrere ad altro metodo, qual'è il seguente.

114. *Date le due equazioni*

$$Ay^m + By^{m-1} + Cy^{m-2} + Dy^{m-3} + \cdots = 0,$$
$$ay^n + by^{n-1} + cy^{n-2} + dy^{n-3} + \cdots = 0,$$

nelle quali i coefficienti A, B, C, ...; a, b, c, ... *non sono che tante funzioni della* x, *eliminare dalle medesime l'incognita* y.

Prima d'intraprendere l'operazione conviene distinguere due casi principalmente: o $m = n$, o $m > n$. Sia primieramente $m = n$, ed

$$Ay^m + By^{m-1} + Cy^{m-2} + Dy^{m-3} + \cdots = 0,$$
$$ay^m + by^{m-1} + cy^{m-2} + dy^{m-3} + \cdots = 0$$

siano le due equazioni date.

In questa ipotesi, comincisi dal moltiplicare la seconda equazione per A, sottraggasi dalla prima moltiplicata per a, e ne risulterà una terza, nella quale il massimo esponente sarà $m - 1$. Di nuovo si moltiplichi la seconda delle equazioni proposte per $Ay + B$, si sottragga dall'altra moltiplicata per $ay + b$, e ne nascerà una quarta, in cui $m - 1$ esprimerà il massimo esponente. In simil modo moltiplicata la seconda equazione per

$$Ay^2 + By + C,$$

e sottratta dall'altra moltiplicata per

$$ay^2 + by + c,$$

ne avrò una quinta parimenti del grado $m - 1$. Se continuerò la stessa operazione, adoperando successivamente i moltiplicatori

$$Ay^3 + By^2 + Cy + D, \qquad ay^3 + by^2 + cy + d;$$
$$Ay^4 + By^3 + Cy^2 + Dy + E, \qquad ay^4 + by^3 + cy^2 + dy + e;$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

finchè essi moltiplicatori divengano del grado $m - 1$, è visibile che oltre le due proposte otterremo un numero m di equazioni, ciascuna della forma

$$\alpha y^{m-1} + \beta y^{m-2} + \gamma y^{m-3} + \cdots = 0,$$

e in ciascuna delle quali non si conterranno che le prime $m - 1$ potenze della y. Ora, se si considerano tutte queste potenze come tante incognite differenti del primo grado, abbiamo un numero $m - 1$ d'incognite ed un numero m di equazioni. Dunque, coi semplici metodi della eliminazione delle incognite al primo grado (n^i 111, 112, 113), potremo da queste ottenere una equazione finale in cui manchi totalmente la y, come chiedevasi dal problema.

115. Siano per esempio

$$xy^3 - 2x^2y^2 + 7xy + x^3 - 8 = 0,$$
$$5y^3 + 6xy^2 - 5y + 3x^2 - 6x = 0$$

Digitized by Google

le due equazioni date. Ridotte esse alle due

$$Ay^3 + By^2 + Cy + D = 0,$$
$$ay^3 + by^2 + cy + d = 0,$$

dopo aver supposto

$$A = x, \quad B = -2x^2, \quad C = 7x, \quad D = x^3 - 8,$$
$$a = 5, \quad b = 6x, \quad c = -5, \quad d = 3x^2 - 6x,$$

moltiplico la prima per a, la seconda per A, sottraggo i due risultati

$$Aay^3 + Bay^2 + Cay + Da = 0,$$
$$Aay^3 + bAy^2 + cAy + dA = 0,$$

e ritengo l'avanzo

$$(Ba - bA)y^2 + (Ca - cA)y + (Da - dA) = 0.$$

Fatta in seguito la moltiplicazione delle due equazioni date per

$$ay + b, \quad Ay + B,$$

e avute le due

$$Aay^4 + (Ba + Ab)y^3 + (Ca + Bb)y^2 + (Da + Cb)y + Db = 0,$$
$$Aay^4 + (Ba + Ab)y^3 + (Ac + Bb)y^2 + (Ad + Bc)y + Bd = 0,$$

sottraggo la seconda dalla prima, onde avere

$$(Ca - Ac)y^2 + (Da - Ad + Cb - Bc)y + (Db - Bd) = 0.$$

Moltiplico finalmente per

$$ay^2 + by + c, \quad Ay^2 + By + C,$$

ed ottengo

$$Aay^5 + (Ba + Ab)y^4 + (Ac + Bb + Ca)y^3 + (Da + Cb + Bc)y^2 + (Db + Cc)y + Dc = 0,$$
$$Aay^5 + (Ba + Ab)y^4 + (Ac + Bb + Ca)y^3 + (Ad + Cb + Bc)y^2 + (Bd + Cc)y + Cd = 0;$$

sottraggo come sopra, e ne verrà

$$(Da - Ad)y^2 + (Db - Bd)y + (Dc - Cd) = 0.$$

Suppongo presentemente

$$Ba - bA = f, \quad Ca - cA = g, \quad Da - dA = h, \quad Cb - cB = i,$$
$$Db - Bd = k, \quad Dc - dC = l, \quad y^2 = z,$$

sostituisco nelle tre equazioni ottenute dalle sottrazioni, e avuti i risultati

$$fz + gy + h = 0,$$
$$gz + (h + i)y + k = 0,$$
$$hz + ky + l = 0,$$

elimino da questi la z e la y; li riduco pertanto pel n° 112 alla

$$(f + gP + hQ)z + [g + (h + i)P + kQ]y + (h + kP + lQ) = 0,$$

suppongo

$$f + gP + hQ = 0, \quad g + (h + i)P + kQ = 0,$$

Digitized by Google

ritrovo quindi pel n° 111

$$P = \frac{gh - fk}{gk - h^2 - ih}, \qquad Q = \frac{fh + fi - g^2}{gk - h^2 - ih};$$

sostituisco questi valori nella

$$h + kP + lQ = 0,$$

e l'equazione

$$h + \frac{ghk - fk^2 + fhl + fil - g^2 l}{gk - h^2 - ih} = 0,$$

ossia

$$h^3 + ih^2 - 2gkh - flh + fk^2 - fil + g^2 l = 0,$$

mancante affatto di qualunque incognita fuorchè della x contenuta entro le quantità f, g, ..., sarà essa l'equazione richiesta dall'eliminazione. Per compiere ora il calcolo, non avremo che a porre in luogo delle f, g, h, ... i loro valori

$$Ba - bA, \qquad Ca - cA, \qquad Da - dA, \ldots,$$

e finalmente in luogo delle A, a, B, b, ..., i valori

$$x, \quad 5, \quad -2x^2, \quad 6x, \quad \ldots$$

116. Supponiamo in secondo luogo $m > n$ (n° 114), e sia $n = m - p$, cosicchè le due equazioni date divengano

$$Ay^m + By^{m-1} + Cy^{m-2} + Dy^{m-3} + \cdots = 0,$$
$$ay^{m-p} + by^{m-p-1} + cy^{m-p-2} + dy^{m-p-3} + \cdots = 0.$$

Moltiplico in questo caso la prima equazione per a, e la seconda per Ay^p, onde, fatta la sottrazione di questa da quella, un'altra ne derivi in cui il massimo esponente sia $m - 1$. Moltiplicata di nuovo la seconda delle nostre equazioni per

$$Ay^{p+1} + By^p,$$

sottraggasi dalla prima moltiplicata per

$$ay + b,$$

e ne avremo una quarta del grado $m - 1$. Ottenute così, oltre le due date, altre due equazioni, sostituiscasi in esse il valore y^{m-p} ricavato dalla

$$ay^{m-p} + by^{m-p-1} + cy^{m-p-2} + \cdots = 0$$

in tutti i termini che contengono delle potenze maggiori di y^{m-p-1}; e per tale sostituzione ridotte avremo amendue quest'ultime equazioni ad uno stesso grado $m - p - 1$. Applico pertanto su di esse il metodo di eliminazione del n° 114, e l'ultima equazione che risulta, priva della y, sarà la richiesta.

117. Supposto $m = 3$, $n = 2$, $p = 1$, siano per esempio

$$3y^3 - 6xy^2 + (5q^2 + x^2)y - 6x^3 = 0,$$
$$xy^2 + 6xy - 8x^3 + q^3 = 0$$

le due equazioni date. Ridotte queste, come nel n° 115, alle due

$$Ay^3 + By^2 + Cy + D = 0,$$
$$ay^2 + by + c = 0,$$

Digitized by Google

moltiplico, come qui sotto, in primo luogo la prima di esse per a, la seconda per Ay; secondariamente la prima per $ay + b$, la seconda per $Ay^2 + By$, sottraggo, e avuti i risultati

$$(Ba - bA)y^2 + (Ca - cA)y + Da = 0,$$
$$(Ca - cA)y^2 + (Da + Cb - cB)y + Db = 0,$$

sostituisco in essi, ovunque si può, in luogo di y^2 il suo valore $-\frac{by+c}{a}$ ricavato dalla seconda delle equazioni date; ne verranno così le due

$$(Ab^2 + Ca^2 - Aac - Bba)y + (Da^2 + Abc - Bac) = 0,$$
$$(Abc - Bac + Da^2)y + (Ac^2 - Cac + Dab) = 0,$$

nelle quali la y non monta che al primo grado, e dalle quali per conseguenza, eliminata quest'incognita, ne verrà la

$$(Da^2+Abc-Bac)(Abc-Bac+Da^2)+(Cac-Ac^2-Dab)(Ab^2+Ca^2-Aac-Bba)=0,$$

equazione priva affatto della y, e in cui per conseguenza non dovremo più che sostituire in luogo delle lettere A, a, B, b, ... i valori corrispondenti, ed eseguire le moltiplicazioni accennate

$$\begin{array}{llll} Aay^3 & + Bay^2 & + Cay & + Da = 0 \\ Aay^3 & + bAy^2 & + cAy & = 0 \\ \hline * & (Ba - bA)y^2 + (Ca - cA)y + Da = 0, & & \end{array}$$

$$\begin{array}{llll} Aay^4 + (Ba + bA)y^3 + (Ca + Bb)y^2 & & + (Da + Cb)y & + Db = 0 \\ Aay^4 + (Ba + bA)y^3 + (cA + Bb)y^2 & & + cBy & = 0 \\ \hline * \quad * & (Ca - cA)y^2 + (Da + Cb - cB)y + Db = 0. & & \end{array}$$

118. Varii altri metodi potrebbero esporsi di eliminazione; noi però, oltre il precedente, non n'esporremo che un altro nel Capo che segue, e ciò, perchè è quello che con tutta esattezza ci dimostra, e ci dà il grado, a cui deve ascendere propriamente l'equazione risultante dalla eliminazione. Nei casi particolari poi, alcuni metodi particolari e alcuni artifizii non di rado si presentano, per cui, deviando dal metodo generale, si può di molto facilitare il calcolo; di questo ne vedremo un esempio nel n° 122.

119. Potrebbe il *numero delle equazioni date essere maggiore di due, ed altrettante essere le incognite*. Volendosi in questa supposizione un'equazione con un'incognita sola; supposto k il numero delle equazioni, e così quello delle incognite, facciasi da prima col metodo precedente scomparire una di queste da tutte le equazioni date, combinandole a due a due, per modo che ci risulti un numero $k - 1$ di equazioni con altrettante incognite. In seguito, da queste $k - 1$ equazioni ottenute facciasi nel modo istesso svanire una seconda incognita, riducendosi in tal guisa sì le incognite che le equazioni ad un numero $k - 2$. Proseguo nella maniera medesima ad operare su queste $k - 2$ equazioni, onde ridurle al numero $k - 3$ con $k - 3$ incognite. Finalmente, seguitando sempre ad operare nello stesso modo, e facendo così di mano in mano scemare di

Digitized by Google

uno per volta si il numero delle equazioni che quello delle incognite, è chiaro che per tal modo ci ridurremo ad una equazione finale con un'incognita sola, come era stato domandato dal problema.

120. Grande è l'uso della eliminazione per la soluzione dei problemi pratici, come si è veduto in tutto il decorso dell'algebra; ma essa serve pur anche assai bene per la soluzione del problema seguente.

121. *Data un'equazione, che contenga dei radicali, liberarla da questi.*

Suppongasi ciascun radicale contenuto nell'equazione proposta uguale ad una nuova incognita; e quanti sono i radicali, tante nuove equazioni quindi nasceranno, le quali non avendo che due termini per cadauna, potranno sempre liberarsi dalla irrazionalità con elevarle alle dovute potenze; ciò fatto, e sostituite nella equazione data in luogo dei radicali le indeterminate corrispondenti, onde convertire anche questa in una equazione razionale, avremo così tante equazioni razionali, più una, quanti sono i radicali supposti, e quante sono le nuove incognite. Eliminate dunque col metodo insegnato tutte queste incognite, giungeremo ad un'equazione priva delle medesime, e priva per conseguenza dei radicali, la quale altro non sarà che l'equazione data resa razionale.

122. Se per esempio

$$y = \sqrt[3]{a} - \sqrt{x}$$

sia l'equazione data, supposto

$$\sqrt[3]{a} = z, \quad \sqrt{x} = u,$$

avremo le tre equazioni razionali

$$a = z^3, \qquad x = u^2, \qquad y = z - u,$$

dall'ultima delle quali avendosi

$$z = y + u,$$

sostituito questo valore nella prima, essa diverrà

$$a = (y + u)^3,$$

ossia

$$a = y^3 + 3y^2u + 3yu^2 + u^3;$$

ma

$$u^2 = x;$$

dunque sostituendo avremo

$$a = y^3 + 3y^2u + 3yx + xu = y^3 + 3yx + (3y^2 + x)u,$$

e però

$$u = \frac{a - y^3 - 3yx}{3y^2 + x};$$

onde finalmente sarà

$$x = \left(\frac{a - y^3 - 3yx}{3y^2 + x}\right)^2,$$

equazione, come si vede, tra le x, y, a, la quale, essendo identica con la

$$y = \sqrt[3]{a} - \sqrt{x},$$

più non contiene radicali. Il metodo, ora praticato, onde eliminare le z, u dalle $a = z^3$, $x = u^2$, $y = z - u$, vedesi che fa verificare quanto si disse sull'ultimo del n° 118.

Digitized by Google

123. *Acchè, tolti i radicali dall'equazione data, elevasi essa di grado? cosicchè, per esempio, la y, che nella*

$$y = \sqrt[3]{a} - \sqrt{x}$$

(n° prec.) *è al primo grado, nella*

$$x = \left(\frac{a - y^3 - 3xy}{3y^2 + x}\right)^2$$

ascende al sesto?

Conosceremo la ragione di questo osservando che i radicali sono sempre essenzialmente tante funzioni multiformi (n° 6), e osservando che tutti i loro valori devono contenersi implicitamente (n° 5) nell'ultima equazione razionale che ci risulta. Il proposto esempio ci rischiarerà la cosa. Essendo $\sqrt[3]{a}$ una funzione triplice della a, e $\sqrt{x}$ una funzione doppia della x, ossia avendo la radice terza di a tre valori, la radice seconda di x avendone due, dalla combinazione di questi con quelli ne viene, che la quantità $\sqrt[3]{a} - \sqrt{x}$, e però la y, avrà propriamente sei valori diversi. Ma l'equazione razionale

$$x = \left(\frac{a - y^3 - 3xy}{3y^2 + x}\right)^2$$

è chiaro altro non essere, infine, che l'equazione completa in y, di cui essendo radice in tutta la sua estensione la

$$\sqrt[3]{a} - \sqrt{x},$$

vengono perciò ad essere radici tutti sei i valori di questa funzione. Tale equazione adunque dovrà risultare del sesto grado.

Un raziocinio simile a questo potremo sempre applicarlo a tutti gli altri casi.

Digitized by Google

CAPO VII.

ALTRO METODO DI ELIMINAZIONE, E DELLA TRASFORMAZIONE RELATIVA ALLE FUNZIONI IRRAZIONALI.

---

124. Essendo

$$Ay^m + By^{m-1} + Cy^{m-2} + Dy^{m-3} + \cdots = 0,$$
$$ay^n + by^{n-1} + cy^{n-2} + dy^{n-3} + \cdots = 0$$

le due equazioni date, quali le abbiamo supposte al n° 114, chiamiamo per semplicità di scrivere $P = 0$ la prima, $Q = 0$ la seconda. Prima d'intraprendere ad eliminare da esse la y, riflettiamo:

1° che *l'operazione della eliminazione non può eseguirsi, se non nella supposizione che il valore della x e della y sia lo stesso in amendue le* $P = 0$, $Q = 0$, e però che, determinata con l'eliminazione l'equazione con la sola x, le radici di questa sostituite in amendue le $P = 0$, $Q = 0$ devono darci per y un valore medesimo;

2° che *la determinazione di questa equazione in x viene richiesta senza che si conosca il valore delle radici della* $P = 0$, $Q = 0$ *e senza che si ricorra alla soluzione di alcuna equazione di grado maggiore del primo.*

125. *L'equazione di eliminazione deve uguagliare il prodotto dei risultati che si hanno dal primo membro della* $P = 0$, *sostituendo in essa successivamente i valori della y ricavati dalla* $Q = 0$.

Infatti: chiamati y', y'', y''', y^{IV}, ..., $y^{(n)}$ questi valori, sostituisco il primo di loro nella $P = 0$; essa diverrà perciò un'equazione contenente la sola x, e che supporrò $P' = 0$; siano

$$\alpha, \quad \beta, \quad \gamma, \ldots$$

le radici di quest'ultima equazione, se ciascuna di esse si sostituirà nelle $P = 0$, $Q = 0$, dovranno queste divenire due equazioni in y aventi una stessa radice comune y' (n° prec., 1°).

Pongasi in secondo luogo nella $P = 0$ invece della y la y'', e chiamata $P'' = 0$ l'equazione con la sola x che ne proviene, siano

$$\alpha', \quad \beta', \quad \gamma', \ldots$$

le sue radici; cadauna di queste, collocate in luogo di x nelle $P = 0$, $Q = 0$, ci darà due equazioni dotate della comune radice y''.

Digitized by Google

Così proseguendo, a sostituire nella $P = 0$ i valori y''', y^{IV}, ..., ci verranno tante equazioni $P''' = 0$, $P^{IV} = 0$, ... in x, le cui radici

$$\alpha'', \ \beta'', \ \gamma'', \ \ldots; \ \alpha''', \ \beta''', \ \gamma''', \ \ldots,$$

sostituite nelle $P = 0$, $Q = 0$, ci daranno corrispondentemente tante equazioni di cui saranno radici comuni le y''', y^{IV}, ...

Ciò posto, che cerchiam noi con la eliminazione? non altro di certo, pel n° prec., 1°, se non quella equazione in x, di cui siano radici tutte le quantità

$$\alpha, \ \beta, \ \gamma, \ \ldots; \ \alpha', \ \beta', \ \gamma', \ \ldots; \ \alpha'', \ \beta'', \ \gamma'', \ \ldots.$$

Ora, pel n° 22 avendosi

$$\begin{aligned} P' &= (x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)\ldots, \\ P'' &= (x-\alpha')(x-\beta')(x-\gamma')\ldots, \\ P''' &= (x-\alpha'')(x-\beta'')(x-\gamma'')\ldots, \\ P^{IV} &= (x-\alpha''')(x-\beta''')(x-\gamma''')\ldots, \end{aligned}$$

ne viene

$$\begin{aligned} P'P''P'''P^{IV}\ldots = {} & (x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)\ldots \\ & (x-\alpha')(x-\beta')(x-\gamma')\ldots \\ & (x-\alpha'')(x-\beta'')(x-\gamma'')\ldots \\ & (x-\alpha''')(x-\beta''')(x-\gamma''')\ldots. \end{aligned}$$

Dunque, l'equazione $P'P''P'''P^{IV}\ldots = 0$ quella essendo che ha per radici tutte le sovraccennate quantità α, β, ... (n° 22), essa sarà l'equazione proveniente dalla eliminazione. C. D. D.

126. Nascendo P' per la sostituzione in P di y', P'' per la sostituzione in P di y'', e così di seguito (n° prec.), ne viene che il prodotto

$$P'P''P'''P^{IV}\ldots$$

dovrà essere una funzione delle

$$y', \ y'', \ y''', \ y^{IV}, \ \ldots$$

ed una funzione della forma

$$f(y', y'', y''', y^{IV}, \ldots),$$

dimostrandosi ciò facilmente con lo stesso raziocinio del n° 105.

Dunque pel n° 101 essendo sempre una simile funzione determinabile col mezzo dei coefficienti dell'equazione da cui dipendono le

$$y', \ y'', \ y''', \ \ldots,$$

senza che si debba risolvere equazione alcuna di grado maggiore del primo, ne segue che la quantità

$$P'P''P'''P^{IV}\ldots$$

potrà sempre per tal modo determinarsi col mezzo dei coefficienti della $Q = 0$.

127. *Eliminare la y dalle due*

$$\begin{aligned} Ay^m + By^{m-1} + Cy^{m-2} + \cdots &= P = 0, \\ ay^n + by^{n-1} + cy^{n-2} + \cdots &= Q = 0. \end{aligned}$$

Digitized by Google

Poichè, ritenute le denominazioni precedenti, l'equazione

$$P' P'' P''' P^{IV} \ldots = 0$$

quella si è che deve nascere dalla eliminazione (n° 125), e poichè il primo membro di questa equazione, pel n° prec., è sempre determinabile, senza ricorrere alla soluzione di alcuna equazione di grado superiore, come veniva difatti richiesto dal n° 124, 2°, comincio dal sostituire nella prima equazione $P = 0$ le quantità indeterminate

$$y', \quad y'', \quad y''', \quad y^{IV}, \ldots;$$

moltiplico insieme gli n risultati

$$P', \quad P'', \quad P''', \quad P^{IV}, \ldots;$$

dal prodotto

$$P' P'' P''' P^{IV} \ldots,$$

operando come nel n° 105, escludo le

$$y, \quad y'', \quad y''', \quad y^{IV}, \ldots,$$

introducendovi i coefficienti

$$a, \quad b, \quad c, \ldots,$$

e il risultato, che dopo tutto ciò ne proviene, uguagliato allo zero formerà l'equazione domandata.

128. Siano per esempio

$$Ay^3 + By^2 + Cy + D = 0, \qquad ay^2 + by + c = 0$$

le due equazioni date, i coefficienti

$$A, \quad a, \quad B, \quad b, \ldots$$

delle quali siano funzioni qualsivogliano delle x.

Volendosi da queste eliminare la y, sostituisco nella prima le quantità y', y'' considerate come radici della seconda, moltiplico fra loro i due risultati

$$Ay'^3 + By'^2 + Cy' + D, \qquad Ay''^3 + By''^2 + Cy'' + D,$$

e avremo il prodotto

$$\begin{aligned} &A^2 y'^3 y''^3 + AB(y'^2 y''^3 + y'^3 y''^2) + AC(y' y''^3 + y'^3 y'') + AD(y'^3 + y''^3) \\ &+ B^2 y'^2 y''^2 + BC(y' y''^2 + y'^2 y'') + BD(y'^2 + y''^2) + C^2 y' y'' + CD(y' + y'') + D^2 \\ &= A^2 (y' y'')^3 + AB \sum y^2 y^3 + AC \sum y y^3 + AD \sum y^3 + B^2 (y' y'')^2 + BC \sum y y^2 \\ &+ BD \sum y^2 + C^2 y' y'' + CD \sum y + D^2. \end{aligned}$$

Ma pei n^i 31, 35, 41 abbiamo

$$y' y'' = \frac{c}{a}, \quad \sum y = -\frac{b}{a}, \quad \sum y^2 = \frac{b^2 - 2ac}{a^2},$$

$$\sum y^3 = \frac{3abc - b^3}{a^3}, \quad \sum y y^2 = -\frac{bc}{a^2}, \quad \sum y y^3 = \frac{b^2 c - 2ac^2}{a^3}, \quad \sum y^2 y^3 = -\frac{bc^2}{a^3}.$$

Dunque, sostituendo, riducendo ed uguagliando allo zero, otterremo

$$\begin{aligned} &A^2 c^3 - ABbc^2 + ACb^2 c - 2ACac^2 + 3ADabc - ADb^3 + B^2 ac^2 - BCabc \\ &+ BDab^2 - 2BDa^2 c + C^2 a^2 c - CDa^2 b + D^2 a^3 = 0, \end{aligned}$$

e questa sarà l'equazione proveniente dalla eliminazione.

Digitized by Google

129. *Ciascun termine della equazione di eliminazione deve esser formato dai coefficienti*

$$A,\ a,\ B,\ b,\ C,\ c,\ \ldots$$

delle equazioni date $P = 0$, $Q = 0$ *elevati insieme ad un numero* $m+n$ *di dimensioni.*

Invece di supporre risolta nel n° 125 l'equazione $Q = 0$ e di supporre collocate successivamente nel primo membro della $P = 0$, invece della y, le sue n radici, potevamo viceversa supporre risolta la $P = 0$ e collocate nella $Q = 0$, in luogo della y, le m radici di questa; in allora replicato lo stesso discorso del n° 125, avrebbesi ritrovato, nella maniera medesima, che il primo membro della equazione di eliminazione deve essere uguale al prodotto delle m quantità Q', Q'', Q''', ..., $Q^{(m)}$; ma questo primo membro è anche uguale al prodotto delle n quantità P', P'', P''', ..., $P^{(n)}$ (n° 125); dunque verrà esso primo membro rappresentato, tanto da

$$P'\,P''\,P'''\,\ldots\,P^{(n)},$$

come da

$$Q'\,Q''\,Q'''\,\ldots\,Q^{(m)}.$$

Ora, nel risultato

$$P'\,P''\,P'''\,\ldots\,P^{(n)}$$

è chiaro che i coefficienti della $P = 0$ devono dapertutto formare dei prodotti di tante dimensioni quanti sono i fattori

$$P',\ P'',\ P''',\ \ldots,\ P^{(n)},$$

cioè un numero n; e nell'altro

$$Q'\,Q''\,Q'''\,\ldots\,Q^{(m)}$$

deggiono i coefficienti della $Q = 0$ formare dei prodotti di tante dimensioni quante sono le quantità

$$Q',\ Q'',\ Q''',\ \ldots,\ Q^{(m)},$$

cioè un numero m. Dunque il primo membro dell'equazione di eliminazione, dovendo in tutti i suoi termini contenere insieme i coefficienti della $P = 0$ ad n dimensioni e i coefficienti della $Q = 0$ ad m dimensioni, dovrà evidentemente contenere sì gli uni che gli altri coefficienti considerati insieme alle dimensioni $m + n$. C. D. D.

Così, nell'esempio del n° prec. l'equazione di eliminazione contiene i coefficienti della prima equazione data a 2 dimensioni, quei della seconda a 3 dimensioni, e ciascun termine poi in totale viene ad essere di $3 + 2 = 5$ dimensioni.

130. *Espresso col numero* h *il massimo esponente della* x *contenuta entro i coefficienti* A, B, C, ... *della* $P = 0$, *espresso con* k *l'esponente massimo della* x *nei coefficienti* a, b, c, ... *della* $Q = 0$, *io dico che il grado dell'equazione di eliminazione non può mai superare il numero* $hn + km$.

Questa è una chiara conseguenza del n° prec. Imperciocchè, essendo nell'equazione di eliminazione i coefficienti A, B, C, ... uniti fra loro ad n dimensioni, non potrà in essi contenersi la x ad un grado maggiore di hn; così i coefficienti a, b, c, ... venendo a combinarsi fra loro ad m dimensioni, la x in questi ascenderà al più ad un grado km. Moltiplicando adunque, come si vede effettuarsi nella equazione di elimina-

Digitized by Google

zione, i risultati che si hanno nell'operazione dai coefficienti A, B, C, ... con i risultati che si hanno dagli altri a, b, c, ..., è chiaro che la x, fatta la moltiplicazione, non potrà infine ascendere, tutt'al più, che al grado $hn + km$. Dunque, etc.

Potrebbe però darsi benissimo che l'equazione di eliminazione risultasse di un grado minore di $hn + km$. Ciò dipenderà dalla diversa combinazione dei coefficienti A, B, C, ... e degli altri a, b, c, ... fra di loro.

131. *Date le tre equazioni* $P = 0$, $Q = 0$, $R = 0$ *con le tre incognite* x, y, z, *eliminando da esse le due* y, z, *qual sarà l'equazione con la sola* x, *che ne risulta?*

Supponiamo risolta l'equazione $R = 0$, considerando come incognita la sola z, e siano

$$z', \quad z'', \quad z''', \ldots$$

le sue radici. Poniamo ciascuna di queste in luogo della z nelle $P = 0$, $Q = 0$, e chiaminsi

$$P_1 = 0, \quad Q_1 = 0; \quad P_2 = 0, \quad Q_2 = 0; \quad P_3 = 0, \quad Q_3 = 0, \ldots$$

i risultati corrispondenti. Supponiamo, che vengano risolte tutte le

$$Q_1 = 0, \quad Q_2 = 0, \quad Q_3 = 0, \quad \ldots$$

nella supposizione di y sola incognita, e siano

$$\text{(I)} \qquad \begin{cases} y'_1, & y''_1, & y'''_1, & y^{iv}_1, & \ldots \\ y'_2, & y''_2, & y'''_2, & y^{iv}_2, & \ldots \\ y'_3, & y''_3, & y'''_3, & y^{iv}_3, & \ldots \end{cases}$$

le rispettive radici. Tra queste radici sostituiscansi quelle della prima riga nella $P_1 = 0$, quelle della seconda nella $P_2 = 0$, quelle della terza nella $P_3 = 0$, e così di seguito; i risultati che ne vengono chiaminsi

$$\text{(II)} \qquad \begin{cases} P'_1 = 0, & P''_1 = 0, & P'''_1 = 0, & P^{iv}_1 = 0, \ldots, \\ P'_2 = 0, & P''_2 = 0, & P'''_2 = 0, & P^{iv}_2 = 0, \ldots, \\ P'_3 = 0, & P''_3 = 0, & P'''_3 = 0, & P^{iv}_3 = 0, \ldots, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \end{cases}$$

e questi, come si disse al n° 125, troveremo altro non essere che tante equazioni con la sola x, le radici delle quali sostituite rispettivamente nelle

$$P_1 = 0, \quad Q_1 = 0, \quad P_2 = 0, \quad Q_2 = 0, \quad P_3 = 0, \quad Q_3 = 0, \ldots$$

ci daranno in corrispondenza, tanto dalle equazioni espresse con le P, quanto dalle espresse con le Q, i medesimi valori (I) della y. Poniamo questi valori della y, e i corrispondenti della x nelle

$$P = 0, \quad Q = 0, \quad R = 0;$$

da tutte e tre queste equazioni, replicato il discorso istesso del cit. n° 125, vedesi che si ricaveranno gli stessi valori

$$z', \quad z'', \quad z''', \ldots$$

della z. Se, a cagion d'esempio, chiamata α una delle radici della $P'_1 = 0$, collochiamo questa in luogo di x, sì in $P_1 = 0$ che in $Q_1 = 0$, tanto l'una che l'altra di queste

Digitized by Google

equazioni avranno la radice comune di y_1'; e conosciuto il valore di questa, se porremo essa ed α invece di x nelle tre

$$P = 0, \quad Q = 0, \quad R = 0,$$

ciascuna di queste equazioni conterrà la stessa radice z'. In conseguenza adunque di tutto ciò, le equazioni (II) conterranno separatamente le radici tutte dell'equazione di eliminazione (n° 125) e quindi, per quanto si è detto nel citato n° 125, il primo membro di tale equazione sarà uguale al prodotto

$$P_1' P_2' P_3' \ldots P_1'' P_2'' P_3'' \ldots P_1''' P_2''' P_3''' \ldots P_1^{iv} P_2^{iv} P_3^{iv} \ldots .$$

132. Se invece di risolvere le

$$Q_1 = 0, \qquad Q_2 = 0, \qquad Q_3 = 0, \ldots,$$

onde avere i valori (I) della y, risolte si fossero le

$$P_1 = 0, \qquad P_2 = 0, \qquad P_3 = 0, \ldots,$$

e i valori che ne sarebbero risultati della y si fossero sostituiti nelle equazioni espresse con le Q, supposte delle denominazioni simili alle (II), sarebbesi ritrovato, come nel n° 131, che il primo membro dell'equazione di eliminazione è anche uguale al prodotto

$$Q_1' Q_2' Q_3' \ldots Q_1'' Q_2'' Q_3'' \ldots Q_1''' Q_2''' Q_3''' \ldots .$$

Egualmente, se nella considerazione dell'incognita z, invece di risolvere la $R = 0$, risolta si fosse l'una o l'altra delle $P = 0$, $Q = 0$, e si fosse in seguito proseguito il discorso medesimo del n° prec., ritenendo all'ultimo l'equazione $R = 0$, avremmo ritrovato essere il primo membro della nostra equazione anche uguale al prodotto

$$R_1' R_2' R_3' \ldots R_1'' R_2'' R_3'' \ldots R_1''' R_2''' R_3''' \ldots .$$

133. *Eliminare dalle date* $P = 0$, $Q = 0$, $R = 0$ *le due incognite* y, z.

Col metodo del n° 127 elimino dalle $P = 0$, $R = 0$ la z, e mi verrà l'equazione

$$P_1 P_2 P_3 \cdots = 0$$

(n^i 127, 131); faccio l'eliminazione istessa dalle $Q = 0$, $R = 0$, e pei citati n^i 127, 131 otterremo l'equazione

$$Q_1 Q_2 Q_3 \cdots = 0.$$

Ora, supposto

$$P_1 P_2 P_3 \cdots = T, \qquad Q_1 Q_2 Q_3 \cdots = V,$$

mediante lo stesso n° 127 elimino la y dalle due $T = 0$, $V = 0$, e il risultato

$$T' T'' T''' T^{iv} \cdots = 0,$$

che ne otterremo, sarà esattamente la equazione di eliminazione domandata. Imperciocchè, avendosi per la ipotesi

$$T' = P_1' P_2' P_3' \ldots, \qquad T'' = P_1'' P_2'' P_3'' \ldots,$$

$$T''' = P_1''' P_2''' P_3''' \ldots, \qquad T^{iv} = P_1^{iv} P_2^{iv} P_3^{iv} \ldots,$$

sarà

$$T' T'' T''' T^{iv} \cdots = P_1' P_2' P_3' \ldots P_1'' P_2'' P_3'' \ldots P_1''' P_2''' P_3''' \ldots P_1^{iv} P_2^{iv} P_3^{iv} \ldots;$$

Digitized by Google

ma pel n° 131 quest'ultimo prodotto ci esprime esattamente il primo membro della chiesta equazione di eliminazione. Dunque, etc.

Se invece di eliminare la z dalle due $P = 0$, $R = 0$ e dalle $Q = 0$, $R = 0$, fatta avessimo l'eliminazione istessa dalle $P = 0$, $Q = 0$ e dalle $Q = 0$, $R = 0$, oppure dalle $P = 0$, $Q = 0$ e dalle $P = 0$, $R = 0$, pel n° prec. si vede che saremmo giunti sempre alla medesima equazione finale avente la sola x.

134. Se vengano proposte quattro, cinque, etc. equazioni con un numero corrispondente d'incognite, potremo su di esse applicare le stesse riflessioni dei n^i prec., e determinare così qual debba essere l'ultima equazione in cui più non contengasi che un'incognita sola.

135. *Trasformare l'equazione*

$$x^m + Ax^{m-1} + Bx^{m-2} + Cx^{m-3} + \cdots = 0$$

in un'altra, di cui sia radice la

$$f(x')(x'')(x''') \ldots (x^{(m)})$$

funzione irrazionale [5].

Prima d'intraprendere la soluzione di questo problema generale, prendiamo per maggior chiarezza a considerare il seguente caso particolare.

Sia

$$x^2 + Ax + B = 0$$

l'equazione data, ed

$$ax' + b\sqrt{x''}$$

la data funzione irrazionale. Facciamo in questa funzione tutte le permutazioni possibili fra le x', x''; avremo i due risultati

$$ax' + b\sqrt{x''}, \qquad ax'' + b\sqrt{x'},$$

e questi, se la funzione fosse razionale, sarebbero tutte le radici della trasformata (n° 93); ma, essendo la funzione irrazionale, entrano in essa a considerarsi anche i diversi valori dei radicali. Affine dunque di avere tutte le radici, e però il grado della trasformata, converrà tener conto sì delle permutazioni, come ancora dei valori tutti dei radicali. Ciò posto, chiamo y l'incognita della trasformata, suppongo

$$y = ax' + b\sqrt{x''},$$

tolgo da questa equazione per mezzo del n° 121 il radicale $\sqrt{x''}$, ed avremo, ciò fatto,

$$y^2 - 2ax'y + a^2x'^2 - b^2x'' = 0.$$

Nella maniera medesima, supposto

$$y = ax'' + b\sqrt{x'},$$

otterremo

$$y^2 - 2ax''y + a^2x''^2 - b^2x' = 0.$$

Ora la prima di queste due equazioni razionali in y comprende tutti i valori di quest'incognita che, corrispondendo alla permutazione

$$ax' + b\sqrt{x''},$$

dipendono dai valori diversi di $\sqrt{x''}$ (n° 123), e la seconda comprende tutti i valori cor-

Digitized by Google

rispondenti all'altra permutazione

$$a x'' + b\sqrt{x'},$$

e dipendenti dai valori di $\sqrt{x'}$ (cit. n° 123). Dunque in amendue queste equazioni tutte comprendendosi le radici della trasformata, avrò la trasformata medesima facendo ed uguagliando allo zero il prodotto dei loro primi due membri, facendo cioè

$$y^4 - 2a(x' + x'')y^3 + [a^2(x'^2 + x''^2) + 4a^2x'x'' - b^2(x' + x'')]y^2$$
$$+ [2ab^2(x'^2 + x''^2) - 2a^3(x'x'^2 + x'^2x'')]y + a^4x'^2x''^2 - a^2b^2(x'^3 + x''^3) + b^4x'x'' = 0.$$

Considerando presentemente i coefficienti di quest'ultima equazione, veggo che essi altro non sono che tante funzioni razionali delle x', x'' della forma $f(x', x'')$; potranno dunque sempre determinarsi mediante i n^i 31, 35, 41. Avendosi difatti

$$\sum x = -A, \qquad \sum x^2 = A^2 - 2B, \qquad \sum x^3 = 3AB - A^3,$$
$$x'x'' = B, \qquad \sum x x^2 = \sum x \sum x^2 - \sum x^3 = -AB,$$

sostituisco, e, determinati così i coefficienti, avremo l'equazione

$$y^4 + 2aAy^3 + [a^2(A^2 - 2B) + 4a^2B + b^2A]y^2$$
$$+ [2ab^2(A^2 - 2B) + 2a^3AB]y + a^4B^2 - a^2b^2(3AB - A^3) + b^4B = 0,$$

la quale non sarà che la trasformata richiesta.

Poichè la seconda delle due precedenti equazioni, cioè la

$$y^2 - 2a x'' y + a^2 x''^2 - b^2 x' = 0,$$

altro non è che la prima

$$y^2 - 2a x' y + a^2 x'^2 - b^2 x'' = 0$$

cambiata la x' in x'', ne segue che, ottenuta questa, potevamo subito ricavar quella con la semplice permutazione di x' in x'', senza ricorrere alla

$$y = a x'' + b\sqrt{x'}.$$

136. Passiamo presentemente al caso generale propostoci nel n° prec. Sia la supposta funzione irrazionale

$$f(x')(x'')(x''') \ldots (x^{(m)}) = y;$$

tolgo da questa equazione i radicali, e ne verrà un'equazione in y della forma

$$y^p + F'y^{p-1} + G'y^{p-2} + H'y^{p-3} + \cdots = 0,$$

in cui i coefficienti

$$F', \quad G', \quad H', \quad \ldots$$

non sono che tante funzioni razionali delle

$$x', \quad x'', \quad x''', \quad \ldots$$

dipendenti dalla

$$f(x')(x'')(x''') \ldots (x^{(m)}).$$

Ora, invece di fare, come si è accennato sul principio del precedente caso particolare, tutte le permutazioni della

$$f(x')(x'')(x''') \ldots (x^{(m)}),$$

e di trovare le corrispondenti equazioni razionali (n° prec.), facciamo per maggiore fa-

Digitized by Google

cilità, come si è soggiunto sul fine del cit. n° prec., simili permutazioni nei coefficienti

$$F', \quad G', \quad H', \ldots,$$

e, chiamati

$$F'', \quad G'', \quad H'', \ldots; \quad F''', \quad G''', \quad H''', \ldots; \quad F^{(\pi)}, \quad G^{(\pi)}, \quad H^{(\pi)}, \ldots$$

i rispettivi risultati che ne vengono, siano, compresavi la prima,

$$\text{(III)} \qquad \begin{cases} y^p + F' y^{p-1} + G' y^{p-2} + H' y^{p-3} + \cdots = 0, \\ y^p + F'' y^{p-1} + G'' y^{p-2} + H'' y^{p-3} + \cdots = 0, \\ y^p + F''' y^{p-1} + G''' y^{p-2} + H''' y^{p-3} + \cdots = 0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ y^p + F^{(\pi)} y^{p-1} + G^{(\pi)} y^{p-2} + H^{(\pi)} y^{p-3} + \cdots = 0 \end{cases}$$

le corrispondenti equazioni. Se di numero π suppongansi le varie permutazioni della

$$f(x')(x'')(x''') \ldots (x^{(m)}),$$

è chiaro che di numero π saranno ancora tutte le permutazioni diverse di ciascun coefficiente F', G', H', ...; e però, essendo in numero π le trovate equazioni razionali, fino a π giungeranno gli apici sovrapposti ai loro coefficienti.

Moltiplico fra di loro i primi membri di tutte queste equazioni (III), e faccio il prodotto che ne risulta

$$\text{(IV)} \qquad y^{p\pi} + My^{p\pi-1} + Ny^{p\pi-2} + Py^{p\pi-3} + \cdots = 0.$$

Poichè l'eseguire nelle equazioni (III), ossia nei loro coefficienti, le diverse permutazioni fra le

$$x', \quad x'', \quad x''', \ldots$$

non altro effetto produce che di cambiare l'una equazione nell'altra, ne segue evidentemente che il prodotto di tutti i primi membri di queste equazioni, cioè il primo membro della (IV), ossia i suoi coefficienti M, N, P, ..., saranno tante funzioni delle

$$x', \quad x'', \quad x''', \ldots$$

tali che restano sempre le medesime, qualunque permutazione eseguiscasi tra queste

$$x', \quad x'', \quad x''', \ldots,$$

e saranno perciò tante funzioni razionali della forma

$$f(x', x'', x''', \ldots x^{(m)}).$$

Ma tali funzioni sono sempre determinabili col mezzo dei coefficienti A, B, C, ... della data. Eseguisco pertanto simili determinazioni e, conosciuti così i coefficienti M, N, P, ..., avremo determinata l'equazione (IV), la quale per conseguenza non sarà che la trasformata richiesta. Abbiamo già nel n° prec. un esempio di questa operazione.

137. Data la funzione

$$y = f(x')(x'')(x''') \ldots (x^{(m)}),$$

per conoscere il grado della trasformata è chiaro che basta determinare il numero dei valori della y che dipendono dalla moltiplicità dei valori dei radicali in essa contenuti,

Digitized by Google

determinare il numero delle permutazioni fra le

$$x', \quad x'', \quad x''', \ldots$$

nella stessa

$$f(x')(x'')(x''') \ldots (x^{(m)}),$$

e, chiamato il primo di questi numeri p, il secondo π, il loro prodotto $p\,\pi$ rappresenterà il grado della trasformata. Se la funzione data fosse stata razionale, il solo numero π avrebbe rappresentato questo grado (n° 92); quindi si vede, di quanto ascender deve la trasformata, allorchè la funzione proposta è irrazionale.

Digitized by Google

CAPO VIII.

DELLA DETERMINAZIONE DELLE FUNZIONI TRA LE RADICI DI UNA DATA EQUAZIONE ALGEBRAICA, DIPENDENTEMENTE DA ALTRE FUNZIONI PROPOSTE FRA LE RADICI MEDESIME.

138. Supponiamo che una data funzione riducasi all'espressione $\frac{0}{0}$, come per esempio la quantità

$$\frac{ax^2 - ax^2}{bx - c - bx + c},$$

la quale, qualunque siasi la x, è sempre $= \frac{0}{0}$, oppure l'altra

$$\frac{x^2 - (a+b)x + ab}{x^2 - b^2},$$

di cui se si voglia il valore nella supposizione di $x = b$, ci risulta

$$\frac{b^2 - (a+b)b + ab}{b^2 - b^2} = \frac{0}{0}.$$

Ora quale sarà il valore di una simile espressione $\frac{0}{0}$?

Sia $\frac{0}{0} = z$; sarà z il vero valore di questa espressione, mentre moltiplicando la z, la quale non è che un quoto del divisore 0, restituiscasi il dividendo, che è parimenti 0; ma qualunque sia la z, è sempre $0 \times z = 0$; dunque potrà in generale la z avere un valore qualunque, e sarà sempre $= \frac{0}{0}$. Pertanto l'espressione $\frac{0}{0}$ sarà per sè una quantità indeterminata, come è indeterminata la z; e ciò è vero in generale, come nel primo degli esempi accennati; ma nei diversi casi particolari avrà la z, e però l'espressione $\frac{0}{0}$ valori particolari; così, nell'esempio secondo, mentre $x = b$, la supposta frazione, e quindi la $z = \frac{0}{0}$, acquistar deve valore particolare, e acquista difatti, come vedremo fra poco, il valore $\frac{b-a}{2b}$.

139. Abbiasi la frazione

$$\frac{Ax^m + Bx^{m-1} + Cx^{m-2} + \cdots}{ax^n + bx^{n-1} + cx^{n-2} + \cdots} = z,$$

e supponiamo che, posta la quantità α *in luogo di* x, *la* z *divenga* z', *e sia*

$$A\alpha^m + B\alpha^{m-1} + C\alpha^{m-2} + \cdots = 0,$$
$$a\alpha^n + b\alpha^{n-1} + c\alpha^{n-2} + \cdots = 0,$$

Digitized by Google

cosicchè

$$z' = \frac{0}{0}.$$

In questa supposizione, io dico che sarà

$$z' = \frac{mA\alpha^{m-1} + (m-1)B\alpha^{m-2} + (m-2)C\alpha^{m-3} + \cdots}{naa^{n-1} + (n-1)b\alpha^{n-2} + (n-2)c\alpha^{n-3} + \cdots}.$$

Essendo α radice delle due equazioni

$$Ax^m + Bx^{m-1} + Cx^{m-2} + \cdots = 0, \qquad ax^n + bx^{n-1} + cx^{n-2} + \cdots = 0,$$

e però, divisa la prima per A, la seconda per a, e supposto per semplicità

$$\frac{B}{A} = F, \quad \frac{C}{A} = G, \quad \ldots; \quad \frac{b}{a} = f, \quad \frac{c}{a} = g, \ldots,$$

delle due

$$x^m + Fx^{m-1} + Gx^{m-2} + \cdots = 0, \qquad x^n + fx^{n-1} + gx^{n-2} + \cdots = 0$$

avremo, pel n° 33,

$$x^m + Fx^{m-1} + Gx^{m-2} + \cdots = (x-\alpha)[x^{m-1} + (\alpha+F)x^{m-2} + (\alpha^2 + F\alpha + G)x^{m-3} + \cdots],$$
$$x^n + fx^{n-1} + gx^{n-2} + \cdots = (x-\alpha)[x^{n-1} + (\alpha+f)x^{n-2} + (\alpha^2 + f\alpha + g)x^{n-3} + \cdots].$$

Ora moltiplico la prima di queste equazioni per A, la seconda per a, e in seguito divido quella per questa; ciò facendo, giacchè per la ipotesi abbiamo

$$A(x^m + Fx^{m-1} + Gx^{m-2} + \cdots) = Ax^m + Bx^{m-1} + Cx^{m-2} + \cdots,$$
$$a(x^n + fx^{n-1} + gx^{n-2} + \cdots) = ax^n + bx^{n-1} + cx^{n-2} + \cdots,$$

ne viene che otterremo

$$z = \frac{Ax^m + Bx^{m-1} + Cx^{m-2} + \cdots}{ax^n + bx^{n-1} + cx^{n-2} + \cdots}$$
$$= \frac{A[x^{m-1} + (\alpha+F)x^{m-2} + (\alpha^2 + F\alpha + G)x^{m-3} + \cdots]}{a[x^{n-1} + (\alpha+f)x^{n-2} + (\alpha^2 + f\alpha + g)x^{n-3} + \cdots]};$$

e quindi si ricaverà lo stesso risultato, ponendo α in luogo di x, tanto nella prima che nella seconda di queste due espressioni della z. Ma pel n° 60 abbiamo

$$\alpha^{m-1} + (\alpha+F)\alpha^{m-2} + (\alpha^2 + F\alpha + G)\alpha^{m-3} + \cdots = m\alpha^{m-1} + (m-1)F\alpha^{m-2} + (m-2)G\alpha^{m-3} + \cdots,$$
$$\alpha^{n-1} + (\alpha+f)\alpha^{n-2} + (\alpha^2 + f\alpha + g)\alpha^{n-3} + \cdots = n\alpha^{n-1} + (n-1)f\alpha^{n-2} + (n-2)g\alpha^{n-3} + \cdots.$$

Dunque sostituendo si otterrà

$$z' = \frac{A[m\alpha^{m-1} + (m-1)F\alpha^{m-2} + (m-2)G\alpha^{m-3} + \cdots]}{a[n\alpha^{n-1} + (n-1)f\alpha^{n-2} + (n-2)g\alpha^{n-3} + \cdots]};$$

e finalmente, moltiplicando rispettivamente per A, a e ponendo in luogo di F, G, ...; f, g, ... i valori corrispondenti, avremo

$$z' = \frac{mA\alpha^{m-1} + (m-1)B\alpha^{m-2} + (m-2)C\alpha^{m-3} + \cdots}{naa^{n-1} + (n-1)b\alpha^{n-2} + (n-2)c\alpha^{n-3} + \cdots} \qquad \text{C. D. D.}$$

140. Mediante il precedente teorema potremo facilmente *determinare il valore della supposta frazione* z (n° prec.), *mentre per la sostituzione di* α *diviene* $= \frac{0}{0}$; a questo fine

Digitized by Google

si moltiplichi ciascun termine sì del numeratore che del denominatore della frazione data pel proprio esponente; si diminuisca ciascun esponente di un'unità; avuto il risultato

$$\frac{mAx^{m-1} + (m-1)Bx^{m-2} + (m-2)Cx^{m-3} + \cdots}{nax^{n-1} + (n-1)bx^{n-2} + (n-2)cx^{n-3} + \cdots},$$

sostituiscasi in esso α in luogo di x, e ci risulterà così, pel n° prec., il domandato valore di $z' = \frac{0}{0}$.

Per tal modo, affine di avere il valore della frazione

$$\frac{x^2 - (a+b)x + ab}{x^2 - b^2}$$

supposta al n° 138 nel caso di $x = b$, eseguisco su di essa l'operazione ora accennata, e risultandoci la quantità

$$\frac{2x - (a+b)}{2x},$$

pongo in questa b in luogo di x, e otterremo così

$$\frac{2b - (a+b)}{2b} = \frac{b-a}{2b}$$

pel richiesto valore.

141. Vogliasi in secondo luogo il valore della frazione

$$\frac{x^3 - 3x^2 + 4}{x^4 - 17x^2 + 36x - 20}$$

nella supposizione di $x = 2$. Faccio la sostituzione del 2, e poichè ci risulta

$$z' = \frac{8 - 12 + 4}{16 - 68 + 72 - 20} = \frac{0}{0},$$

eseguisco la precedente operazione, e sostituisco il 2 nel risultato

$$\frac{3x^2 - 6x}{4x^3 - 34x + 36};$$

ma qui pure ci viene

$$z' = \frac{12 - 12}{32 - 68 + 36} = \frac{0}{0};$$

come adunque faremo in questo caso, onde avere il valore di z'?

Supponiamo che il risultato

$$\frac{mAx^{m-1} + (m-1)Bx^{m-2} + (m-2)Cx^{m-3} + \cdots}{nax^{n-1} + (n-1)bx^{n-2} + (n-2)cx^{n-3} + \cdots}$$

sia tale che ponendo $x = \alpha$ divenga esso pure $\frac{0}{0}$, come appunto è successo nel nostro esempio. Fatto in questa ipotesi lo stesso discorso, e le stesse operazioni del n° 139, vedremo in egual maniera che ci risulta

$$z' = \frac{m(m-1)A\alpha^{m-2} + (m-1)(m-2)B\alpha^{m-3} + (m-2)(m-3)C\alpha^{m-4} + \cdots}{n(n-1)a\alpha^{n-2} + (n-1)(n-2)b\alpha^{n-3} + (n-2)(n-3)c\alpha^{n-4} + \cdots}.$$

Digitized by Google

Dunque, *per ottenere il chiesto valore, non avremo che a proseguire sulla*

$$\frac{mAx^{m-1} + \cdots}{nax^{m-1} + \cdots}$$

l'operazione istessa del n° prec. Ciò eseguendo, pertanto, nel nostro esempio sulla frazione

$$\frac{3x^2 - 6x}{4x^3 - 34x + 36},$$

otterremo da prima l'altra

$$\frac{6x - 6}{12x^2 - 34},$$

e collocato finalmente il 2, invece della x, otterremo

$$z' = \frac{12 - 6}{48 - 34} = \frac{6}{14} = \frac{3}{7}.$$

Che se dalla sostituzione dell'α nel caso generale, e del 2 nel nostro esempio, risulti ancora una terza volta questa espressione $\frac{0}{0}$, non avremo che a proseguire l'operazione istessa (n° prec.), e così in progresso, finchè ne venga un valor determinato, e questo sarà il valore di z'.

---

142. *Proposta una funzione qualunque*

$$t = f(x')(x'')(x''') \ldots$$

delle radici della data

$$x^m + Ax^{m-1} + Bx^{m-2} + \cdots = 0,$$

determinare dipendentemente da questa il valore corrispondente di un'altra funzione qualunque

$$y = \varphi(x')(x'')(x''') \ldots$$

delle radici medesime.

O le due supposte funzioni t, y, data la prima, incognita l'altra, sono due funzioni simili e razionali (n^i 4, 5), o sono dissimili, od irrazionali. Prendiamo da principio a considerare il primo di questi casi; ma prima di accingerci alla soluzione generale di questo problema, affine di render la cosa più chiara e più facile, applichiamo la soluzione istessa al seguente caso particolare.

143. Data l'equazione

$$x^3 + Ax^2 + Bx + C = 0,$$

le cui radici sono x', x'', x''', e data la funzione

$$t' = x' + x'',$$

vogliasi determinare dipendentemente da questa la funzione

$$y' = x'x''$$

simile, come si vede, alla prima t'. Essendo tanti i valori della t quanti i corrispondenti della y (n° 4), chiamiamo

$$t' = x' + x'', \qquad t'' = x' + x''', \qquad t''' = x'' + x'''$$

i primi, e

$$y' = x'x'', \qquad y'' = x'x''', \qquad y''' = x''x'''$$

Digitized by Google

i secondi, per modo che y' corrisponda a t', y'' a t'', y''' a t''', e sia

$$t^3 + pt^2 + qt + r = 0$$

l'equazione da cui dipende la t; converrebbe ora pel n° 105 determinare i coefficienti p, q, r; ma già dal n° 106 sappiamo essere

$$p = 2A, \qquad q = A^2 + B, \qquad r = AB - C,$$

e

$$t^3 + 2At^2 + (A^2 + B)t + (AB - C) = 0$$

l'equazione in t. Ciò fatto, affine di determinare, come chiedesi dal problema, i tre valori della y dipendentemente dai corrispondenti della t, supponiamo le funzioni

$$y' + y'' + y''',$$
$$t'y' + t''y'' + t'''y''',$$
$$t'^2y' + t''^2y'' + t'''^2y''',$$

e chiamiamo H_1, H_2, H_3 i loro valori, cosicchè abbiasi

(I) $y' + y'' + y''' = H_1$, $t'y' + t''y'' + t'''y''' = H_2$, $t'^2y' + t''^2y'' + t'''^2y''' = H_3$.

Essendo queste evidentemente tante funzioni delle x', x'', x''' della forma $f(x', x'', x''')$, saranno pel n° 101 le quantità H_1, H_2, H_3 determinabili pei coefficienti della data, senza la soluzione di alcuna equazione di grado maggiore del primo, ed in realtà avendosi pei n^i 31, 41

$$y' + y'' + y''' = x'x'' + x'x''' + x''x''' = B,$$

$$t'y' + t''y'' + t'''y''' = (x' + x'')x'x'' + (x' + x''')x'x''' + (x'' + x''')x''x'''$$
$$= \sum xx^2 = 3C - AB,$$

$$t'^2y' + t''^2y'' + t'''^2y''' = (x' + x'')^2x'x'' + (x' + x''')^2x'x''' + (x'' + x''')^2x''x'''$$
$$= \sum xx^3 + 2\sum \overline{xx}^2 = A^2B - 5AC,$$

ne verrà

$$H_1 = B, \qquad H_2 = 3C - AB, \qquad H_3 = A^2B - 5AC.$$

Determinate così queste quantità potremo, mediante la eliminazione, ricavare dalle equazioni (I) il valore delle y', y'', y''' espresso per mezzo delle t', t'', t'''.

Facendo la eliminazione con i metodi ordinari, nella espressione di ciascuna delle

$$y', \quad y'', \quad y'''$$

entrerebbero tutti e tre i valori della t; onde *se si volesse che nel valore di* y' *entrasse soltanto* t', *in quello di* y'' *si contenesse solamente* t'', *e in* y''' *solo* t''', *come in realtà domanda il problema, converrebbe ricorrere ad altro metodo affatto diverso dai comuni,* e tale sarà il seguente.

Moltiplicata la prima delle (I) equazioni per un'indeterminata K_1, e la seconda per un'altra K_2, si sommino esse insieme con la terza, cosicchè ne risulti l'equazione

(II) $(K_1 + K_2t' + t'^2)y' + (K_1 + K_2t'' + t''^2)y'' + (K_1 + K_2t''' + t'''^2)y''' = H_1K_1 + H_2K_2 + H_3$,

e da questa apparisce che potremo ottenere il valore, per esempio di y', se K_1, K_2

Digitized by Google

vengano determinate in maniera che i coefficienti delle y'', y''' uguaglino lo zero, poichè in tal caso ne viene

$$y' = \frac{H_1 K_1 + H_2 K_2 + H_3}{K_1 + K_2 t' + t'^2}. \tag{III}$$

Supponiamo ora

$$K_1 + K_2 t + t^2 = T,$$

ed esprimiamo per

$$T', \quad T'', \quad T'''$$

i valori particolari di T corrispondenti alle supposizioni di $t = t'$, t'', t''', onde, sostituendo, l'equazione precedente divenga

$$T' y' + T'' y'' + T''' y''' = H_1 K_1 + H_2 K_2 + H_3.$$

Supponiamo inoltre che T diventi zero se facciasi $t = t''$, oppure $t = t'''$, per modo che t'', t''' siano radici della

$$t^2 + K_2 t + K_1 = T = 0.$$

Questa supposizione è chiaro che dalla (II) ci produrrà l'equazione (III), e però servirà per la determinazione della y'. Moltiplichiamo ora l'equazione $T = 0$ per $t - t'$, ne verrà l'altra

$$T(t - t') = t^3 + (K_2 - t')t^2 + (K_1 - K_2 t')t - K_1 t' = 0$$

avente per radici tutte e tre le quantità t', t'', t''', essendo questa adunque identica con l'altra

$$t^3 + p t^2 + q t + r = 0,$$

col paragone dei termini omologhi ci darà le equazioni

$$K_2 - t' = p, \qquad K_1 - K_2 t' = q, \qquad K_1 t' = r;$$

e da queste otterremo

$$K_2 = p + t', \qquad K_1 = q + p t' + t'^2.$$

L'ultima delle tre precedenti equazioni dandoci

$$K_1 = \frac{-r}{t'},$$

ed essendo t' radice della

$$t^3 + p t^2 + q t + r = 0,$$

onde si ha

$$t'^3 + p t'^2 + q t' + r = 0,$$

e però

$$t'^2 + p t' + q = -\frac{r}{t'},$$

si vede che tale ultima equazione sarà identica con l'antepenultima.

Moltiplico presentemente la K_1 per H_1, la K_2 per H_2, e avendosi

$$H_1 K_1 = H_1 q + H_1 p t' + H_1 t'^2, \qquad H_2 K_2 = H_2 p + H_2 t', \qquad H_3 = H_3,$$

il numeratore del secondo membro della (III) diverrà

$$(H_1 q + H_2 p + H_3) + (H_1 p + H_2) t' + H_1 t'^2,$$

Digitized by Google

ossia

$$Nt'^2 + Pt' + Q,$$

chiamati per semplicità N, P, Q i rispettivi coefficienti.

Abbiamo così espresso il numeratore del secondo membro della (III) col mezzo della t' e di quantità cognite. Venendo ora alla determinazione del denominatore T', osservo che abbiamo

$$T(t - t') = t^3 + pt^2 + qt + r,$$

e però

$$T = \frac{t^3 + pt^2 + qt + r}{t - t'},$$

onde, ponendo t' in luogo di t, si ottiene

$$T' = \frac{t'^3 + pt'^2 + qt' + r}{t' - t'} = \frac{0}{0}.$$

Dunque pel n° 140 sarà

$$T' = \frac{3t'^2 + 2pt' + q}{1} = 3t'^2 + 2pt' + q,$$

e quindi sostituendo nella (III), avremo

$$y' = \frac{Nt'^2 + Pt' + Q}{3t'^2 + 2pt' + q}.$$

Ora il discorso che abbiamo fatto sopra t' ed y', poteasi fare egualmente sopra t'' ed y'', sopra t''' ed y'''. Dunque sarà ancora

$$y'' = \frac{Nt''^2 + Pt'' + Q}{3t''^2 + 2pt'' + q}$$

ed

$$y''' = \frac{Nt'''^2 + Pt''' + Q}{3t'''^2 + 2pt''' + q},$$

e, togliendo gli apici, sarà in generale

$$y = \frac{Nt^2 + Pt + Q}{3t^2 + 2pt + q}.$$

Sia per esempio

$$x^3 - 3x^2 - 10x + 24 = 0$$

l'equazione data, in cui si ha

$$x' = 4, \qquad x'' = 2, \qquad x''' = -3.$$

Essendo

$$A = -3, \qquad B = -10, \qquad C = 24,$$

otterremo

$$p = 2A = -6, \qquad q = A^2 + B = -1, \qquad r = AB - C = 6,$$

e quindi

$$t^3 - 6t^2 - t + 6 = 0,$$

equazione nella quale

$$t' = 6, \qquad t'' = 1, \qquad t''' = -1.$$

Ricaveremo inoltre

$$H_1 = B = -10, \qquad H_2 = 3C - AB = 42, \qquad H_3 = A^2B - 5AC = 270,$$

Digitized by Google

e però

$$N = H_1 = -10, \qquad P = H_1 p + H_2 = 102, \qquad Q = H_1 q + H_2 p + H_3 = 28.$$

Dunque sostituendo sarà

$$y = \frac{-10t^2 + 102t + 28}{3t^2 - 12t - 1},$$

e supponendo successivamente

$$t = 6, \quad 1, \quad -1,$$

otterremo

$$y' = \frac{-360 + 612 + 28}{108 - 72 - 1} = 8,$$

$$y'' = \frac{-10 + 102 + 28}{3 - 12 - 1} = -12,$$

$$y''' = \frac{-10 - 102 + 28}{3 + 12 - 1} = -6;$$

come appunto si vede dover essere, giacchè abbiamo

$$x'x'' = 8, \qquad x'x''' = -12, \qquad x''x''' = -6.$$

144. Passiamo presentemente alla soluzione generale del nostro problema n° 142 nella supposizione, per ora, *che t ed y siano funzioni simili e razionali.* Essendo

$$\text{(IV)} \qquad t^n + pt^{n-1} + qt^{n-2} + \cdots + ut^2 + vt + z = 0$$

l'equazione in t determinata, come nel n° 105, dalla funzione data

$$f(x')(x'')(x''') \ldots (x^{(m)})$$

(n° 142), ed essendo

$$t', \quad t'', \quad t''', \ldots, t^{(n)}$$

le sue radici, siano

$$y', \quad y'', \quad y''', \ldots, y^{(n)}$$

i diversi valori della

$$y = \varphi(x')(x'')(x''') \ldots (x^{(m)}),$$

prodotti dalle diverse permutazioni in questa funzione, e pel n° 93 corrispondenti alle varie permutazioni della t, cosicchè y' corrisponda a t', y'' a t'', y''' a t''', ...

Se noi presentemente formeremo tra le

$$y', \quad y'', \quad y''', \ldots, y^{(n)}$$

tante equazioni tutte di primo grado, come le (I), è chiaro che pel loro mezzo potremo, servendoci della eliminazione indicata al n° 143, ottenere i valori di y espressi pei corrispondenti di t e quantità cognite, e giungeremo così alla soluzione del problema. Supponiamo perciò le equazioni

$$\text{(V)} \qquad \left\{\begin{array}{l} y' + y'' + y''' + y^{\text{IV}} + \cdots + y^{(n)} = H_1, \\ t'y' + t''y'' + t'''y''' + t^{\text{IV}}y^{\text{IV}} + \cdots + t^{(n)}y^{(n)} = H_2, \\ t'^2y' + t''^2y'' + t'''^2y''' + t^{\text{IV}2}y^{\text{IV}} + \cdots + t^{(n)2}y^{(n)} = H_3, \\ t'^3y' + t''^3y'' + t'''^3y''' + t^{\text{IV}3}y^{\text{IV}} + \cdots + t^{(n)3}y^{(n)} = H_4, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ t'^{n-1}y' + t''^{n-1}y'' + t'''^{n-1}y''' + t^{\text{IV}n-1}y^{\text{IV}} + \cdots + t^{(n)n-1}y^{(n)} = H_n. \end{array}\right.$$

Digitized by Google

Conservando i primi membri di queste sempre lo stesso valore, qualunque permutazione si faccia tra le

$$x', \quad x'', \quad x''', \quad \ldots,$$

giacchè per simili permutazioni i termini, per esempio

$$t'^3 y', \quad t'''^3 y'', \quad t''''^3 y''', \quad \ldots,$$

non fanno che cangiarsi fra loro e per conseguenza la loro somma

$$t'^3 y' + t'''^3 y'' + t''''^3 y''' + \cdots$$

resta sempre la medesima, e così dicasi degli altri, ne viene che questi primi membri vengono espressi, come nel n° 143, per mezzo delle

$$x', \quad x'', \quad x''', \ldots,$$

e però i loro valori

$$H_1, \quad H_2, \quad H_3, \ldots$$

saranno tutti determinabili pei coefficienti

$$A, \quad B, \quad C, \ldots$$

della data, senza sciogliere equazione di grado maggiore del primo (n° 101).

Supposte pertanto determinate le quantità

$$H_1, \quad H_2, \quad H_3, \ldots,$$

come precedentemente, proseguendo il calcolo siccome nel n° 143, moltiplichiamo la prima delle equazioni (V) per l'indeterminata K_1, la seconda per K_2, la terza per K_3, fino alla penultima, la quale si moltiplichi per $K_{(n-1)}$, e si sommino poscia tutte insieme; otterremo così le equazioni

$$\begin{aligned}
&(K_1 + K_2 t' + K_3 t'^2 + K_4 t'^3 + \cdots + K_{n-1} t'^{n-2} + t'^{n-1}) y' \\
&+ (K_1 + K_2 t'' + K_3 t''^2 + K_4 t''^3 + \cdots + K_{n-1} t''^{n-2} + t''^{n-1}) y'' \\
&+ (K_1 + K_2 t''' + K_3 t'''^2 + K_4 t'''^3 + \cdots + K_{n-1} t'''^{n-2} + t'''^{n-1}) y''' \\
&+ (K_1 + K_2 t^{IV} + K_3 t^{IV 2} + K_4 t^{IV 3} + \cdots + K_{n-1} t^{IV n-2} + t^{IV n-1}) y^{IV} \\
&+ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
&+ (K_1 + K_2 t^{(n)} + K_3 t^{(n)2} + K_4 t^{(n)3} + \cdots + K_{n-1} t^{(n)n-2} + t^{(n)n-1}) y^{(n)} \\
&= H_1 K_1 + H_2 K_2 + H_3 K_3 + H_4 K_4 + \cdots + H_{n-1} K_{n-1} + H_n,
\end{aligned}$$

ossia, supposto come di sopra (n° 143)

$$K_1 + K_2 t + K_3 t^2 + K_4 t^3 + \cdots + K_{n-1} t^{n-2} + t^{n-1} = T,$$

avremo l'equazione

$$\text{(VI)} \qquad \begin{cases} T' y' + T'' y'' + T''' y''' + T^{IV} y^{IV} + \cdots + T^{(n)} y^{(n)} \\ = H_1 K_1 + H_2 K_2 + H_3 K_3 + \cdots + H_{n-1} K_{n-1} + H_n. \end{cases}$$

Affine ora di determinare la y', converrà che le K_1, K_2, K_3, ... siano tali che rendano

$$T'' = 0, \quad T''' = 0, \quad T^{IV} = 0, \quad \ldots, \quad T^{(n)} = 0,$$

ossia che ne venga l'equazione

$$\text{(VII)} \qquad T = K_1 + K_2 t + K_3 t^2 + \cdots + K_{n-2} t^{n-3} + K_{n-1} t^{n-2} + t^{n-1} = 0,$$

Digitized by Google

nella quale la t abbia per radici le

$$t'', \quad t''', \quad \ldots, \quad t^{(n)}.$$

In tale ipotesi, dalla precedente (VI) avremo

$$\text{(VIII)} \qquad y' = \frac{H_1 K_1 + H_2 K_2 + H_3 K_3 + \cdots + H_{n-1} K_{n-1} + H_n}{T'}.$$

Moltiplico la $T = 0$ pel binomio $t - t'$, ne verrà l'equazione

$$T(t - t') = 0$$

avente tutte le radici

$$t', \quad t'', \quad t''', \quad \ldots, \quad t^{(n)},$$

la quale perciò sarà identica con la

$$t^n + p t^{n-1} + q t^{n-2} + r t^{n-3} + \cdots + u t^2 + v t + z = 0,$$

ed essendo

$$T(t-t') = t^n + (K_{n-1} - t')t^{n-1} + (K_{n-2} - K_{n-1} t')t^{n-2} + (K_{n-3} - K_{n-2} t')t^{n-3} + \cdots$$
$$\cdots + (K_2 - K_3 t')t^2 + (K_1 - K_2 t')t - K_1 t',$$

come si vede dalla (VII), si avrà, paragonando insieme i termini omologhi,

$$K_{n-1} - t' = p, \qquad K_{n-2} - K_{n-1} t' = q,$$
$$K_{n-3} - K_{n-2} t' = r, \ \ldots, \ K_2 - K_3 t' = u, \quad K_1 - K_2 t' = v, \quad - K_1 t' = z,$$

dalle quali equazioni, tante di numero quante sono le indeterminate K_1, K_2, K_3, ... più una, ritroveremo, come nel n° 143,

$$\begin{aligned}
K_{n-1} &= p + t', \\
K_{n-2} &= q + p t' + t'^2, \\
K_{n-3} &= r + q t' + p t'^2 + t'^3, \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots, \\
K_3 &= s + \cdots\cdots\cdots + p t'^{n-4} + t'^{n-3}, \\
K_2 &= u + s t' + \cdots\cdots + q t'^{n-4} + p t'^{n-3} + t'^{n-2}, \\
K_1 &= v + u t' + s t'^2 + \cdots + r t'^{n-4} + q t'^{n-3} + p t'^{n-2} + t'^{n-1}, \\
K_1 &= -\frac{z}{t'}.
\end{aligned}$$

L'ultima di queste equazioni si dimostra, nella stessa guisa del cit. n° 143, essere identica con la penultima, onde, tenendo conto di questa, essa può trascurarsi.

Moltiplico le quantità K_1, K_2, K_3, ... per le corrispondenti H_1, H_2, H_3, ...; verranno i risultati

$$\begin{aligned}
H_1 K_1 &= H_1 v + H_1 u t' + H_1 s t'^2 + \cdots + H_1 r t'^{n-4} + H_1 q t'^{n-3} + H_1 p t'^{n-2} + H_1 t'^{n-1}, \\
H_2 K_2 &= H_2 u + H_2 s t' + \cdots\cdots + H_2 q t'^{n-4} + H_2 p t'^{n-3} + H_2 t'^{n-2}, \\
H_3 K_3 &= H_3 s + \cdots\cdots + H_3 p t'^{n-4} + H_3 t'^{n-3}, \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots, \\
H_{n-3} K_{n-3} &= H_{n-3} r + H_{n-3} q t' + H_{n-3} p t'^2 + H_{n-3} t'^3, \\
H_{n-2} K_{n-2} &= H_{n-2} q + H_{n-2} p t' + H_{n-2} t'^2, \\
H_{n-1} K_{n-1} &= H_{n-1} p + H_{n-1} t', \\
H_n &= H_n.
\end{aligned}$$

Digitized by Google

Sommo in colonna, e supposto per maggior semplicità

$$\text{(IX)}\quad\begin{cases} H_1 v + H_2 u + H_3 s + \cdots + H_{(n-3)} r + H_{(n-2)} q + H_{(n-1)} p + H_{(n)} = Z, \\ H_1 u + H_2 s + \cdots\cdots + H_{(n-3)} q + H_{(n-2)} p + H_{(n-1)} = V, \\ H_1 s + \cdots\cdots + H_{(n-3)} p + H_{(n-2)} = U, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots, \\ H_1 r + H_2 q + H_3 p + H_4 = R, \\ H_1 q + H_2 p + H_3 = Q, \\ H_1 p + H_2 = P, \\ H_1 = N, \end{cases}$$

vedesi che abbiamo

$$H_1 K_1 + H_2 K_2 + H_3 K_3 + \cdots + H_{(n-1)} K_{(n-1)} + H_{(n)},$$

cioè il numeratore del secondo membro della (VIII), siccome nel n° 143,

$$= N t'^{n-1} + P t'^{n-2} + Q t'^{n-3} + R t'^{n-4} + \cdots + U t'^2 + V t' + Z.$$

Per determinare il denominatore T' (VIII) opero come nel cit. n° 143; e avendosi perciò

$$T(t - t') = t^n + p t^{n-1} + q t^{n-2} + r t^{n-3} + \cdots + u t^2 + v t + z,$$

e quindi

$$T = \frac{t^n + p t^{n-1} + q t^{n-2} + r t^{n-3} + \cdots + u t^2 + v t + z}{t - t'},$$

fatta la supposizione di $t = t'$, ne verrà $T' = \frac{0}{0}$; sarà dunque pel n° 140 esso denominatore

$$T' = n t'^{n-1} + (n-1) p t'^{n-2} + (n-2) q t'^{n-3} + (n-3) r t'^{n-4} + \cdots + 2 u t' + v.$$

Sostituisco questi valori del numeratore e del denominatore della (VIII), e otterremo finalmente

$$y' = \frac{N t'^{n-1} + P t'^{n-2} + Q t'^{n-3} + R t'^{n-4} + \cdots + U t'^2 + V t' + Z}{n t'^{n-1} + (n-1) p t'^{n-2} + (n-2) q t'^{n-3} + (n-3) r t'^{n-4} + \cdots + 2 u t' + v}.$$

Ma come y' corrisponde a t', così y'' corrisponde a t'', y''' a t''', ... Dunque, togliendo gli apici sarà in generale

$$(M)\quad y = \frac{N t^{n-1} + P t^{n-2} + Q t^{n-3} + R t^{n-4} + \cdots + U t^2 + V t + Z}{n t^{n-1} + (n-1) p t^{n-2} + (n-2) q t^{n-3} + (n-3) r t^{n-4} + \cdots + 2 u t + v},$$

equazione dalla quale si avranno tutti i valori y', y'', y''', ..., ponendo successivamente t', t'', t''', ... in luogo della t, come era stato richiesto.

145. Dalla soluzione presente si vede che: *se t ed y sono due funzioni simili e razionali, si potrà sempre ottenere razionalmente ciascun valore della y pel corrispondente della t e pei coefficienti A, B, C, ... della data,* determinando da prima nella maniera accennata l'esponente n e i coefficienti p, q, r, ... della (IV), determinando in secondo luogo le quantità H_1, H_2, H_3, ... delle (V), sostituendo in seguito si i primi che le seconde nelle equazioni (IX), onde avere i valori delle quantità N, P, Q, ..., e

Digitized by Google

riponendo finalmente nella (M) e i valori delle N, P, Q, ..., e quei delle n, p, q, r, ... Riflettasi nella precedente (M), che, come y' dipende da t', così y'' dipende da t'', y''' da t''', e così in progresso.

146. *Siano le due funzioni t, y razionali e dissimili fra di loro.* Essendo

$$1.2.3. \ldots m = \pi$$

(n° 92), o il numero dei valori di y è summultiplo di π, e quello dei valori di t è uguale a π; o essendo π il numero dei valori di y, è summultiplo quello dei valori di t; o finalmente amendue questi numeri sono summultipli di π. Nel primo di questi casi ottiensi la soluzione del problema (n° 142), operando nel modo istesso del n° 144.

Sia per esempio

$$x^2 + Ax + B = 0$$

l'equazione data, e siano

$$t' = \frac{x'}{x''}, \qquad y' = x' + x''.$$

Avendosi, nella

$$t^2 + pt + q = 0,$$

$$p = \frac{2B - A^2}{B}, \qquad q = 1,$$

ed essendo

$$H_1 = y' + y'' = -2A, \qquad H_2 = t'y' + t''y'' = -\frac{2AB - A^3}{B},$$

ne verrà

$$y = \frac{-2At - \dfrac{2AB - A^3}{B}}{2t + \dfrac{2B - A^2}{B}},$$

ossia

$$y = \frac{-2ABt - 2AB + A^3}{2Bt + 2B - A^2};$$

e, ponendo successivamente in luogo di t i valori

$$t' = \frac{x'}{x''} = \frac{-A + h}{-A - h}, \qquad t'' = \frac{x''}{x'} = \frac{-A - h}{-A + h},$$

supposto per semplicità

$$\sqrt{A^2 - 4B} = h,$$

avremo

$$y' = \frac{2A^2B - 2ABh + 2A^2B + 2ABh - A^4 - A^3h}{-2AB + 2Bh - 2AB - 2Bh + A^3 + A^2h}$$

$$= \frac{-A(-4AB + A^3 + A^2h)}{-4AB + A^4 + A^2h} = -A.$$

$$y'' = \frac{2A^2B + 2ABh + 2A^2B - 2ABh - A^4 + A^3h}{-2AB - 2Bh - 2AB + 2Bh + A^3 - A^2h} = -A.$$

147 [6]. Che, *se il numero dei valori diversi di t sia summultiplo di π, e quello dei valori di y uguale a π*, per conoscere con maggiore chiarezza come potremo in tal

Digitized by Google

caso sciogliere il nostro problema (n° 142), prendiamo a considerare da prima il seguente caso particolare.

Sia t una funzione della forma $f(x', x'')(x''')(x^{iv}) \ldots$ avente per conseguenza un numero $\frac{\pi}{2}$ di valori (n° 99), e siano

$$\begin{aligned} t' &= f(x', x'')(x''')(x^{iv}) \ldots, \\ t'' &= f(x', x''')(x'')(x^{iv}) \ldots, \\ t''' &= f(x', x^{iv})(x''')(x'') \ldots, \\ t^{iv} &= f(x'', x''')(x')(x^{iv}) \ldots, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

Supposto che la $\varphi(x')(x'')(x''')(x^{iv}) \ldots$ ci esprima la funzione y avente un numero π di valori diversi (n° 92), abbiasi

$$\begin{aligned} y' &= \varphi(x')(x'')(x''')(x^{iv}) \ldots, \\ y'' &= \varphi(x'')(x')(x''')(x^{iv}) \ldots, \\ y''' &= \varphi(x')(x''')(x'')(x^{iv}) \ldots, \\ y^{iv} &= \varphi(x''')(x')(x'')(x^{iv}) \ldots, \\ y^{v} &= \varphi(x')(x^{iv})(x''')(x'') \ldots, \\ y^{vi} &= \varphi(x^{iv})(x')(x''')(x'') \ldots, \\ y^{vii} &= \varphi(x'')(x''')(x')(x^{iv}) \ldots, \\ y^{viii} &= \varphi(x''')(x'')(x')(x^{iv}) \ldots, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

Vogliasi ora dipendentemente da ciascun valore della t, per esempio da t', il corrispondente valore della y (n° 142). Poichè per la permutazione di x' in x'' la t' resta la medesima, e dalla y abbiamo i due valori y', y'', e poichè le simili permutazioni della y a quelle si vogliono corrispondenti della t (cit. n° 142), ne viene che alla sola t' corrisponderanno le due y', y'', e tanto y' come y'' dipenderanno in egual modo da questa stessa t. Dunque, nella soluzione del problema, non essendovi ragione per cui debba restar determinata piuttosto l'una delle y', y'' che l'altra, ne segue che, dipendentemente dalla t' non potranno tali quantità che venire determinate amendue nel medesimo tempo, e dovranno esse per conseguenza essere amendue radici di una stessa equazione di secondo grado.

Sia

$$y^2 + g'y + h' = 0$$

una tale equazione; avendosi

$$g' = -(y' + y''), \qquad h' = y'y'',$$

e però essendo sì l'uno che l'altro di questi coefficienti funzioni della forma $f(y', y'')$, resteranno essi i medesimi pel cangiamento di y' in y''; ma simile cangiamento nasce dal permutare in

$$y' = \varphi(x')(x'')(x''')(x^{iv}) \ldots$$

Digitized by Google

la x' in x''. Dunque, sostituiti in g', h' invece di y', y'' i loro valori, questi coefficienti diventeranno due funzioni razionali delle x', x'', x''', x^{IV}, ... della forma

$$\varphi'(x', x'')(x''')(x^{IV}) \ldots,$$

e simili però amendue alla t' (n° 4); potremo pertanto col metodo del n° 144 mediante t' determinare razionalmente tanto g', come h'.

In egual maniera si dimostra, che le due quantità y''', y^{IV} dipendono da una equazione

$$y^2 + g''y + h'' = 0,$$

ove i coefficienti g'', h'' sono funzioni della forma

$$\varphi'(x', x''')(x'')(x^{IV}) \ldots,$$

e quindi determinabili razionalmente dalla t'', come i coefficienti g', h' lo sono dalla t'; le due y^V, y^{VI} dipendono dalla

$$y^2 + g'''y + h''' = 0,$$

avendosi g''', h''' funzioni della forma

$$\varphi'(x', x^{IV})(x''')(x'') \ldots,$$

e determinabili perciò nella maniera medesima dalla t'''; e così di seguito. Dunque, espresse in generale col mezzo della (M) le quantità g, h mediante la t, se in luogo di quest'incognita sostituirò poscia le radici

$$t', \quad t'', \quad t''', \quad t^{IV}, \ldots,$$

si otterranno in tal guisa successivamente i valori

$$g', \quad h'; \qquad g'', \quad h''; \qquad g''', \quad h'''; \qquad g^{IV}, \quad h^{IV}; \ldots,$$

e questi, riposti nelle

$$y^2+g'y+h'=0, \qquad y^2+g''y+h''=0, \qquad y^2+g'''y+h'''=0, \qquad y^2+g^{IV}y+h^{IV}=0, \ldots,$$

ci daranno, con la soluzione di queste equazioni, i valori delle

$$y', \quad y'', \quad y''', \quad y^{IV}, \ldots,$$

che richiedevansi dal problema. È chiaro, che le ottenute equazioni in y di secondo grado sono di numero $\frac{\pi}{2}$.

148. Sia per esempio $x^3 + x^2 + 3x - 2 = 0$ l'equazione data, e sia $t = x' + x''$ la data funzione, e vogliasi $y = x' - x''$. Avendosi $m = 3$, $A = 1$, $B = 3$, $C = -2$, e l'equazione in t essendo $t^3 + pt^2 + qt + r = 0$, avremo, pel n° 106, $p = 2$, $q = 4$, $r = 5$. Ora t ha un numero $\frac{\pi}{2} = 3$ di valori, ed y un numero $\pi = 6$; dunque a ciascun valore di t due corrispondendone di y, ne viene che questi dipenderanno da tante equazioni quanti sono i valori della t, cioè da tre equazioni della forma

$$y^2 + gy + h = 0.$$

Sia

$$y^2 + g'y + h' = 0$$

Digitized by Google

l'equazione da cui dipendono i due valori

$$y' = x' - x'', \qquad y'' = x'' - x'$$

corrispondenti alla sola $t' = x' + x''$.

Poichè abbiamo

$$g' = -(y' + y'') = -(x' - x'' + x'' - x') = 0, \qquad h' = y'y'' = -(x' - x'')^2,$$

la nostra equazione si ridurrà alla

$$y^2 + h' = 0,$$

e quindi non sarà necessario che determinare la h'. Avendosi pel dimostrato nel n° prec. la h funzione simile alla t, suppongo pel n° 144 le equazioni

$$\begin{aligned} h' &+ h'' &+ h''' &= H_1, \\ h't' &+ h''t'' &+ h'''t''' &= H_2, \\ h't'^2 &+ h''t''^2 &+ h'''t'''^2 &= H_3. \end{aligned}$$

Ricavandosi da queste

$$H_1 = 16, \qquad H_2 = -37, \qquad H_3 = 28,$$

avremo

$$N = 16, \qquad P = -5, \qquad Q = 18$$

(n° 144), e però sostituendo nella (M) avremo

$$h = \frac{16t^2 - 5t + 18}{3t^2 + 4t + 4}.$$

Pongo ora quivi successivamente le tre radici t', t'', t''' in luogo della t, e conosciuti così i tre valori h', h'', h''', ne verranno le tre equazioni

$$y^2 + h' = 0, \qquad y^2 + h'' = 0, \qquad y^2 + h''' = 0,$$

dalla soluzione delle quali otterremo tutti e sei i valori y', y'', y''', y^{IV}, ...

149. Se invece di essere

$$t = f(x', x'')(x''')(x^{IV}) \ldots$$

(n° 147), i valori di t fossero stati uguali fra loro a due a due per un'altra permutazione qualunque, fatto lo stesso discorso, avremmo ottenuto in egual maniera un numero $\frac{\pi}{2}$ di equazioni in y di secondo grado, aventi i coefficienti espressi razionalmente pei coefficienti della data e pei corrispondenti valori della t.

150. Che, *se nelle permutazioni i valori della t riuscissero uguali fra loro a tre a tre* (n° 98), *facendo lo stesso raziocinio e operando come precedentemente, si troverebbe che i* π *valori della y dipendono da* $\frac{\pi}{3}$ *equazioni della forma*

$$y^3 + gy^2 + hy + i = 0,$$

ove i coefficienti g, h, i sono determinabili razionalmente col mezzo dei valori corrispondenti della t, e dei coefficienti A, B, C, ...

Se la funzione t avesse i propri valori uguali fra loro a quattro a quattro, i vari valori della y dipenderebbero allora da $\frac{\pi}{4}$ equazioni ciascuna di quarto grado, i cui

Digitized by Google

coefficienti sarebbero tante funzioni razionali dei rispettivi valori della t, e dei coefficienti della data.

In generale, *se* λ *esprime l'esponente di uguaglianza tra i valori della t, cioè se i valori della t sono fra loro uguali a* λ *a* λ, *si ritroverà in allora i valori di y dipendere da un numero* $\frac{\pi}{\lambda}$ *di equazioni del grado* λ, *e della stessa natura delle precedenti.*

151. Supponiamo nuovamente che *le funzioni t, y siano simili, ma supponiamo inoltre, che in conseguenza dei valori particolari delle x', x'', x''', ... due solamente dei valori della t, per esempio i due t'', t''', riescano nel primo modo accennato al* n° 95 *uguali fra loro;* per la determinazione in tal caso delle due quantità y'', y''' dipendenti da un valore medesimo $t'' = t'''$ facendosi lo stesso discorso del n° 147, converrà per queste sole due quantità formare l'equazione di secondo grado $y^2 + gy + h = 0$, e in seguito determinare mediante t'' i coefficienti g, h, come nel cit. n° 147.

152. Data sia per esempio l'equazione

$$x^3 - 5x^2 - 4x + 20 = 0,$$

e siano

$$t = \frac{x'x''}{x'''}, \qquad y = (x' - x'')^2,$$

onde abbiasi

$$t' = \frac{x'x''}{x'''}, \qquad t'' = \frac{x'x'''}{x''}, \qquad t''' = \frac{x''x'''}{x'};$$

$$y' = (x' - x'')^2, \qquad y'' = (x' - x''')^2, \qquad y''' = (x'' - x''')^2.$$

Essendo in questo caso t ed y funzioni simili, istituisco il calcolo del n° 144, e ottenendo l'equazione

$$t^3 + \frac{54}{5}t^2 + 33t + 20 = 0,$$

in seguito

$$H_1 = 74, \qquad H_2 = \frac{-1514}{5}, \qquad H_3 = \frac{36506}{25},$$

e finalmente

$$N = 74, \qquad P = \frac{2482}{5}, \qquad Q = 632,$$

avremo

$$y = \frac{74t^2 + \frac{2482}{5}t + 632}{3t^2 + \frac{108}{5}t + 33}.$$

Ripongo in questa espressione i tre valori t', t'', t''', e dovrei così pel n° 144 ricavare i tre y', y'', y'''; ma vedremo per la precedente osservazione così non succedere. Avendosi

$$x' = 2, \qquad x'' = -2, \qquad x''' = 5,$$

ne verrà

$$t' = -\frac{4}{5}t'' = -5, \; t''' = -5.$$

Digitized by Google

Sostituisco il primo di questi valori, e ci risulterà

$$y' = \frac{74 \times \frac{16}{25} + \frac{2482}{5} \times -\frac{4}{5} + 632}{3 \times \frac{16}{25} + \frac{108}{5} \times -\frac{4}{5} + 33} = 16;$$

colloco l'altro, e ricaveremo

$$y'' = \frac{74 \times 25 + \frac{2482}{5} \times -5 + 632}{3 \times 25 + \frac{108}{5} \times -5 + 33} = \frac{0}{0} = 29$$

(n° 140). Ora abbiamo in tal guisa ottenuto bensì il valore della y', ma non già quello delle y'', y''', poichè è facile a vedersi che deve essere

$$y' = 16, \qquad y'' = 9, \qquad y''' = 49.$$

Come dunque opereremo, onde ottenere dalla $t'' = t''' = -5$ questi due valori y'', y'''? Suppongo perciò l'equazione

$$y^2 + gy + h = 0,$$

e rinnovate sui coefficienti g, h le operazioni del n° 147, troveremo essere questi uguali a due funzioni della t e dei coefficienti della data, nelle quali supponendo

$$t = t'' = t''' = -5,$$

ricaveremo

$$g = -58, \qquad h = 441.$$

Sostituisco questi valori, e l'equazione

$$y^2 - 58y + 441 = 0$$

risolta ci darà le due radici

$$y'' = 9, \qquad y''' = 49.$$

153. Nella stessa guisa del n° prec.: *se, a cagione di certe relazioni particolari fra le* x', x'', x''', ..., *tre dei valori della* t *riuscissero uguali fra loro, se per esempio fosse* $t'' = t''' = t^{iv}$, *la determinazione delle corrispondenti* y'', y''', y^{iv} *dipenderebbe dall'equazione di terzo grado*

$$y^3 + gy^2 + hy + i = 0,$$

essendo i coefficienti g, h, i *determinabili razionalmente per* t'', *e i coefficienti della data.* Lo stesso si dice se, per la stessa ragione, quattro dei valori della t fossero uguali fra loro, e così in progresso.

154. Ma come faremo noi per conoscere, *se l'equazione*

$$T = t^n + pt^{n-1} + qt^{n-2} + \cdots = 0$$

ha due o più radici uguali fra loro? Potremo facilmente dedurlo dai seguenti teoremi.

1° Supponiamo che l'equazione generale

$$x^m + Ax^{m-1} + Bx^{m-2} + \cdots = 0$$

abbia due delle sue radici uguali fra loro, che sia per esempio $\alpha = \beta$ (n° 22); in tal

Digitized by Google

caso dico che il risultato

$$m\alpha^{m-1} + (m-1)A\alpha^{m-2} + (m-2)B\alpha^{m-3} + \cdots$$

del n° 60 dovrà essere uguale allo zero.

Questo è evidente dal cit. n° 60, osservando che abbiamo

$$m\alpha^{m-1}+(m-1)A\alpha^{m-2}+(m-2)B\alpha^{m-3}+\cdots=(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)(\alpha-\delta)(\alpha-\eta)\ldots.$$

2° Se tre delle radici della

$$x^m + Ax^{m-1} + Bx^{m-2} + \cdots = 0$$

sono uguali fra loro, cioè se sia

$$\alpha = \beta = \gamma,$$

dovrà essere uguale allo zero non solo la quantità

$$m\alpha^{m-1} + (m-1)A\alpha^{m-2} + (m-2)B\alpha^{m-3} + \cdots,$$

ma anche l'altra

$$m(m-1)\alpha^{m-2} + (m-1)(m-2)A\alpha^{m-3} + (m-2)(m-3)B\alpha^{m-4} + \cdots.$$

Giacchè abbiamo

$$m\alpha^{m-1}+(m-1)A\alpha^{m-2}+(m-2)B\alpha^{m-3}+\cdots=(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)(\alpha-\delta)(\alpha-\eta)\ldots,$$

è chiaro che la

$$mx^{m-1} + (m-1)Ax^{m-2} + (m-2)Bx^{m-3} + \cdots = 0$$

sarà un'equazione avente due radici uguali ad α. Dunque pel 1° prec. replicando sulla

$$mx^{m-1} + (m-1)Ax^{m-2} + (m-2)Bx^{m-3} + \cdots = 0$$

l'operazione istessa che si praticò nel n° 60 sulla

$$x^m + Ax^{m-1} + Bx^{m-2} + \cdots = 0,$$

troveremo facilmente che deve risultare

$$m(m-1)\alpha^{m-2} + (m-1)(m-2)A\alpha^{m-3} + (m-2)(m-3)B\alpha^{m-4} + \cdots = 0.$$

Dunque, etc.

3° Se sia $\alpha = \beta = \gamma = \delta$, oltre i due risultati del 2° prec. dovrà essere uguale allo zero anche il terzo

$$m(m-1)(m-2)\alpha^{m-3}+(m-1)(m-2)(m-3)A\alpha^{m-4}+(m-2)(m-3)(m-4)B\alpha^{m-5}+\cdots.$$

Ciò si dimostra nella maniera medesima del prec. 2°; e così si prosegue nei casi di cinque, sei, etc. radici uguali.

155. Riportando ora queste proprietà alla $T = 0$, se nella ipotesi di $t = t''$ vedrò risultare

$$nt^{n-1} + (n-1)pt^{n-2} + (n-2)qt^{n-3} + \cdots,$$

cioè il denominatore della (M) uguale allo zero, dirò che la $T = 0$ ha già due radici $= t''$; dirò che essa ne ha tre se, nella stessa supposizione di $t = t''$, oltre

$$nt^{n-1} + (n-1)pt^{n-2} + \cdots$$

Digitized by Google

vedrò che diviene uguale allo zero anche

$$n(n-1)t^{n-2} + (n-1)(n-2)At^{n-3} + (n-2)(n-3)Bt^{n-4} + \cdots,$$

e così in progresso. Dunque, nel primo caso, onde avere i due valori di y che corrispondono a t'', supporrò l'equazione

$$y^2 + gy + h = 0,$$

nel secondo supporrò

$$y^3 + gy^2 + hy + i = 0,$$

e così di seguito.

156. Per isciogliere finalmente il nostro problema (n° 142), nell'ultimo dei tre casi (n° 146), non avremo che da servirci del metodo indicato ai n^i 147, 149, 150, 153 pel caso secondo. Imperciocchè, quantunque i valori diversi della y siano di un numero summultiplo di π, pure considerando in essa y tutte le permutazioni possibili, è chiaro che tenendosi così conto di tutti i valori di questa funzione uguali o disuguali fra loro, risulteranno essi di numero π; ma, come vedemmo succedere rapporto al primo caso (n° 146), l'esistere dei valori della y uguali non porta alcuna variazione nella soluzione del problema (n° 144). Dunque, qualunque variazione nascendo soltanto dall'uguaglianza fra i valori della t, ossia dall'essere i valori diversi della t summultipli di π, ne viene che, generalmente parlando, questo terzo caso devesi perfettamente ridurre al secondo.

157. *Finora abbiamo supposto che le funzioni t, y siano razionali; passiamo ora a considerare come possa sciogliersi il nostro problema* (n° 142), *mentre una o amendue queste funzioni sono irrazionali.* Se sia incommensurabile la t, e non già la y, ritrovata pel n° 136 l'equazione in t, le operazioni da praticarsi per la determinazione delle y sono perfettamente le medesime che quelle dei n^i 144, 147, 151, avvertendo però che qui pure, siccome nei n^i 146, 156, da' diversi valori della t anderanno risultando dei valori della y uguali.

158. Cangiata nelle equazioni (III) del n° 136 la y in t, è chiaro che tutte le p radici della prima di tali equazioni non ci daranno che un solo valore della nostra y (n° 144), il valore per esempio y'; tutte le p radici della equazione seconda ci daranno solamente il valore y'', tutte le radici della terza ci daranno il solo y''', e così di seguito.

159. Supposta pertanto la t della forma

$$f(x', x'', x''', \ldots, x^{(m)}),$$

sia essa razionale o irrazionale, se vorremo dipendentemente da questa determinare i π valori della y (n° 146), è evidente dai n^i 146, 157 che dovremo sempre cadere a dover risolvere un'equazione in y del grado π, in cui tutti si conterranno questi π valori.

160. Essendo razionale la

$$t = f(x')(x'')(x''')\ldots,$$

supponiamo incommensurabile la

$$y = \varphi(x')(x'')(x''')\ldots,$$

Digitized by Google

ed esprima μ il numero dei valori diversi che nascono da quest'ultima funzione per le diverse permutazioni fra le

$$x', \quad x'', \quad x''', \quad \ldots .$$

Tolgo sul bel principio dalla supposta

$$y = \varphi(x')(x'')(x''') \ldots$$

gli irrazionali (n° 136), e ottenuta così l'equazione razionale

$$y^p + F' y^{p-1} + G' y^{p-2} + H' y^{p-3} + \cdots = 0$$

(n° 136), prendo a considerare in essa il coefficiente F'. Essendo questo coefficiente pel n° 135 una funzione razionale delle

$$x', \quad x'', \quad x''', \quad \ldots$$

avente dalle permutazioni un numero μ di valori diversi, ricerco con i metodi precedenti (n^i 144, 147, 150) il valor generale della F espresso con la t; trovato questo, suppongo successivamente

$$t = t', \quad t'', \quad t''', \quad \ldots ,$$

e per tal modo è chiaro che ci risulteranno i coefficienti F', F'', F''', ... delle (III) (n° 136). Considerando in seguito gli altri coefficienti G', H', ..., poichè essi non sono che tante funzioni delle

$$x', \quad x'', \quad x''', \quad \ldots$$

simili alla F' e razionali (n° 136), soppressi gli apici esprimo mediante la formola generale (M) (n° 144) ciascuno dei medesimi col mezzo della F; nelle espressioni che ne vengono, suppongo poscia

$$F = F', \quad F'', \quad F''', \quad \ldots ,$$

e otterremo così i valori degli altri coefficienti tutti

$$G', \quad G'', \quad G''', \ldots ; \quad H', \quad H'', \quad H''', \ldots$$

Sostituisco questi nelle equazioni (III) del n° 136, e determinate in simil guisa tali equazioni, la loro soluzione ci somministrerà i valori domandati della y.

161. Data per esempio l'equazione

$$x^3 - 3x^2 - 10x + 24 = 0$$

del n° 143, in cui abbiamo

$$x' = 4, \qquad x'' = 2, \qquad x''' = -3,$$

e supposto

$$t' = x' + x'',$$

vogliasi

$$y = x' x'' + 3\sqrt{x'''}.$$

Togliendo pei n^i prec. da quest'ultima equazione i radicali, ne verrà

$$y^2 - 2x' x'' y + x'^2 x''^2 - 9x''' = 0,$$

onde avremo

$$F' = -2x' x'', \qquad G' = x'^2 x''^2 - 9x'''.$$

Digitized by Google

Cercando ora da t il valore di F, osservo che abbiamo $x'x'' = -\frac{F'}{2}$; dunque senza fare tutto il calcolo del n° 144, giacchè pel n° 106 l'equazione in t si è la

$$t^3 - 6t^2 - t + 6 = 0,$$

dal cit. n° 143 ne viene che sarà

$$-\frac{F}{2} = \frac{-10t^2 + 102t + 28}{3t^2 - 12t - 1},$$

e però

$$F = \frac{20t^2 - 204t - 56}{3t^2 - 12t - 1};$$

sostituisco quivi successivamente i valori

$$t' = 6, \qquad t'' = 1, \qquad t''' = -1,$$

e otterremo

$$F' = -16, \qquad F'' = 24, \qquad F''' = 12.$$

Affine presentemente di determinare i coefficienti G', G'', G''', formo l'equazione in F, cioè la

$$F^3 + pF^2 + qF + r = 0,$$

essendo

$$p = -20, \qquad q = -288, \qquad r = 4608;$$

ma abbiamo

$$H_1 = G' + G'' + G''' = 217,$$
$$H_2 = F'G' + F''G'' + F'''G''' = 1568,$$
$$H_3 = F'^2G' + F''^2G'' + F'''^2G''' = 95872,$$

e perciò

$$N = H_1 = 217,$$
$$P = H_1 p + H_2 = -2772,$$
$$Q = H_1 q + H_2 p + H_3 = 2016.$$

Dunque, sostituendo nella formola generale (M), sarà

$$G = \frac{217F^2 - 2772F + 2016}{3F^2 - 40F - 288}$$

e, riponendo in luogo della F i suoi valori, otterremo

$$G' = 91, \qquad G'' = 126, \qquad G''' = 0.$$

Pertanto le equazioni (III) del n° 136 diverranno nel nostro caso

$$y^2 - 16y + 91 = 0, \qquad y^2 + 24y + 126 = 0, \qquad y^2 + 12y = 0,$$

e i sei valori della y che dalla soluzione di queste si ricavano, quelli saranno che richiedevansi dal problema.

162. *I valori dei coefficienti*

$$G', \quad G'', \quad G''', \ldots; \quad H', \quad H'', \quad H''', \ldots$$

Digitized by Google

non si potevano essi pure dedurre immediatamente dalla t, senza ricorrere ai valori della F (n° 160)? Per la soluzione del problema non solo è necessario conoscere i valori tutti delle G, delle H, ...; ma bisogna di più tra questi conoscere quali son quelli, che corrispondono ai valori diversi della F. Ora se F, t sono funzioni simili, in tal caso è chiaro, dal n° 144, che troverò il valore per esempio G' corrispondente ad F', tanto deducendolo da t', come da F'; ma se F, t sono due funzioni dissimili, cosicchè al solo valore t' due o tre ne corrispondano della F (n° 147), risulterà in allora per la sola F' un'equazione di secondo o terzo grado (cit. n° 147); ora essendo G una funzione simile alla F, se vorrò dalla t' ricavare il valore G', ritroverò per esso pure un'equazione di secondo o terzo grado; e le radici di questa corrisponderanno alle radici dell'equazione trovata per F. Ma da queste due equazioni determinate potremo noi conoscere precisamente quali sono i singoli valori della G che a quei corrispondono della F? È evidente che nò. In conseguenza adunque di questo, abbiamo stabilito nel n° 160 che ciascun valore della G deducasi dal corrispondente della F, e che lo stesso pure si pratichi rapporto agli altri coefficienti H, ...

163. Resta finalmente a considerarsi il caso, in cui *amendue le funzioni t, y suppongonsi irrazionali.* Ora l'essere la t incommensurabile non porta, come si osservò nel n° 158, alcuna variazione nel calcolo; dunque tutta la variazione dipendendo soltanto dalla irrazionalità della y, ne segue che quest'ultimo caso riducesi infine totalmente all'altro del n° 160.

Prima di terminar questo Capo, fa d'uopo che dimostriamo il seguente teorema.

164. *Col mezzo di un solo dei valori della funzione*

$$t = f(x')(x'')(x''')(x^{\text{iv}})\ldots,$$

possiamo determinare tutti i valori della funzione

$$y = \varphi(x')(x'')(x''')(x^{\text{iv}})\ldots.$$

Siano per ora le due funzioni t, y simili e razionali, e i diversi loro valori provenienti dalle varie permutazioni siano i seguenti

$$\begin{array}{ll}
t' = f(x')(x'')(x''')(x^{\text{iv}})\ldots, & y' = \varphi(x')(x'')(x''')(x^{\text{iv}})\ldots; \\
t'' = f(x'')(x')(x''')(x^{\text{iv}})\ldots, & y'' = \varphi(x'')(x')(x''')(x^{\text{iv}})\ldots; \\
t''' = f(x''')(x'')(x')(x^{\text{iv}})\ldots, & y''' = \varphi(x''')(x'')(x')(x^{\text{iv}})\ldots; \\
t^{\text{iv}} = f(x')(x''')(x'')(x^{\text{iv}})\ldots, & y^{\text{iv}} = \varphi(x')(x''')(x'')(x^{\text{iv}})\ldots; \\
t^{\text{v}} = f(x'')(x''')(x')(x^{\text{iv}})\ldots, & y^{\text{v}} = \varphi(x'')(x''')(x')(x^{\text{iv}})\ldots; \\
t^{\text{vi}} = f(x''')(x')(x'')(x^{\text{iv}})\ldots, & y^{\text{vi}} = \varphi(x''')(x')(x'')(x^{\text{iv}})\ldots; \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{array}$$

Mentre nel n° 144 abbiam voluto dipendentemente dai valori della t trovare quei della y, abbiamo nella determinazione delle quantità

$$H_1,\quad H_2,\quad H_3,\ \ldots$$

Digitized by Google

combinate le funzioni

$$t',\ t'',\ t''',\ \ldots;\qquad y',\ y'',\ y''',\ \ldots$$

tra loro in modo che, corrispondendo t' ad y' e però t'' ad y'', t''' ad y''', ..., ne è risultata la (M) tale che: al sostituire di t' si ottiene necessariamente y'; al sostituire t'', si ha y''; al porre $t = t'''$, ne risulta y'''; e così di seguito. Ma è chiaro che potevamo da principio supporre che a t' corrispondesse non già y', ma bensì y''; in allora a t'' avrebbe corrisposto y', a t''' avrebbe corrisposto y^{v}, a t^{iv}, y^{vi}, ...; e fatte le equazioni

$$y'' + y' + y^{v} + y^{vi} + \cdots = H_1,$$
$$t'y'' + t''y' + t'''y^{v} + t^{iv}y^{vi} + \cdots = H_2,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

avremmo ottenuti, coi noti metodi, certi valori delle

$$H_1,\quad H_2,\quad H_3,\ \ldots,$$

i quali ci avrebbero condotti ad una equazione (M) tale che, facendo successivamente

$$t = t',\quad t'',\quad t''',\quad t^{iv},\ \ldots,$$

ne sarebbe risultato corrispondentemente $y = y'', y', y^{v}, y^{vi}, \ldots$; onde in questo caso mediante t' si avrebbe avuto y''. Se a t' si fosse supposto corrispondere y''', in allora a t'', avrebbe corrisposto y^{vi}, a t''', y', a t^{iv}, y^{v}, ..., e, operato come precedentemente, saremmo arrivati nel modo di prima all'equazione (M), nella quale ponendo i valori $t', t'', t''', t^{iv}, \ldots$, ne sarebbe successivamente risultato $y = y''', y^{vi}, y', y^{v}, \ldots$, e però da t' avremmo ottenuto il valore y'''. Proseguendo così a supporre che a t' corrispondano le funzioni che restano $y^{iv}, y^{v}, y^{vi}, \ldots$, vedesi che potremo mediante la stessa t' determinare ciascuna delle $y', y'', y''', y^{iv}, y^{v}, y^{vi}, \ldots$, trovando però corrispondentemente ad ognuna di queste tante nuove equazioni della forma della (M). Dunque, etc.

Che se le due funzioni t, y sono fra loro dissimili o sono irrazionali, il teorema si dimostra nella maniera medesima.

165. *Havvi un caso, il quale sfugge dal precedente teorema*, e tale si è quello che segue.

Sia

$$t' = f(x')(x'')(x''')\ldots(x^{(\lambda)}),$$

e sia

$$y' = (x^{(\lambda+1)})(x^{(\lambda+2)})(x^{(\lambda+3)})\ldots(x^{(m)}),$$

cosicchè niuna delle radici esistenti nella funzione y' entri nella funzione t'; in tal caso io dico che, essendo le x', x'', x''', ... radici di un'equazione generale (D), dalla t' non potremo dedurre il valore della y'.

Se far si potesse una simile deduzione, dovendo risultare $y' = f(t')$ (n° 144), esister dovrebbe un rapporto tra queste quantità y', t'. Ma le x', x'', x''', ..., $x^{(m)}$ essendo radici di un'equazione generale, devono prescindere da qualunque relazione fra

Digitized by Google

loro. Dunque, le radici componenti la t' essendo tutte diverse dalle radici della y', non potrà neppure considerarsi che esista alcun rapporto tra le t', y' medesime, e non potrà per conseguenza dalla t' dedursi la y' [1]).

166. Se restando

$$t' = f(x')(x'')(x''')\dots(x^{(\lambda)}),$$

abbiasi $y' = x'$; esistendo in questa supposizione la x' nella t', esister dovrà un rapporto tra essa $x' = y'$ e la t'; dunque in questo caso sarà quella sempre determinabile da questa, e potremo quindi sempre ottenere

$$y' = x' = f(t').$$

Dal n° precedente è chiaro che non potremo già eseguire una simile determinazione se sia $y' = x^{(\lambda+1)}$.

167. Ritenuto

$$t' = f(x')(x'')(x''')\dots(x^{(\lambda)}),$$

supponiamo

$$u' = \varphi(x')(x^{(\lambda+2)})(x^{(\lambda+3)})\dots(x^{(m)}).$$

Cercando pel n° prec., sì dalla t' che dalla u', il valore della x', potremo giungere alle due equazioni

$$x' = f'(t'), \qquad x' = f''(u'),$$

e però all'altra $f''(u') = f'(t')$. Ma questa sciolta, considerando la u' come incognita, ci somministra evidentemente $u' = f'''(t')$. Dunque, quando nelle due t', u' esiste una radice comune x', e molto più quando ne esistono varie, l'una funzione in allora è sempre determinabile dall'altra.

---

[1]) NOTA AGGIUNTA POSTERIORMENTE DALL'AUTORE [7]:

Nella proposizione del n° 165 della mia *Teoria generale delle equazioni* è necessario il fare una distinzione. O vuolsi determinare la y', colà supposta, dalla supposta t' indipendentemente affatto da qualunque altra quantità che sia funzione delle $x^{(\lambda+1)}$, $x^{(\lambda+2)}$, ..., $x^{(m)}$; o vuolsi che da simili quantità insieme combinate con la t' venga la y' ad essere determinata. Nel primo di questi casi la nostra proposizione è vera, e ciò per la ragione che abbiamo addotta nel citato n° 165; ma non è vera nel caso secondo: le funzioni indicate, contenendo le $x^{(\lambda+1)}$, $x^{(\lambda+2)}$, ..., $x^{(m)}$, hanno una relazione con la y', e quindi esse nel combinarsi con la t' possono darci benissimo la determinazione della y'. Ora, mentre col calcolo dei n^{i} 142, 144, ecc. (*Teoria generale delle equazioni*) cerchiamo il valore della y', questo si cerca non già dipendentemente dalla sola t', ma bensì dalla t' insieme combinata con i coefficienti della equazione data. Dunque, essendo tali coefficienti funzioni di tutte le radici x', x'', x''', ..., $x^{(\lambda)}$, $x^{(\lambda+1)}$, $x^{(\lambda+2)}$, ..., $x^{(m)}$, viene il valore della y' a cercarsi nel secondo de' modi accennati. Dunque, il metodo de' n^{i} 142, 144, ecc. (*Teoria generale delle equazioni*) potrà somministrarci il valore della y' espresso con la t', quantunque le t', y' non abbiano rapporto alcuno fra loro.

Il caso pertanto del n° 165 (*Teoria generale delle equazioni*) non è vero che sfugga dal teorema del n° 164, mentre facciasi uso del metodo dei n^{i} 142, 144, ecc. Avvertasi però, che nè questa correzione, nè il primo errore, o per meglio dire equivoco, apportano variazione alcuna nel restante della nostra *Teoria*.

Digitized by Google

168. Facendo nella y' del n° 165 le varie permutazioni tra i diversi valori della x, una di quelle eseguiscasi, per cui in essa s'introduca una o più delle radici

$$x', \quad x'', \quad \ldots \quad x^{(\lambda)};$$

facciasi quella per esempio di $x^{(\lambda+1)}$ in x', e sia

$$y'' = \varphi(x')(x^{(\lambda+2)})(x^{(\lambda+3)}) \ldots (x^{(m)}).$$

Poichè pel n° prec. questa y'' è determinabile dalla t', ne viene evidentemente che, se da essa t' non è deducibile la y' (n° 165), pure lo sarà sempre uno o più altri valori da essa dedotti, come nel caso presente la y'', e per conseguenza, qualunque siansi le funzioni t, y, avrà sempre luogo la soluzione del problema del n° 142, e avrà pur luogo il teorema del n° 164, ogniqualvolta dal dato valor della t, cioè da t', si cerchino quei valori della y in cui esiste una o più delle radici esistenti nella t' istessa.

Digitized by Google

CAPO IX.

ALCUNE PROPRIETÀ DELLE RADICI REALI ED IMMAGINARIE NELLE EQUAZIONI ALGEBRAICHE.

169. Supposta un'equazione di grado pari

$$x^{2n} + Ax^{2n-1} + Bx^{2n-2} + \cdots = 0,$$

e fatta con le sue radici una funzione della forma

$$r = f[(x', x'', x''', \ldots, x^{(n)}) - (x^{(n+1)}, x^{(n+2)}, x^{(n+3)}, \ldots, x^{(2n)})],$$

in cui le

$$x^{(n+1)}, \quad x^{(n+2)}, \quad x^{(n+3)}, \ldots, x^{(2n)}$$

siano combinate fra loro, come lo sono fra loro le

$$x', \quad x'', \quad x''', \ldots, x^{(n)},$$

come sarebbe per esempio, nella ipotesi di $n = 3$, la

$$r = (x' + x'' + x''') - (x^{IV} + x^{V} + x^{VI}),$$

io dico che i valori di questa sono tutti fra loro uguali a due a due e di segno contrario.

Trasportando nella r tutte le radici contenute sotto la prima parentesi entro della seconda, e le radici della seconda trasportandole entro della prima, ne verrà la funzione

$$f[(x^{(n+1)}, x^{(n+2)}, x^{(n+3)}, \ldots, x^{(2n)}) - (x', x'', x''', \ldots, x^{(n)})],$$

e nell'esempio la

$$(x^{IV} + x^{V} + x^{VI}) - (x' + x'' + x''');$$

ma questa è uguale evidentemente alla supposta, cangiatone il segno. Dunque due dei valori della r essendo già tra loro uguali e di segno contrario, rinnovato il discorso del n° 97, troveremo che anche gli altri tutti dovranno avere la proprietà medesima, e però, etc.

170. Ne segue adunque che i valori della r sono di numero pari, e giacchè questo numero è

$$= \frac{2n(2n-1)(2n-2)\ldots(n+1)n\ldots 3.2.1}{1.2.3\ldots n.1.2.3.\ldots n} = \frac{2n(2n-1)(2n-2)\ldots(n+1)}{1.2.3\ldots n}$$

Digitized by Google

(n° 102), chiamato esso per brevità 2ω, avremo

$$\omega = \frac{n(2n-1)(2n-2)\dots(n+1)}{1.2.3\dots n} = \text{numero intiero},$$

e i valori tutti della r si esprimeranno per

$$r',\ r'',\ r''',\ \dots,\ r^{(\omega)},\ -r',\ -r'',\ -r''',\ \dots,\ r^{(\omega)}.$$

Nel caso di $n = 3$ avremo $\omega = \frac{3\cdot5\cdot4}{1.2.3} = 10$.

171. *Se nella r lasciamo la x' sempre al suo luogo, e facciamo tutte le possibili permutazioni fra le altre radici, i valori che ne vengono possono rappresentarci i precedenti* ω *valori* $r', r'', r''', \dots, r^{(\omega)}$.

Con la operazione ora supposta non veniamo che a determinare una parte di tutti i precedenti 2ω valori della r: prendiamo presentemente a considerare quali essi siano. Restando per la ipotesi la x' immutabile, le quantità da permutarsi nella r diverranno in numero di $2n-1$. Ma per la forma della r, il numero delle permutazioni fra le $2n-1$ radici è

$$= \frac{(2n-1)(2n-2)\dots(n+1)n(n-1)\dots3.2.1}{1.2.3\dots n.1.2.3.\dots(n-1)}$$

$$= \frac{n(2n-1)(2n-2)\dots(n+1)}{1.2.3\dots n}$$

(n° 102). Dunque essendo questo risultato $=\omega$ (n° prec.), di numero ω saranno i valori che ottengonsi dalla r per le permutazioni supposte. Di più restando la x' sempre al suo luogo, e però sempre positiva, nessuno di questi ω valori può giammai essere uguale e opposto di segno ad un altro qualunque dei medesimi. Dunque, etc.

Facendo $n = 3$, giacchè ne viene $\omega = 10$ (n° prec.), avremo nel solito esempio (n° 169)

$$\begin{aligned}
r' &= (x' + x'' + x''') - (x^{IV} + x^{V} + x^{VI}),\\
r'' &= (x' + x^{IV} + x''') - (x'' + x^{V} + x^{VI}),\\
r''' &= (x' + x^{V} + x''') - (x^{IV} + x'' + x^{VI}),\\
r^{IV} &= (x' + x^{VI} + x''') - (x^{IV} + x^{V} + x''),\\
r^{V} &= (x' + x'' + x^{IV}) - (x''' + x^{V} + x^{VI}),\\
r^{VI} &= (x' + x'' + x^{V}) - (x^{IV} + x''' + x^{VI}),\\
r^{VII} &= (x' + x'' + x^{VI}) - (x^{IV} + x^{V} + x'''),\\
r^{VIII} &= (x' + x^{IV} + x^{V}) - (x'' + x''' + x^{VI}),\\
r^{IX} &= (x' + x^{IV} + x^{VI}) - (x'' + x^{V} + x'''),\\
r^{X} &= (x' + x^{V} + x^{VI}) - (x^{IV} + x'' + x''').
\end{aligned}$$

172. *Se vogliansi nella r lasciare nel loro luogo le due x', x'' e permutare tutte le altre* $2n-2$ *radici che rimangono, i valori che ne derivano saranno contenuti fra i precedenti* $r', r'', r''', \dots, r^{(\omega)}$ *e dal* n° 102 *è chiaro che il loro numero è*

$$= \frac{(2n-2)(2n-3)\dots3.2.1}{1.2.3\dots n.1.2.3\dots(n-2)} = \frac{(2n-2)(2n-3)\dots(n+1)}{1.2.3\dots(n-2)}.$$

Digitized by Google

Nel precedente esempio tal numero diviene $=4$, e i corrispondenti valori sono r', r^{v}, r^{vi}, r^{vii}.

173. *Cangiamo la x' in x'' in tutti gli ω valori del* n° 171. Per simili permutazioni altri di questi valori restano perfettamente i medesimi, e tali sono gli accennati nel n° prec., ed altri pel n° 169 non fanno perciò che cangiarsi fra loro, cangiando nel tempo stesso di segno. Ora volendo determinare il numero di questi ultimi valori, sottraggo dal numero

$$\omega = \frac{n(2n-1)(2n-2)\dots(n+1)}{1.2.3\dots n}$$

l'altro

$$\frac{(2n-2)(2n-3)\dots(n+1)}{1.2.3\dots(n-2)}$$

(n° prec.), e il valore

$$\frac{(2n-1)(2n-2)(2n-3)\dots(n+1)}{1.2.3\dots(n-1)} - \frac{(n-1)(2n-2)(2n-3)\dots(n+1)}{1.2.3\dots(n-1)}$$

$$= \frac{(2n-1-n+1)(2n-2)(2n-3)\dots(n+1)}{1.2.3\dots(n-1)}$$

$$= \frac{n(2n-2)(2n-3)\dots(n+1)}{1.2.3\dots(n-1)} = \frac{2(2n-3)(2n-4)\dots(n+1)n}{1.2.3\dots(n-2)}$$

sarà il richiesto. Nel nostro esempio, a cagione di $n=3$, questo numero sarà $=2\frac{3}{1}=6$.

174. *Il ritrovato*

$$\frac{2(2n-3)(2n-4)\dots(n+1)n}{1.2.3\dots(n-2)}$$

è sempre un numero pari.

Suppongo

$$2n-3=p, \qquad n-2=q;$$

avendosi quindi con la sottrazione $n-1=p-q$, e però

$$n=p-(q-1), \qquad n+1=p-(q-2),$$

sostituisco questi valori nel numero

$$\frac{(2n-3)(2n-4)\dots(n+1)n}{1.2.3\dots(n-2)},$$

ed esso diverrà

$$\frac{p(p-1)(p-2)\dots[p-(q-2)][p-(q-1)]}{1.2.3\dots q}.$$

Ora dalla sola ispezione della formola Newtoniana vedesi altro non essere questo numero, se non che il coefficiente del termine $(q+1)^{esimo}$ di un binomio $a+b$ elevato alla potenza p. Dunque, dovendo tutti i coefficienti della formola Newtoniana essere numeri interi, tale sarà anche il numero

$$\frac{p(p-1)(p-2)\dots[p-(q-2)][p-(q-1)]}{1.2.3\dots q},$$

Digitized by Google

ossia

$$\frac{(2n-3)(2n-4)\dots(n+1)n}{1.2.3\dots(n-2)};$$

e però il precedente

$$2\frac{(2n-3)(2n-4)\dots(n+1)n}{1.2.3\dots(n-2)}$$

non sarà che un numero pari. C. D. D.

175. *Se facciamo il prodotto* $r'r''r'''\dots r^{\omega}$, *sarà questo sempre determinabile razionalmente pei coefficienti* A, B, C, ... *della data.*

Formato questo prodotto, esso è già tale, evidentemente, che una qualunque delle permutazioni indicate nel n° 171 non può produrre in lui variazione veruna. Facciasi ora nel medesimo la permutazione di x' in x''. Per il n° 173 altre delle r', r'', r''', ..., $r^{(\omega)}$ non si cangiano perciò in modo veruno, le altre tutte non fanno che cangiarsi fra loro, cambiando nel tempo stesso di segno, e queste ultime frattanto sono, pel n° 174, di numero pari: dunque il nostro prodotto $r'r''r'''\dots r^{(\omega)}$ è tale che pel cambiamento di x' in x'' non si altera punto, nè rapporto al valore, nè rapporto al segno. Ma quello che si è detto della permutazione di x' in x'', dicesi egualmente di qualunque altro cangiamento fra le x', x'', x''', ..., $x^{(2n)}$. Dunque il suddetto prodotto, conservando sempre e lo stesso valore e lo stesso segno, qualunque permutazione si faccia, sarà sempre determinabile razionalmente pei coefficienti A, B, C, ... della data (n° 101).

176. *Se vogliasi formare un'equazione in* r *avente per radici tutti i valori* r', $-r'$, r'', $-r''$, r''', $-r'''$, ... *del* n° 170; *questa sarà priva di tutte le potenze dispari della* r.

Pel n° 22 il primo membro dell'equazione da formarsi è

$$=(r-r')(r+r')(r-r'')(r+r'')(r-r''')(r+r''')\dots(r-r^{(\omega)})(r+r^{(\omega)})$$
$$=(r^2-r'^2)(r^2-r''^2)(r^2-r'''^2)\dots(r^2-r^{(\omega)2});$$

ma in questo non entrano che le potenze pari della r. Dunque, etc.

Supposto $r^2=u$, sostituisco, effettuo la moltiplicazione e il calcolo del n° 105, e ci verrà un'equazione

$$(I) \qquad u^{\omega}+Ru^{\omega-1}+Su^{\omega-2}+\dots+V=0,$$

di cui saranno radici le quantità

$$u'=r'^2, \qquad u''=r''^2, \qquad u'''=r'''^2, \dots.$$

177. *Se sia* ω *numero dispari, la* (I) *avrà necessariamente l'ultimo termine* V *negativo.*

Il prodotto

$$r'r''r'''\dots r^{(\omega)}$$

è sempre una quantità razionale (n° 175), e però il suo quadrato

$$(r'r''r'''\dots r^{(\omega)})^2$$

Digitized by Google

una quantità essenzialmente positiva. Dunque, essendo la (I) per la ipotesi un'equazione di grado dispari, e avendosi quindi pel n° 24

$$V = -u'u''u''' \dots u^{(\omega)} = -(r'r''r''' \dots r^{(\omega)})^2,$$

ne segue che, etc.

178. Nella ipotesi adunque di ω numero dispari avendo sempre la u per lo meno un valore reale positivo (n° 54), sostituendo questo in un'equazione $r^2 = u$ (n° 176), ne otterremo sempre $r = \sqrt{u} =$ ad una quantità reale.

179. *Ritenendo che ω sia numero dispari, se vorremo mediante la r pel* n° 142 *determinare il valore di un'altra funzione qualunque a lei simile, che chiamerò s, troveremo che corrispondentemente a tutti o ad alcuno dei valori reali della r, purchè non sia zero, esiste sempre per lo meno un valore reale della s.*

O i valori reali della r sono tutti disuguali fra loro, o nò. Nel primo di questi due casi la cosa è per sè evidente, corrispondendo per la formola (M) a ciascun valore reale della r un valore reale della s. Nel secondo poi osservo da prima che, essendo la (I) un'equazione di grado dispari avente l'ultimo termine negativo (n° 177), dovrà essa avere un numero dispari di radici reali positive (n° 58). Supponiamo, ciò posto, che tra queste radici reali positive ve ne abbiano delle uguali fra loro; tali radici uguali, o sono dispari di numero, o sono pari; nel primo di questi due casi è chiaro potersi dare che delle radici reali positive non ne rimanga nell'equazione (I) alcuna disuguale, ma ciò non può già darsi nel secondo. Ora a cagione di $r = \sqrt{u}$, ciò stesso che abbiamo osservato nei valori reali positivi della u, deve in corrispondenza succedere anche tra i valori reali della r. Dunque, o col mezzo dei valori reali uguali di essa r, se sono dispari, o, se sono pari, col mezzo di quelli che devono necessariamente rimanere disuguali, se cercherò i valori corrispondenti della s, questi pei n^{i} 144, 147, 151 venendo sempre a dipendere da equazioni di grado dispari, dovranno sempre avere per lo meno un valore reale (n° 54). Dunque, etc.

180. *Il primo membro di qualunque equazione algebraica di un grado maggiore del secondo è sempre composto di due fattori, i coefficienti dei quali sono quantità reali.*

Se l'equazione proposta è di grado dispari, sapendosi che questa ha sempre una radice reale (n° 54), chiamata α una tal radice, ed

$$x^{2m+1} + Ax^{2m} + Bx^{2m-1} + \dots = 0$$

l'equazione proposta, dividendo essa pel binomio $x - \alpha$, la decomporremo così nei due fattori $x - \alpha$

$$x^{2m} + (\alpha + A)x^{2m-1} + (\alpha^2 + A\alpha + B)x^{2m-2} + (\alpha^3 + A\alpha^2 + B\alpha + C)x^{2m-3} + \dots$$

(n° 33), in cui i coefficienti sono evidentemente reali.

181. Se poi l'equazione data sia la (D) (n° 17), e sia d'un grado pari > 2, supponiamo che

$$\text{(II)} \qquad x^n + Mx^{n-1} + Nx^{n-2} + Px^{n-3} + \dots$$

ci rappresenti uno dei suoi fattori; l'altro fattore sarà della forma

$$x^{m-n} + M'x^{m-n-1} + N'x^{m-n-2} + P'x^{m-n-3} + \dots,$$

Digitized by Google

e converrà dimostrare che tutti i coefficienti M, N, P, ...; M', N', P', ... sono quantità reali; dimostrato ciò dei primi, sarà dimostrato ancor dei secondi, giacchè questi si determinano dividendo la (D) pel fattore (II): resta dunque a provare che i coefficienti M, N, P, ... siano quantità reali.

Giacchè l'esponente m è un numero pari, avremo sempre $m = 2^b i$, essendo i un numero dispari qualunque; ora o $i > 1$, o $i = 1$; prendiamo a considerare questi due casi nei numeri che seguono.

182. *Sia primieramente* $i > 1$. Avendosi

$$M = -(x' + x'' + x''' + \cdots + x^{(n)}) = f(x', x'', x''', \ldots, x^{(n)}),$$

sappiamo dal n° 104 che sarà questa funzione determinabile per un'equazione del grado

$$\frac{m(m-1)(m-2)\ldots(m-n+1)}{1.2.3\ldots n} = \frac{2^b i(2^b i-1)(2^b i-2)(2^b i-3)\ldots(2^b i-n+1)}{1.2.3\ldots n},$$

che chiamerò π. Se dunque suppongasi $n = 2^b$, avremo

$$\pi = \frac{2^b i(2^b i-1)(2^b i-2)(2^b i-3)\ldots(2^b i-2^b+1)}{2^b(2^b-1)(2^b-2)(2^b-3)\ldots 2.1},$$

ossia, dividendo per 2 quante volte si può i fattori corrispondenti del numeratore e del denominatore, sarà

$$\pi = \frac{i(2^b i-1)(2^{b-1} i-1)(2^b i-3)(2^{b-2} i-1)\ldots(2^b i-2^b+1)}{(2^b-1)(2^{b-1}-1)(2^b-3)(2^{b-2}-1)\ldots 1.1},$$

ove si vede che, non racchiudendo il numeratore e il denominatore che dei numeri dispari, fatta la divisione si avrà necessariamente il quoziente π numero dispari.

Dunque il coefficiente M del fattore (II) dipendendo da un'equazione di grado dispari, avrà necessariamente almeno un valore reale, e però, tenendo conto di questo, il supposto fattore avrà di già il coefficiente M del secondo termine reale. Ora, essendo gli altri coefficienti N, P, ... funzioni delle x', x'', x''', ... simili alla M, potremo dipendentemente da M determinare ciascuno di essi (n° 144), e ciascuno avrà uno o più valori reali corrispondentemente ai valori reali di M. Dunque, il fattore (II) oltre il coefficiente M avendo ancora reali tutti gli altri N, P, ..., ne viene che il primo membro dell'equazione (D) sarà composto dei due fattori reali

$$x^n + Mx^{n-1} + Nx^{n-2} + Px^{n-3} + \cdots,$$
$$x^{m-n} + M'x^{m-n-1} + N'x^{m-n-2} + P'x^{m-n-3} + \cdots,$$

essendo in essi $n = 2^b$ ed $m = 2^b i$, ove i è numero dispari e > 1.

183. *Se poi* $i = 1$, *cosicchè* $m = 2^b$, *sarà la data composta dei due fattori*

$$\text{(III)} \qquad \begin{cases} x^n + Mx^{n-1} + Nx^{n-2} + Px^{n-3} + \cdots, \\ x^n + M'x^{n-1} + N'x^{n-2} + Px^{n-3} + \cdots, \end{cases}$$

avendosi

$$n = \frac{m}{2} = \frac{2^b}{2} = 2^{b-1}$$

ed i coefficienti tutti reali.

Digitized by Google

Difatti, supposte

$$x', x'', x''', \ldots, x^{(n)}$$

le radici del primo fattore,

$$x^{(n+1)}, x^{(n+2)}, x^{(n+3)}, \ldots, x^{(2n)}$$

le radici del secondo, supponiamo

$$M = \frac{\alpha + \mu}{2}, \quad N = \frac{\beta + \nu}{2}, \quad P = \frac{\gamma + \pi}{2}, \ldots,$$

$$M' = \frac{\alpha - \mu}{2}, \quad N' = \frac{\beta - \nu}{2}, \quad P' = \frac{\gamma - \pi}{2}, \ldots;$$

avremo quindi

$$\alpha = M + M' = -[(x' + x'' + x''' + \cdots + x^{(n)}) + (x^{(n+1)} + x^{(n+2)} + x^{(n+3)} + \cdots + x^{(2n)})],$$

$$\beta = N + N' = [x'x'' + x'x''' + x''x''' + \cdots + x^{(n-1)}x^{(n)}) + (x^{(n+1)}x^{(n+2)} + x^{(n+1)}x^{(n+3)} + \cdots + x^{(2n-1)}x^{(2n)})],$$

$$\gamma = P + P' = -[(x'x''x''' + \cdots + x^{(n-2)}x^{(n-1)}x^{(n)}) + (x^{(n+1)}x^{(n+2)}x^{(n+3)} + \cdots + x^{(2n-2)}x^{(2n-1)}x^{(2n)})],$$

. . . . . .

$$\mu = M - M' = -[(x' + x'' + x''' + \cdots + x^{(n)}) - (x^{(n+1)} + x^{(n+2)} + x^{(n+3)} + \cdots + x^{(2n)})],$$

$$\nu = N - N' = [(x'x'' + x'x''' + x''x''' + \cdots + x^{(n-1)}x^{(n)}) - (x^{(n+1)}x^{(n+2)} + x^{(n+1)}x^{(n+3)} + \cdots + x^{(2n-1)}x^{(2n)})],$$

$$\pi = P - P' = -[(x'x''x''' + \cdots + x^{(n-2)}x^{(n-1)}x^{(n)}) - (x^{(n+1)}x^{(n+2)}x^{(n+3)} + \cdots + x^{(2n-2)}x^{(2n-1)}x^{(2n)})],$$

. . . . . .

Colloco ora nei fattori (III) in luogo dei coefficienti i corrispondenti valori in α, β, γ, ...; μ, ν, π, ...; faccio il loro prodotto, e paragono questo col primo membro dell'equazione supposta; risultando per tal modo un numero m, ossia $2n$, di equazioni tra le m indeterminate α, β, γ, ...; μ, ν, π, ..., elimino da queste le $2n - 1$ quantità α, β, γ, ...; ν, π, ...; e otterremo così un'equazione finale con la sola indeterminata μ.

184. Essendo μ uguale ad una funzione della forma

$$f[(x', x'', x''', \ldots, x^{(n)}) - (x^{(n+1)}, x^{(n+2)}, x^{(n+3)}, \ldots, x^{(2n)})],$$

ed essendo $2n$ il grado dell'equazione data, l'equazione in μ, che risulta pei n^i 169, 170, 176, sarà del grado

$$\frac{2n(2n-1)(2n-2)\ldots(n+1)}{1.2.3\ldots(n-1)n} = 2\omega,$$

e non conterrà che le potenze pari della μ, onde, supposto $\mu^2 = u$, essa diverrà della forma

(I) $$u^{\omega} + Ru^{\omega-1} + Su^{\omega-2} + \cdots + V = 0$$

Digitized by Google

(n° 176). Ora avendosi $2n = 2^b$, sostituendo ne viene

$$\omega = \frac{n(2n-1)(2n-2)(2n-3)(2n-4)\ldots(n+2)(n+1)}{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)\ldots 2.1}$$

$$= \frac{2^{b-1}(2^b-1)(2^b-2)(2^b-3)(2^b-4)\ldots(2^{b-1}+2)(2^{b-1}+1)}{2^{b-1}(2^{b-1}-1)(2^{b-1}-2)(2^{b-1}-3)(2^{b-1}-4)\ldots 2.1},$$

e però col dividere, come nel n° 182, sopra e sotto per 2, ottiensi

$$\omega = \frac{(2^b-1)(2^{b-1}-1)(2^b-3)(2^{b-2}-1)\ldots(2^{b-2}+1)(2^{b-1}+1)}{(2^{b-1}-1)(2^{b-2}-1)(2^{b-1}-3)(2^{b-3}-1)\ldots 1.1}.$$

Dunque, essendo per la ragione accennata nel cit. n° 182 quest'ultimo risultato un numero dispari, di grado dispari sarà l'ottenuta equazione (I), e questa di più pel n° 177 avrà l'ultimo termine V negativo. La μ pertanto pel n° 178 avrà sempre per lo meno un valore reale. Cerco ora col mezzo di questo valore reale della μ di determinare il corrispondente valore delle α, β, γ, ...; ν, π, ...: le ν, π ... sono funzioni simili alla μ (n° 183), e le α, β, γ, ... pel n° 146 da essa determinansi totalmente, come se le fossero simili. Dunque siccome pel n° 179 corrispondentemente ai valori reali della μ esiste sempre per lo meno un valore reale di ciascuna delle ν, π, ...; tal valore reale esisterà ancora riguardo a ciascuna delle α, β, γ, ... Determino pertanto questi valori reali di tutte le α, β, γ, ...; ν, π, ...; li sostituisco nella espressione dei coefficienti M, N, P, ...; M', N', P', ... (n° 183), ed essi perciò diverranno reali, e diverranno quindi reali anche i due fattori (III). C. D. D.

185. Avvertasi che potrebbe il valore reale della μ essere $= 0$, e allora pel n° 179 potrebbe non aver più luogo la dimostrazione precedente. In tal caso però, o sono zero anche tutte le altre quantità ν, π, ..., o no: se no, supposto che sussista per esempio ν, giacchè per essere questa una funzione della forma

$$f[(x', x'', x''', \ldots, x^{(n)}) - (x^{(n+1)}, x^{(n+2)}, x^{(n+3)}, \ldots, x^{(2n)})]$$

si fa su di essa il discorso medesimo che abbiamo fatto intorno alla μ, ne dedurremo le stesse conseguenze, e quindi mediante il valore reale della ν ricaveremo il valore reale delle α, β, γ, ...; π, ... e dei coefficienti M, N, P, ...; M', N', P', ... Se poi tutte queste quantità μ, ν, π, ... sono $= 0$, in allora è visibile che risulta $M = M'$, $N = N'$, $P = P'$, ..., e il primo membro dell'equazione

$$x^n + Mx^{n-1} + Nx^{n-2} + Px^{n-3} + \cdots = 0$$

elevato al quadrato ci produrrebbe il primo membro della (D). La proposta adunque in questa ipotesi si abbasserà da sè medesima ad un grado minore della metà, i cui coefficienti M, N, P, ... dovranno essere non solo reali, ma anche razionali; poichè altrimenti sarebbe evidentemente impossibile, che la quantità finita

$$x^n + Mx^{n-1} + Nx^{n-2} + Px^{n-3} + \cdots$$

elevata al quadrato divenisse

$$x^{2n} + Ax^{2n-1} + Bx^{2n-2} + \cdots.$$

Digitized by Google

Ed ecco dimostrato in tutti i casi possibili il teorema del n° 180.

186. *Il primo membro di un'equazione algebraica qualunque è sempre composto di tanti fattori di primo, e secondo grado.*

Essendo

$$x^m + Ax^{m-1} + Bx^{m-2} + \cdots = 0$$

l'equazione data, ed $m > 2$, dai n^i 180, 181 sappiamo, che il suo primo membro è composto di due fattori della forma

$$x^n + Mx^{n-1} + Nx^{n-2} + Px^{n-3} + \cdots, \quad x^{m-n} + M'x^{m-n-1} + N'x^{m-n-2} + P'x^{m-n-3} + \cdots,$$

i coefficienti dei quali sono reali. Ora se m, ed $m - n$ sono tuttavia > 2, dimostrasi nel modo istesso essere questi fattori composti di altri parimenti reali di grado inferiore, e così si prosiegue a dimostrare, finchè i successivi esponenti divengono non > 2. Dunque se supponiamo di giungere a questi ultimi fattori di grado non > 2, essendo essi pure reali, ne viene, che, etc.

Simili fattori saranno dunque della forma $x^2 + ax + b$, $x + c$, ove a, b, c saranno quantità reali, ed uguagliati allo zero non saranno che tante equazioni, le radici delle quali saranno le x', x'', x''', ..., $x^{(m)}$.

187. *Le radici immaginarie in una data equazione algebraica vanno sempre accoppiate a due a due, e sono sempre della forma* $d \pm e\sqrt{-1}$, *in cui d ed e sono quantità reali.*

Se nella data equazione

$$x^m + Ax^{m-1} + \cdots = 0$$

esistono delle radici immaginarie, queste negli ultimi fattori reali, pel n° prec., non potranno evidentemente contenersi che a due a due in quelli del secondo grado

$$x^2 + ax + b;$$

ma le radici delle equazioni

$$x^2 + ax + b = 0$$

sono sempre della forma

$$-\frac{a}{2} \pm \sqrt{\frac{a^2}{4} - b} = -\frac{a}{2} \pm \sqrt{b - \frac{a^2}{4}}\sqrt{-1} = d \pm e\sqrt{-1},$$

fatto

$$-\frac{a}{2} = d, \qquad \sqrt{b - \frac{a^2}{4}} = e.$$

Dunque, essendo $d =$ quantità reale e, nel caso delle radici immaginarie, essendo $b > \frac{a^2}{4}$, onde anche $e = \sqrt{b - \frac{a^2}{4}} =$ quantità reale, ne viene che, etc.

188. *Qualunque quantità immaginaria è sempre riducibile alla forma del* n° prec. $d \pm e\sqrt{-1}$.

Proposta una quantità immaginaria Π involvente degl'immaginari di un grado qualunque e in una qualunque maniera, facciasi $x = \Pi$; in seguito, pel n° 121, tolgansi dall'equazione $x = \Pi$ tutti i radicali che ivi esistono, e riducasi essa in tal modo

Digitized by Google

ad un'equazione

$$x''' + Ax'''^{-1} + Bx'''^{-2} + \cdots = 0$$

priva affatto di radicali: ora qualunque radice immaginaria di questa equazione è sempre riducibile alla forma

$$d \pm e\sqrt{-1}$$

(n° prec.). Dunque, anche II essendo radice immaginaria dell'equazione medesima, poichè $\text{II} = x$, sarà riducibile alla forma $d \pm e\sqrt{-1}$. Dunque, etc.

189. *Il numero delle radici immaginarie in una data equazione qualunque non può mai superare il doppio del numero delle permanenze dei segni* (n° 68) *nella equazione delle differenze* (n° 86).

Le radici immaginarie esistendo in qualunque equazione a due a due della forma $d + e\sqrt{-1}$, $d - e\sqrt{-1}$, essendo d, e quantità reali (n° 187), ne viene che la differenza fra due radici immaginarie corrispondenti sarà $2e\sqrt{-1}$, e il suo quadrato $-4e^2$, quantità reale e negativa. Ora tale quadrato non è che una delle radici dell'equazione delle differenze (n° 86), e di simili radici esister ne devono in questa equazione tante, quante sono le coppie delle radici immaginarie nella data. Dunque, pel n° 73 non potendo qualsivoglia equazione avere più radici reali negative di quel che siano in essa le permanenze dei segni, ne segue che neppure il numero delle coppie delle radici immaginarie nella data potrà essere maggiore di quello delle permanenze dei segni nella equazione delle differenze; e però, etc.

190. *Se dunque l'equazione delle differenze non ha permanenza veruna fra i segni, la data non avrà alcuna radice immaginaria.* Ricaviamo da ciò un criterio assai facile, onde scoprire se una data equazione ha delle radici immaginarie, o no. Ritrovo perciò pel n° 86 l'equazione delle differenze, osservo in questa se abbianvi delle permanenze, o no; se no, diremo che le radici della data sono tutte reali; se sì, che ve ne hanno delle immaginarie, e che il numero di queste non può superare il doppio delle permanenze osservate.

191. *Supposto che p ci esprima il numero delle radici reali, $2q$ quello delle immaginarie nella equazione data, onde si abbia $m = p + 2q$, l'equazione delle differenze conterrà $\frac{p(p-1)}{2}$ radici reali positive, q radici reali negative, e $2q(p+q-1)$ radici immaginarie.*

Essendo

$$x', \quad x'', \quad x''', \quad x^{\text{IV}}, \ \ldots$$

le radici reali,

$$d' + e'\sqrt{-1}, \quad d' - e'\sqrt{-1}, \quad d'' + e''\sqrt{-1}, \quad d'' - e''\sqrt{-1},$$
$$d''' + e'''\sqrt{-1}, \quad d''' - e'''\sqrt{-1}, \ \ldots$$

le immaginarie della data, le radici della equazione delle differenze saranno le seguenti:

$$(x'-x'')^2, \ (x'-x''')^2, \ (x'-x^{\text{IV}})^2, \ \ldots, (x''-x''')^2, \ (x''-x^{\text{IV}})^2, \ \ldots, (x'''-x^{\text{IV}})^2, \ \ldots,$$
$$-4e'^2, \ -4e''^2, \ -4e'''^2, \ \ldots,$$
$$(x'-d'-e'\sqrt{-1})^2, \ (x'-d'+e'\sqrt{-1})^2, \ (x'-d''-e''\sqrt{-1})^2, \ (x'-d''+e''\sqrt{-1})^2, \ldots.$$

Digitized by Google

Ora tra queste radici le prime, nate dalla combinazione fra loro a due a due di tutte le radici p reali della data, sono di numero $\frac{p(p-1)}{2}$ e sono tutte positive; le radici seconde, nate dalla combinazione fra loro delle radici immaginarie corrispondenti, sono di numero q e tutte reali e negative (n° 189); e le radici terze, prodotte dalla combinazione delle radici immaginarie con le reali e delle immaginarie non corrispondenti fra loro, è chiaro che sono tutte immaginarie e sono di numero

$$\frac{m(m-1)}{2} - \frac{p(p-1)}{2} - q = \frac{(p+2q)(p+2q-1)}{2} - \frac{p(p-1)}{2} - q$$
$$= \frac{p(p-1) + 2q(2p+2q-1) - p(p-1) - 2q}{2}$$
$$= \frac{2q(2p+2q-2)}{2} = 2q(p+q-1).$$

Dunque, etc. *).

NOTA AGGIUNTA POSTERIORMENTE DALL'AUTORE [8]:

*) L'immortale LAGRANGE {*Additions au Mémoire « Sur la résolution des équations numériques »* [Mémoires de l'Académie Royale des Sciences et Belles-Lettres de Berlin, t. XXIV, année 1768 (stampato nel 1770), pp. 111-180], § I, Remarque II, n° 5, pag. 113}, chiamate
$a, b, c, d, \ldots$
le radici reali di una equazione qualunque ed

$$\alpha + \beta\sqrt{-1}, \quad \alpha - \beta\sqrt{-1}, \quad \gamma + \delta\sqrt{-1}, \quad \gamma - \delta\sqrt{-1}, \ldots$$

le immaginarie, quindi chiamato m il grado della equazione proposta, $n = \frac{m(m-1)}{2}$ il grado della equazione alle differenze, chiamato p il numero delle radici reali in quella, e $2q$ il numero delle immaginarie, cosicchè

$$m = p + 2q,$$

dice che in questa dovranno aversi $p\frac{p-1}{2}$ radici reali positive, q reali negative e $2q(p+q-1)$ immaginarie.

Esponendo queste osservazioni del celeberrimo Autore nella mia *Teoria generale delle equazioni* asserisco lo stesso io pure nel n° 191; ma però conviene riflettere al caso considerato nelle stesse *Additions*, § I, Remarque IV, n° 14 (pag. 120).

Se in conseguenza di questo caso abbiasi per esempio la radice

$$a = \alpha, \quad \text{oppure} \quad \alpha = \gamma,$$

allora il numero q delle radici reali negative della equazione alle differenze deve aumentarsi di 2, corrispondentemente alle radici

$$-\beta^2, \quad -\beta^2,$$

oppure di 4 corrispondentemente alle radici

$$-(\beta-\delta)^2, \quad -(\beta-\delta)^2, \quad -(\beta+\delta)^2, \quad -(\beta+\delta)^2.$$

Che, se si voglia $\beta = \delta$, allora resterà aumentato di 2 il numero $\frac{p(p-1)}{2}$ delle radici positive reali in corrispondenza dei risultati

$$(\alpha-\gamma)^2, \quad (\alpha-\gamma)^2.$$

Ora, mentre accada simile accidente, è facile a vedersi che nella equazione delle differenze il

Digitized by Google

192. *Ritenute le denominazioni precedenti, e chiamato n il grado dell'equazione delle differenze, l'ultimo termine di questa equazione, che chiamerò Z, sarà positivo se i numeri n, q sono amendue pari o amendue dispari; e sarà negativo se l'uno di questi è pari e dispari l'altro.*

Eseguiscasi la moltiplicazione delle

$$n = \frac{p(p-1)}{2} + q + 2q(p+q-1)$$

radici della equazione ritrovata (n° prec.). Il prodotto delle $\frac{p(p-1)}{2}$ radici positive è positivo, tale è pure pel n° 55 il prodotto delle

$$2q(p+q-1)$$

radici immaginarie, e il prodotto delle q radici negative è positivo se q è pari, negativo se q è dispari. Dunque anche il prodotto totale di tutte le n radici diverrà positivo, se sia q pari; e, se q sia dispari, diverrà negativo. Ora l'ultimo termine Z uguaglia questo prodotto totale preso col suo segno se n è pari, e preso col segno contrario se n è dispari (n° 24). Combinando adunque l'essere di pari o dispari in amendue i numeri n, q, vedesi chiaramente che, ecc.

193. *Il termine Z sarà positivo o negativo, secondo che è pari o dispari il numero delle combinazioni a due a due fra le p radici reali della data.*

Poichè $n-q$ è un numero sempre pari, ogniqualvolta n e q siano entrambi pari od entrambi dispari, e poichè lo stesso $n-q$ è un numero sempre dispari, mentre sia dispari l'uno dei due n, q e l'altro pari, pel n° prec. ne segue che l'ultimo termine nella equazione delle differenze sarà sempre positivo se $n-q$ sia pari, e, se $n-q$ sia dispari, sarà negativo. Ora avendosi

$$n = \frac{p(p-1)}{2} + q + 2q(p+q-1)$$

(n° prec.), e però

$$n - q = \frac{p(p-1)}{2} + 2q(p+q-1),$$

ed essendo $2q(p+q-1)$ un numero sempre pari, vedesi che secondo che è pari

---

numero di quelle radici immaginarie, le quali perciò divengono reali o positive o negative, è *sempre pari;* dunque chiamato $2r$ il numero di queste radici divenute reali positive, $2s$ il numero delle diventate reali negative, affine di esporre la precedente proposizione con tutta la generalità, sembra doversi dire che, nella equazione delle differenze, *il numero delle radici reali positive eguaglia*

$$\frac{p(p-1)}{2} + 2r,$$

quello delle reali negative eguaglia

$$q + 2s,$$

e quello delle immaginarie è

$$2q(p+q-1) - 2r - 2s,$$

potendo questi numeri r, s eguagliare lo zero, od esserne maggiori.

Digitized by Google

o dispari il numero $n-q$, dovrà essere pari o dispari ancora l'altro $\frac{p(p-1)}{2}$. Quest'ultimo numero adunque $\frac{p(p-1)}{2}$ esprimendoci il numero delle combinazioni a due a due fra le p radici reali della data, ne viene che, ecc.

194. *Posto il termine Z positivo, se m sia pari il numero delle radici reali nella equazione data sarà multiplo di* 4; *e sarà lo stesso numero multiplo di* $4+1$ *se m sia numero dispari.*

Nella ipotesi di Z positivo dovendo pel n° prec. $\frac{p(p-1)}{2}$ esser numero pari, vedesi che, espresso con la lettera λ un numero intero positivo qualunque, dovrà essere o $\frac{p}{2}=2\lambda$, e però $p=4\lambda$, oppure $\frac{p-1}{2}=2\lambda$, e quindi $p=4\lambda+1$. Ora p ci esprime il numero delle radici reali nella data, ed essendo $m=p+2q$ (n° 191), se m è pari tale è anche p; se m è dispari anche p è dispari. Dunque, nel caso di m pari non potendo che risultare $p=4\lambda$, e mentre m sia dispari dovendone venire $p=4\lambda+1$, deducesi che, ecc.

195. *Posto Z negativo, le radici reali della data sono di un numero multiplo di* 4 *con di più* 2, *se m è pari; e, se m è dispari, sono di un numero multiplo di* 4 *con di più* 3.

Mentre Z sia negativo, dal n° 58 sappiamo dover essere $\frac{p(p-1)}{2}$ un numero dispari. Ora ciò non può succedere, quando non sia $\frac{p}{2}=2\lambda+1$ oppure $\frac{p-1}{2}=2\lambda+1$, e per conseguenza $p=4\lambda+2$, ovvero $p=4\lambda+3$. Se dunque proseguirò lo stesso raziocinio del n° prec., troverò in egual modo la verità del Teorema proposto.

196. Dunque, se l'ultimo termine nella equazione delle differenze è positivo, il numero delle radici reali nella equazione data non potrà che essere uno di questi: 0, 4, 8, 12, ..., mentre il grado di essa data sia pari; e se tal grado sia dispari, non potrà che essere uno dei seguenti 1, 5, 9, 13, ... Nel caso poi che l'ultimo termine nell'equazione delle differenze si trovi negativo; se il grado della data sia pari, le sue radici reali saranno 2, oppure 6, oppur 10, 14, ...; saranno esse 3, ovvero 7, ovvero 11, 15, ... se il grado della data sia dispari. Potremo con questo criterio determinare il numero preciso delle radici reali e delle immaginarie nelle equazioni che non sorpassano il quinto grado, e in quelle tutte nelle quali d'altronde si sappia che le radici immaginarie non ponno essere più di quattro. Noi ci contenteremo di vedere come ciò eseguiscasi nelle equazioni di quarto grado.

197. Sia

$$x^4+Bx^2+Cx+D=0$$

l'equazione data, che per maggiore semplicità pongo priva del secondo termine: la sua equazione delle differenze sarà pel n° 86

$$y^6+Qy^5+Ry^4+Sy^3+Ty^2+Vy+Z=0,$$

Digitized by Google

avendosi

$$4Q = 8B,$$
$$4^2R = 22B^2 + 8D,$$
$$4^3S = 18B^3 - 16BD - 26C^2,$$
$$4^4T = 17B^4 + 24B^2D - 7.16D^2 + 3.16BC^2,$$
$$4^5V = 4B^5 + 2.27C^2B^2 + 8.27C^2D - 3.4^3BD^2 + 2.4^2B^3D,$$
$$4^6Z = 4^4D^3 - 2^3.4^2B^2D^2 + 4^2.3^2BC^2D + 4^2B^4D - 4C^2B^3 - 3^3C^4.$$

Ora, se quest'ultima quantità è negativa, divenendo negativa la Z, vedesi che la nostra equazione in x avrà necessariamente due radici reali e due immaginarie (n° prec., 195). Ma se tale quantità, e quindi la Z, è positiva, in allora, se i coefficienti tutti Q, R, S, T, V, Z sono alternativamente negativi e positivi, le radici della data saranno tutte reali (n° 194); e, se tale alternazione non succede, esse radici saranno tutte immaginarie (n° prec.).

Supposta la quantità Z positiva, troveremo che i termini tutti della data si alternano di segno se sia $B < 0$, $B^2 - 4D > 0$; e che al contrario questa alternazione non accade, se abbiasi $B > 0$, oppure $B^2 - 4D < 0$. Dunque, trovata la Z positiva, diremo che tutte le radici della data sono reali se abbiasi $B < 0$, $B^2 - 4D > 0$, che tutte sono immaginarie se qualcuna di queste ultime condizioni non si verifica, e che finalmente due di queste radici sono reali e due immaginarie se il valor della Z risulta negativo *).

---

*) NOTA AGGIUNTA POSTERIORMENTE DALL'AUTORE [9]:

Supposta l'equazione

$$x^4 + Bx^2 + Cx + D = 0,$$

e chiamata

$$y^6 + Qy^5 + Ry^4 + Sy^3 + Ty^2 + Vy + Z = 0$$

la sua trasformata nelle differenze, espongo i valori dei coefficienti Q, R, ..., Z, espressi per gli altri B, C, D:

tali valori sono que' medesimi che espone LAGRANGE nell'indicata Memoria [*Additions*, etc., § I, Remarque III, n° 12 (pag. 118)], avuto riguardo alla differenza dei segni fra le equazioni da me supposte e quelle supposte dal Ch.^{mo} Autore.

Ma questi non sono i giusti valori; essi vengono dall'immortale LAGRANGE in parte corretti nell'aureo libro *Traité de la résolution des équations numériques de tous les degrés* (*Paris*, chez Duprat libraire pour les Mathématiques, quai des Augustins, An. VI) etc., n° 39 (pag. 50): i valori veri però, se non m'inganno, sono i seguenti:

$$Q = 8B,$$
$$R = 22B^2 + 8D,$$
$$S = 28B^3 + 16BD + 26C^2,$$
$$T = 17B^4 + 24B^2D + 48BC^2 - 112D^2,$$
$$V = 4B^5 + 32B^3D + 18B^2C^2 - 192BD^2 + 216C^2D,$$
$$Z = 16B^4D - 4B^3C^2 - 128B^2D^2 + 144BC^2D - 27C^4 + 256D^3.$$

Digitized by Google

CAPO X.

PROPRIETÀ DELLE RADICI DELLA UNITÀ.

198. Abbiasi l'equazione

$$x^m = 1,$$

ossia

$$x^m - 1 = 0.$$

Le radici di questa sono quelle che chiamo *radici della unità.* Una di tali radici è chiaro essere l'unità medesima, ma oltre di essa ne dovranno esistere altre $m-1$. Sia α una di queste ultime radici; sostituendo avremo $\alpha^m = 1$, e conseguentemente

$$\alpha^{2m} = 1, \quad \alpha^{3m} = 1, \ldots, \alpha^{nm} = 1.$$

Dunque, non solamente α, ma ancora le sue potenze $\alpha^2, \alpha^3, \ldots, \alpha^n$ facendo verificar l'equazione $x^m = 1$, saranno tante radici di essa, però uguali o disuguali fra loro. Supponiamo presentemente $n = m$; le m successive quantità $\alpha, \alpha^2, \alpha^3, \ldots, \alpha^m$, se fossero tutte disuguali fra loro, altro non sarebbero che tutte le m radici della proposta $x^m - 1 = 0$; ma se ve ne fossero delle uguali, allora non ci darebbero che un certo numero delle radici medesime, una o più volte ripetute.

199. *Supposto che α rappresenti una qualunque delle radici della $x^m - 1 = 0$ diversa dall'unità, e supposto che m sia numero primo, le successive potenze*

$$\alpha, \quad \alpha^2, \quad \alpha^3, \quad \alpha^4, \ldots, \alpha^m$$

tutte ci esprimeranno le diverse radici della nostra $x^m - 1 = 0$.

Pel n° prec. avrò dimostrata la verità del Teorema presente, ogni qual volta avrò dimostrato che le $\alpha, \alpha^2, \alpha^3, \alpha^4, \ldots, \alpha^m$ sono tutte disuguali fra loro. Supponiamo, se è possibile, che due di queste potenze, per esempio le due α^p, α^{p+q} siano fra loro uguali, essendo $p < m$, e $p+q$ non $> m$; avremo perciò $\alpha^p = \alpha^{p+q}$, e quindi $\alpha^q = 1$. Ora giacchè $q < m$, ed m è numero primo, sarà $m = \mu q + r$, indicando μ le volte che q contienesi in m, ed r ciò che avanza dalla divisione di m per q, onde $r < q$: sostituendo adunque, la $\alpha^m = 1$ si cangerà nell'altra $\alpha^{\mu q + r} = \alpha^r = 1$. Contengasi la r in m le volte ν, ed s ne sia l'avanzo; sarà perciò $\alpha^m = \alpha^{\nu r + s} = \alpha^s = 1$, avendosi $s < r < q$. Stia parimenti s in m le volte π e sia t il residuo, si avrà

$$\alpha^m = \alpha^{\pi s + t} = \alpha^t = 1,$$

Digitized by Google

equazione in cui $t < s < r < q$. Proseguendo nello stesso modo, vedesi che si avranno successivamente le equazioni $\alpha^u = 1$, $\alpha^\chi = 1$, ..., nelle quali gli esponenti u, χ, ... essendo numeri interi, anderanno sempre più calando; dunque giungeremo all'equazione $\alpha = 1$; ma questa è impossibile, essendosi supposta la α diversa dalla unità. Dunque, ecc.

Supposta, per esempio, $x^{17} - 1 = 0$ l'equazione data, ed α una delle sue radici diversa dall'unità, le α, α^2, α^3, ..., α^{17} pel n° prec. esprimeranno tutte le sue radici, perchè tutte disuguali fra loro. Se due quali si vogliono tra esse si volessero uguali, se si volesse per esempio $\alpha^6 = \alpha^{11}$, ne verrebbe $\alpha^5 = 1$, e però $\alpha^{17} = \alpha^{3.5+2} = \alpha^2 = 1$: ora $\alpha^{17} = \alpha^{2.8+1} = 1$; dunque sarebbe $\alpha = 1$, il che è contro l'ipotesi. Dunque, ecc.

200. *Qualunque potenza intera della α maggiore della m^{esima} ne uguaglia sempre un'altra non maggiore della m^{esima}, ed è per conseguenza una delle m radici della* $x^m - 1 = 0$.

Elevata la α alla potenza $(qm + r)^{esima}$ essendo q, r numeri interi e positivi, ed $r < m$, a cagione di $\alpha^m = 1$ avremo $\alpha^{qm+r} = \alpha^r$. Dunque, ecc.

201. Esprimendo n un numero intero positivo qualunque non multiplo di m, supponiamo $\alpha^n = \beta$, ne verrà α uguale ad una delle radici n^{esime} della β. Ora pei n^i 199, 200 α^n non è che una radice della $x^m - 1 = 0$; tale dunque è anche β. Per conseguenza, *se da una qualsivoglia radice β della $x^m - 1 = 0$ estraggasi una qualunque radice n^{esima} purchè sia n non multiplo di m, uno dei valori del radicale $\sqrt[n]{\beta}$ sarà anch'esso radice della* $x^m - 1 = 0$.

202. Avendosi $\alpha^m = 1$, sarà

$$\alpha = \frac{1}{\alpha^{m-1}} = \alpha^{-(m-1)}, \quad \alpha^2 = \frac{1}{\alpha^{m-2}} = \alpha^{-(m-2)}, \quad \alpha^3 = \frac{1}{\alpha^{m-3}} = \alpha^{-(m-3)}, \ldots,$$

e però *anche le potenze negative della α saranno tante radici della data equazione.*

203. Ritenendo le precedenti supposizioni, se venga proposta l'equazione $x^m - V = 0$, e sia $\sqrt[m]{V}$ una qualunque delle radici m^{esime} della V, per esempio, nella ipotesi di V razionale, sia la radice reale che ottienesi con l'attuale estrazione, le quantità

$$\alpha\sqrt[m]{V}, \quad \alpha^2\sqrt[m]{V}, \quad \alpha^3\sqrt[m]{V}, \ldots, \alpha^m\sqrt[m]{V}$$

altro non saranno che le m radici della supposta $x^m - V = 0$.

Sostituiscasi, nel primo membro $x^m - V$, in luogo di x la quantità $\alpha^n\sqrt[m]{V}$; avremo perciò il risultato $\alpha^{mn} V - V$: ma a cagione di $\alpha^{mn} = 1$ (n° 198) ne viene $\alpha^{mn} V - V = V - V = 0$. Dunque, la quantità $\alpha^n\sqrt[m]{V}$ sarà anch' essa radice della $x^m - V = 0$; e per conseguenza potendo la n significare un numero qualunque (n^i 198, 199, 200), se moltiplicheremo la $\sqrt[m]{V}$ per ciascuna delle m potenze α, α^2, α^3, ..., α^m, risultando in tal modo, pel n° 199, un numero m di quantità che soddisfanno all'equazione supposta, e tutte diverse fra loro, verremo ad ottenere tutte le m radici della $x^m - V = 0$.

Se si rappresenti con la lettera u una qualunque delle m radici α, α^2, α^3, ..., la quantità $u\sqrt[m]{V}$ ci esprimerà in generale una qualunque delle radici della $x^m - V = 0$.

Digitized by Google

204. Suppongasi ora m numero composto, e sia $m = pq$, essendo p, q numeri primi; la $x^m - 1 = 0$ si cangerà in questo caso nella $x^{pq} - 1 = 0$. Facciamo $x^p = z$, e quindi $x = u\sqrt[p]{z}$ (n° prec.); avremo, elevando a potenza, $x^{pq} = z^q$, e però $z^q = 1$, ed $x^p = u^p z$, ossia $z = u^p z$, e quindi $u^p = 1$; donde si vede, che la $x^{pq} - 1 = 0$ è risolubile nelle due $z^q - 1 = 0$, $u^p - 1 = 0$.

Sia β una delle radici della $z^q - 1 = 0$, e γ una di quelle della $u^p - 1 = 0$, diverse amendue dalla unità; pel n° 199 le successive potenze β, β^2, β^3, ..., β^q rappresenteranno le q radici della $z^q - 1 = 0$, e le γ, γ^2, γ^3, ..., γ^p esprimeranno le p radici della $u^p - 1 = 0$. Dunque, avendosi $x = u\sqrt[p]{z}$, dalla risoluzione delle $z^q - 1 = 0$, $u^p - 1 = 0$ otterremo tutti i valori della x combinando ciascun valore della u, ossia le quantità γ, γ^2, γ^3, ..., γ^p, con ciascun valore della $\sqrt[p]{z}$, cioè con le $\sqrt[p]{\beta}$, $\sqrt[p]{\beta^2}$, $\sqrt[p]{\beta^3}$, ..., $\sqrt[p]{\beta^q}$, ossia con le β, β^2, β^3, ..., β^q (n° 201).

205. *Dalle successive potenze di β e di γ considerate separatamente non potremo avere che un numero $p + q - 1$ di radici differenti della data $x^m - 1 = 0$.*

Giacchè uno dei valori della z (n° prec.) è $\beta^q = 1$, pongo questo valore nella $x = u\sqrt[p]{z}$, e divenendo essa perciò $x = u$, vedesi che, le successive potenze della γ essendo valori della u (n° prec.), saranno ancora valori della x e radici però della $x^m - 1 = 0$: ma tutte le possibili potenze della γ non dànno che un numero p di valori diversi (n^i 198, 199, 200), dunque dalle potenze della γ non avremo che un numero p di radici della $x^m - 1 = 0$. Essendo ora $\gamma^p = 1$ valore della u, pongasi questo nella $x = u\sqrt[p]{z}$, e risultando da ciò $x = \sqrt[p]{z}$, e quindi $x = \beta$, β^2, β^3, ..., β^q (n^i 201, prec.), avremo dalle potenze della β altre q radici della $x^m - 1 = 0$, compresavi l'unità corrispondente alla β^q: ma questa viene anche data dalla podestà p^{esima} della γ: sottraendola adunque, le diverse radici della $x^m - 1 = 0$ che ottengonsi dalle varie potenze di β e di γ verranno ad essere di numero $p + q - 1$. C. D. D.

206. *Se si prenda un'altra radice della*

$$x^m - 1 = 0$$

diversa e dalla unità e dalle potenze di β e di γ considerate separatamente, e facciansi di questa tutte le m potenze successive, esse altro non saranno che tutte le m radici della data.

Chiamatasi α simile radice, affine di dimostrare questo teorema non avrò che a dimostrare, siccome nel n° 199, che tutte le potenze α, α^2, α^3, ..., α^m sono fra loro disuguali. Ora per eseguir questo, supponiamo che due quali si vogliono fra loro siano, se è possibile, tra loro uguali, che sia per esempio $\alpha^r = \alpha^{r+s}$, avendosi $r < m$, ed $r + s$ non $> m$; sarà quindi $\alpha^s = 1$, e però α sarà la radice della $x^s = 1$: ma la s non può essere uguale nè all'unità, nè alla p, nè alla q, poichè altrimenti si avrebbe α o uguale all'unità o radice di una delle due

$$u^p - 1 = 0, \qquad z^q - 1 = 0$$

Digitized by Google

contro la supposizione: dunque, essendo s primo ad m (n° 204), avremo $m = \mu s + t$ e però $\alpha^{\mu s+t} = \alpha^t = 1$, essendo l'avanzo $t < s$. Proseguendo ora il discorso come al n° 199, giungeremmo finalmente ad ottenere $\alpha = 1$ contro la ipotesi. Dunque, essendo impossibile che tra le m precedenti potenze della α due qualunque ve ne siano uguali fra loro, ne segue che, etc.

Sia per esempio $m = 6$, onde abbiasi $p = 3$, $q = 2$; la data $x^6 - 1 = 0$ si risolverà in questo caso nelle due $\zeta^2 - 1 = 0$, $u^3 - 1 = 0$ (n° 204), e giacchè dalla prima abbiamo $\zeta = \pm 1$, e diviso il primo membro della seconda per $u - 1$ producesi l'equazione $u^2 + u + 1 = 0$, e quindi si ha $u = \frac{-1 \pm \sqrt{-3}}{2}$, ne viene che avremo

$$\beta = -1, \quad \beta^2 = 1, \quad \gamma = \frac{-1 + \sqrt{-3}}{2}, \quad \gamma^2 = \frac{-1 - \sqrt{-3}}{2}, \quad \gamma^3 = 1,$$

e queste ci daranno un numero $3 + 2 - 1 = 4$ di radici diverse della data (n° 205). Ora affine di averle tutte, giacchè $x = u\sqrt[p]{\zeta}$ (n° 204), e nel nostro caso $x = u\sqrt[3]{\zeta}$, pongo in vece della u il suo primo valore γ, e invece della ζ il valore β, e risultandoci

$$x = \gamma\sqrt[3]{\beta} = \frac{-1+\sqrt{-3}}{2} \times \sqrt[3]{-1} = \frac{-1+\sqrt{-3}}{2} \times -1 = \frac{+1-\sqrt{-3}}{2},$$

sarà questo pure un valore della x; ma esso è diverso dalle precedenti potenze della β e della γ, posto dunque $= \alpha$, pel n° prec. le sei successive potenze

$$\alpha = \frac{1 - \sqrt{-3}}{2}, \qquad \alpha^2 = \frac{-1 - \sqrt{-3}}{2}, \quad \alpha^3 = -1,$$

$$\alpha^4 = \frac{-1 + \sqrt{-3}}{2}, \quad \alpha^5 = \frac{1 + \sqrt{-3}}{2}, \qquad \alpha^6 = 1$$

altro non saranno che le sei radici della

$$x^6 - 1 = 0.$$

207. Se m abbia più di due fattori, se sia per esempio $m = abcd$, e però $x^m = x^{abcd} = 1$, mediante il discorso del n° 204 sciolgo prima questa equazione nelle due $\zeta^a = 1$, $r^{bcd} = 1$; poscia col discorso istesso risolvo la $r^{bcd} = 1$ nelle $u^b = 1$, $s^{cd} = 1$; e finalmente la $s^{cd} = 1$ nelle $y^c = 1$, $t^d = 1$: onde, risolta così la data $x^m = 1$ in tante equazioni $\zeta^a = 1$, $u^b = 1$, $y^c = 1$, $t^d = 1$, quanti sono i fattori a, b, c, d, avremo come nel n° 204 dalla combinazione fra loro delle radici di queste equazioni tutti gli m valori della x. E di fatti, combinando le radici della $t^d = 1$ con quelle della $y^c = 1$, otterremo tutte le cd radici della $s^{cd} = 1$; in seguito combinando queste con le radici della $u^b = 1$, ricaveremo le bcd radici della $r^{bcd} = 1$; e finalmente moltiplicando ciascuna di queste ultime con ciascuna radice della $\zeta^a = 1$, tutte ci risulteranno le $abcd = m$ radici della proposta.

208. Poichè le radici delle $\zeta^a - 1 = 0$, $u^b - 1 = 0$, ..., sono finalmente altrettanti valori della x, ne viene che potrò scrivere la x medesima in luogo delle ζ, u, ...;

Digitized by Google

e i primi membri delle equazioni $x^a - 1 = 0$, $x^b - 1 = 0$, ..., saranno tanti fattori della equazione data $x^m - 1 = 0$.

209. *Nelle radici della unità la loro somma, la somma degli ambi, la somma dei terni, etc. uguagliano lo zero, ed il loro prodotto è* $= \pm 1$, *prendendosi il segno superiore quando m sia dispari, e l'inferiore quando m sia pari.*

Mancando nella $x^m - 1 = 0$ tutti i termini a riserva del primo e dell'ultimo; paragonata questa con l'equazione generale $x^m + Ax^{m-1} + Bx^{m-2} + Cx^{m-3} + \cdots + V = 0$, diverrà ciascuno dei coefficienti A, B, C, ..., uguale allo zero, e l'ultimo $V = -1$. Dunque pel n° 31, etc.

210. *Supposto k un numero qualunque intero o fratto, positivo o negativo, purchè non multiplo di m, avremo sempre* $\sum x^k = 0$; *e, se vogliasi k multiplo di m, sarà* $\sum x^k = m$.

1° Se k è numero intero, positivo e minore di m, ripongo pel n° prec. lo zero in luogo dei coefficienti tutti A, B, C, ..., P nella (F) (n° 34); e otterremo $\sum x^k = 0$.

2° Vogliasi $k = mn + h$, essendo $h < m$. A cagione di $\alpha^{nm} = \alpha^m = 1$ (n° 198), avendosi

$$\alpha^{nm+h} = \alpha^{nm} \times \alpha^h = \alpha^h,$$

non è difficile a vedersi che sarà ancora $\sum x^{nm+h} = \sum x^h$; ma, pel prec. 1°,

$$\sum x^h = 0;$$

dunque sarà ancora $\sum x^{nm+h} = 0$.

3° Abbiasi $k = nm$; poichè per essere $\alpha^{nm} = \alpha^m$ si ha $\sum x^{nm} = \sum x^m$; e poichè riponendo lo zero in luogo dei coefficienti A, B, C, ..., e -1 in luogo di V (n° prec.) nella

$$\sum x^m + A\sum x^{m-1} + B\sum x^{m-2} + C\sum x^{m-3} + \cdots + mV = 0$$

(n° 36) si ottiene $\sum x^m - m = 0$, e però $\sum x^m = m$; sarà ancora $\sum x^{nm} = m$.

4° Essendo $\alpha^{pm-l} = \alpha^{pm} \times \alpha^{-l} = \alpha^{-l}$, è chiaro che quanto dicesi di $\sum x^{pm-l}$ dicesi ancora di $\sum x^{-l}$; ma supposto p tale che $pm > l$, pei prec. 1°, 2°, 3°, abbiamo $\sum x^{pm-l} = m$, se $pm - l$ e però l è un numero multiplo di m; e, se non lo è, abbiamo $\sum x^{pm-l} = 0$: dunque sarà eziandio $\sum x^{-l} = m$ nel primo caso, e $\sum x^{-l} = 0$ nel secondo.

211. Queste medesime proprietà si applicano ancora all'equazione $x^m - V = 0$, poichè e l'equazione istessa e le sue radici (n° 203) sono simili affatto e alla equazione e alle radici della unità.

Digitized by Google

CAPO XI.

SOLUZIONI DELLE EQUAZIONI ALGEBRAICHE DETERMINATE DI TERZO E QUARTO GRADO.

---

212. *Determinare le radici dell'equazione*

$$x^3 - V = 0.$$

Supposto

$$\alpha = \frac{-1 + \sqrt{-3}}{2}$$

(n° 206), avendosi

$$\alpha^2 = \frac{-1 - \sqrt{-3}}{2}, \qquad \alpha^3 = 1;$$

pel n° 203

$$\alpha\sqrt[3]{V}, \qquad \alpha^2\sqrt[3]{V}, \qquad \sqrt[3]{V}$$

saranno le tre radici richieste.

Se sia $V = 125$, tali radici saranno

$$\sqrt[3]{125} = 5, \qquad \alpha\sqrt[3]{125} = \frac{-5 + 5\sqrt{-3}}{2}, \qquad \alpha^2\sqrt[3]{125} = \frac{-5 - 5\sqrt{-3}}{2}.$$

213. *Sciogliere l'equazione*

(*N*) $$x^3 + Bx + C = 0.$$

Suppongo

$$x = z + u,$$

sostituisco, e verrà

$$z^3 + 3uz^2 + 3u^2z + u^3 + Bz + Bu + C = 0,$$

ossia

$$z^3 + u^3 + C + (3uz + B)(z + u) = 0.$$

Giacchè in questa equazione risultata abbiamo due incognite z, u, l'una di esse potrò determinarla ad arbitrio; cerchiamo dunque di determinare la u per modo che risulti

$$3uz + B = 0,$$

e la precedente equazione divenga perciò

$$z^3 + u^3 + C = 0.$$

Sciolgo a tal fine la equazione

$$3uz + B = 0,$$

Digitized by Google

e avendosi da essa $u = -\frac{B}{3z}$, sostituisco questo valore nell'altra

$$z^3 + u^3 + C = 0,$$

e otterremo così l'equazione

$$z^3 - \frac{B^3}{27z^3} + C = 0,$$

ossia

$$z^6 + Cz^3 - \frac{B^3}{27} = 0.$$

Cercando presentemente la soluzione di quest'ultima, suppongo $z^3 = y$; sostituisco, e risultando

$$y^2 + Cy - \frac{B^3}{27} = 0,$$

ne verrà

$$y = -\frac{C}{2} + \sqrt{\frac{C^2}{4} + \frac{B^3}{27}},$$

ovvero

$$y = p + q,$$

supposto per semplicità di scrivere

$$-\frac{C}{2} = p, \qquad \sqrt{\frac{C^2}{4} + \frac{B^3}{27}} = q:$$

ora chiamata α una qualunque delle tre radici cubiche della unità, pel n° prec. dalla $z^3 = y$ abbiamo $z = \alpha\sqrt[3]{y}$.

Dunque sostituendo sarà

$$z = \alpha\sqrt[3]{p+q}.$$

Ripongo questo valore nella $u = -\frac{B}{3z}$, e avremo

$$u = -\frac{B}{3\alpha\sqrt[3]{p+q}}.$$

Giacchè $\alpha^3 = 1$, moltiplico il numeratore di questo secondo membro per $\alpha^3\sqrt[3]{p-q}$, e il denominatore per $\sqrt[3]{p-q}$; avremo quindi

$$u = \frac{-\alpha^3 B\sqrt[3]{p-q}}{3\alpha\sqrt[3]{p+q}\times\sqrt[3]{p-q}} = \frac{-\alpha^2 B\sqrt[3]{p-q}}{3\sqrt[3]{p^2-q^2}},$$

ed essendo

$$q^2 = \frac{C^2}{4} + \frac{B^3}{27} = p^2 + \frac{B^3}{27},$$

Digitized by Google

sarà

$$u = \frac{-\alpha^2 B\sqrt[3]{p-q}}{3\sqrt[3]{p^2-p^2-\frac{B^3}{27}}} = \frac{-\alpha^2 B\sqrt[3]{p-q}}{-3\frac{B}{3}} = \alpha^2\sqrt[3]{p-q}.$$

Dunque, riponendo in luogo della p e della q i valori corrispondenti, poichè abbiamo

$$x = z + u = \alpha\sqrt[3]{p+q} + \alpha^2\sqrt[3]{p-q},$$

ne verrà

$$(O) \qquad x = \alpha\sqrt[3]{-\frac{C}{2}+\sqrt{\frac{C^2}{4}+\frac{B^3}{27}}} + \alpha^2\sqrt[3]{-\frac{C}{2}-\sqrt{\frac{C^2}{4}+\frac{B^3}{27}}},$$

espressione a cui si dà il nome di *formola cardanica,* dalla quale, collocando successivamente in vece della α le tre radici cubiche dell'unità, otterremo tre valori della x, cioè le tre radici che domandavansi della data.

214. Nello sciogliere nel n° prec. l'equazione

$$y^2 + Cy - \frac{B^3}{27} = 0,$$

abbiam tenuto conto della sola radice

$$y = -\frac{C}{2} + \sqrt{\frac{C^2}{4}+\frac{B^3}{27}};$$

se presa avessimo l'altra

$$y = -\frac{C}{2} - \sqrt{\frac{C^2}{4}+\frac{B^3}{27}},$$

col calcolo istesso del n° prec. giunti saremmo pel valore della x all'espressione

$$\alpha\sqrt[3]{-\frac{C}{2}-\sqrt{\frac{C^2}{4}+\frac{B^3}{27}}} + \alpha^2\sqrt[3]{-\frac{C}{2}+\sqrt{\frac{C^2}{4}+\frac{B^3}{27}}}.$$

Ma per le proprietà delle radici della unità gli stessi tre valori ricavansi sì da questa, che dall'altra espressione (n° prec.). Dunque pel nostro intento bastava, siccome abbiam fatto, tener conto di un solo dei valori della y, trascurandone l'altro.

215. *Risolvere l'equazione generale di terzo grado*

$$x^3 + Ax^2 + Bx + C = 0.$$

Suppongo

$$x = t - \frac{A}{3};$$

e ridotta così la data ad un'altra

$$t^3 + B't + C' = 0$$

mancante del secondo termine, sciolgo quest'ultima equazione col metodo del n° 213, e ottenuto

$$t = \alpha\sqrt[3]{-\frac{C'}{2}+\sqrt{\frac{C'^2}{4}+\frac{B'^3}{27}}} + \alpha^2\sqrt[3]{-\frac{C'}{2}-\sqrt{\frac{C'^2}{4}+\frac{B'^3}{27}}},$$

Digitized by Google

colloco invece della t' il valore $x + \frac{A}{3}$, e invece delle B', C' i loro valori espressi con i coefficienti A, B, C. Avendosi per tal modo le radici della data, vedesi infine che la soluzione dell'equazione generale di terzo grado si riduce alla (N).

216. *Determinare un criterio, onde conoscere quando le radici di un'equazione di terzo grado siano reali, e quando immaginarie.*

Una di queste radici pel n° 54 sarà sempre reale; non vien dunque richiesto che di determinare quali siano le altre due.

Se l'equazione data sia la

$$x^3 - V = 0$$

(n° 212), essendo il valore $\sqrt[3]{V}$ sempre reale, gli altri due $\alpha\sqrt[3]{V}$, $\alpha^2\sqrt[3]{V}$ saranno sempre evidentemente immaginari.

Che, se l'equazione proposta sia la (N), chiamate α, β, γ le sue tre radici, supponiamo rappresentarsi da α la radice necessariamente reale. Avendosi pel n° 31

$$\alpha + \beta + \gamma = 0,$$

e però

$$\alpha = -(\beta + \gamma),$$

sostituisco in luogo di α il valore $-(\beta + \gamma)$ nei coefficienti

$$B = \alpha\beta + \alpha\gamma + \beta\gamma, \qquad C = -\alpha\beta\gamma,$$

ed otterremo

$$B = -(\beta^2 + \beta\gamma + \gamma^2), \qquad C = \beta^2\gamma + \beta\gamma^2.$$

Elevo ora B al cubo, C al quadrato; ne verrà

$$B^3 = -(\beta^6 + 3\beta^5\gamma + 3\beta^4\gamma^2 + 3\beta^4\gamma^2 + 6\beta^3\gamma^3 + 3\beta^2\gamma^4 + \beta^3\gamma^3 + 3\beta^2\gamma^4 + 3\beta\gamma^5 + \gamma^6),$$
$$C^2 = \beta^4\gamma^2 + 2\beta^3\gamma^3 + \beta^2\gamma^4.$$

Moltiplico il primo di questi risultati per 4, il secondo per 27; li sommo, e ricavandosi in tal modo

$$27C^2 + 4B^3 = -(4\beta^6 + 12\beta^5\gamma + 24\beta^4\gamma^2$$
$$+ 28\beta^3\gamma^3 + 24\beta^2\gamma^4 + 12\beta\gamma^5 + 4\gamma^6 - 27\beta^4\gamma^2 - 54\beta^3\gamma^3 - 27\beta^2\gamma^4),$$

riducendo avremo

$$27C^2 + 4B^3 = -(2\beta^3 + 3\beta^2\gamma - 3\beta\gamma^2 - 2\gamma^3)^2.$$

Ma, col dividere questa quantità posta sotto la parentesi per $\beta - \gamma$, ne viene il quoto

$$2\beta^2 + 5\beta\gamma + 2\gamma^2 = 2(\beta^2 + \beta\gamma + \gamma^2) + 3\beta\gamma = -\left(2B + \frac{3C}{\alpha}\right).$$

Dunque sarà

$$27C^2 + 4B^3 = -(\beta - \gamma)^2\left(2B + \frac{3C}{\alpha}\right)^2,$$

e quindi

$$(\beta - \gamma)^2 = -\frac{27C^2 + 4B^3}{\left(2B + \frac{3C}{\alpha}\right)^2}.$$

Digitized by Google

Considerando ora questa frazione

$$\frac{27C^2+4B^3}{\left(2B+\frac{3C}{\alpha}\right)^2};$$

giacchè il suo denominatore $\left(2B+\frac{3C}{\alpha}\right)^2$ è sempre positivo a cagione della quantità $2B+\frac{3C}{\alpha}$ sempre reale; sarà essa o positiva o negativa o zero, secondo che tale sarà il numeratore $27C^2+4B^3$.

Supponiamo primieramente

$$27C^2+4B^3>0;$$

avendosi in tal caso

$$\beta-\gamma=\sqrt{-\frac{27C^2+4B^3}{\left(2B+\frac{3C}{\alpha}\right)^2}},$$

ne verrà $\beta-\gamma=$ ad una quantità immaginaria che chiamerò i; e giacchè poi sommando e sottraendo le due equazioni

$$\beta+\gamma=-\alpha, \qquad \beta-\gamma=i,$$

risulta

$$\beta=\frac{i-\alpha}{2}, \qquad \gamma=\frac{-i-\alpha}{2},$$

ne segue che in questa ipotesi le radici β, γ sono amendue immaginarie.

Sia in secondo luogo

$$27C^2+4B^3<0;$$

avendo in questa supposizione tale quantità un valor negativo, chiamato esso $-N$, la precedente frazione diverrà

$$(\beta-\gamma)^2=\frac{N}{\left(2B+\frac{3C}{\alpha}\right)^2},$$

e avremo da ciò

$$\beta-\gamma=\sqrt{\frac{N}{\left(2B+\frac{3C}{\alpha}\right)^2}}=\text{ ad una quantità reale;}$$

chiamata r simile quantità, facciamo la somma e la sottrazione delle due

$$\beta+\gamma=-\alpha, \qquad \beta-\gamma=r;$$

risultandoci da queste operazioni

$$\beta=\frac{r-\alpha}{2}, \qquad \gamma=\frac{-r-\alpha}{2},$$

vedesi che in questo caso le due radici β, γ saranno entrambe reali e disuguali fra loro.

Abbiasi finalmente

$$27C^2+4B^3=0,$$

divenendo in tale ipotesi $\beta-\gamma=0$, con la solita somma e sottrazione di questa con

Digitized by Google

l'altra equazione $\beta + \gamma = -\alpha$, otterremo $\beta = \frac{-\alpha}{2}$, $\gamma = -\frac{\alpha}{2}$; onde in quest'ultimo caso le due β, γ sono reali ed uguali fra loro.

Ora divisa la quantità

$$27\,C^2 + 4\,B^3$$

per 4.27, ne viene il risultato $\frac{C^2}{4} + \frac{B^3}{27}$, quello cioè che è contenuto nella (O) sotto il radicale secondo; e mentre sia maggiore, o minore, od uguale allo zero $27\,C^2 + 4\,B^3$, tale diviene pur anche $\frac{C^2}{4} + \frac{B^3}{27}$. Dunque, rimanendo la radice α sempre reale, le altre due β, γ diremo essere sempre immaginarie se abbiasi $\frac{C^2}{4} + \frac{B^3}{27} > 0$; diremo essere tali radici sempre reali e fra loro disuguali, se sia $\frac{C^2}{4} + \frac{B^3}{27} < 0$; ed essere queste finalmente uguali tra loro e reali, se risulti $\frac{C^2}{4} + \frac{B^3}{27} = 0$. Dalla sola ispezione adunque della quantità posta nella (O) sotto il segno radicale secondo avremo la soluzione del proposto problema.

Se finalmente venga data l'equazione generale

$$x^3 + Ax^2 + Bx + C = 0;$$

la soluzione di questa dipendendo dalla

$$t^3 + B't + C' = 0$$

(n° prec.), equazione simile alla

$$x^3 + Bx + C = 0,$$

ne viene che, tolta la radice sempre reale (n° 54), le altre due saranno, o immaginarie, o reali uguali, o disuguali fra loro, secondo che la quantità $\frac{C'^2}{4} + \frac{B'^3}{27}$ diviene maggiore, oppure uguale, o minore dello zero.

217. Da quanto abbiamo detto si vede, che: *se due radici della data equazione* (n^i 213, 215) *sono immaginarie, la formola cardanica viene sotto un'aspetto reale; e che essa apparisce sotto un'aspetto immaginario, se tutte e tre le radici sono reali e disuguali fra loro.* In quest'ultimo caso la formola cardanica è tale che, quantunque le tre radici siano tutte reali, pure non si possono mai ottenere che involte di quantità immaginarie, e quindi è che questo ha avuto il nome di *caso irreducibile.*

218. *Sciogliere l'equazione* $x^4 - V = 0$.

Trasporto la V nel secondo membro, estraggo dalla $x^4 = V$ la radice seconda, e avuto il risultato $x^2 = \pm\sqrt{V}$, estraggo di nuovo la radice medesima, e ne verrà $x = \pm\sqrt{\pm\sqrt{V}}$; onde

$$+\sqrt{+\sqrt{V}}, \quad -\sqrt{+\sqrt{V}}, \quad +\sqrt{-\sqrt{V}}, \quad -\sqrt{-\sqrt{V}}$$

Digitized by Google

saranno le quattro radici della data, due delle quali, mentre la V sia positiva, sono reali, e due immaginarie.

Se $V = 2401$, le quattro radici della $x^4 - 2401 = 0$ saranno $7, -7, 7\sqrt{-1}, -7\sqrt{-1}$.

219. *Risolvere la*

$$x^4 + Bx^2 + D = 0.$$

Suppongo $x^2 = z$, sostituisco e, avutasi l'equazione

$$z^2 + Bz + D = 0,$$

la sciolgo, onde avremo

$$z = -\frac{B}{2} \pm \sqrt{\frac{B^2}{4} - D}.$$

Ora $x = \pm\sqrt{z}$; dunque sostituendo otterremo

$$x = \pm\sqrt{-\frac{B}{2} \pm \sqrt{\frac{B^2}{4} - D}}.$$

Se $B = -34$, $D = 225$ e l'equazione data sia

$$x^4 - 34x^2 + 225 = 0,$$

otterremo le quattro radici $+5, -5, +3, -3$.

220. *L'equazione a risolversi sia la*

$$(P) \qquad x^4 + Bx^2 + Cx + D = 0.$$

Ridotta questa alla

$$x^4 + Bx^2 = -(Cx + D),$$

aggiungasi ad amendue i membri la quantità

$$zx^2 + \left(\frac{B+z}{2}\right)^2,$$

essendo z una nuova incognita da determinarsi; ciò fatto avremo

$$x^4 + (B+z)x^2 + \left(\frac{B+z}{2}\right)^2 = zx^2 + \left(\frac{B+z}{2}\right)^2 - Cx - D,$$

ossia

$$\left(x^2 + \frac{B+z}{2}\right)^2 = z\left(x^2 - \frac{C}{z}x + \frac{(B+z)^2}{4z} - \frac{D}{z}\right).$$

Ora il primo membro di questa equazione è un quadrato perfetto; cercando adunque di render tale anche il secondo, procuriamo di determinare la z in maniera che questo riesca, e possa così da esso estrarsi la radice seconda, senza che la x resti involta nel radicale. È chiaro che avremo l'intento, rendendo un quadrato perfetto la quantità

$$x^2 - \frac{C}{z}x + \frac{(B+z)^2 - 4D}{4z};$$

ma questa sarebbe appunto tale, se il quadrato della metà del coefficiente $\frac{C}{z}$ uguagliasse l'ultimo termine $\frac{(B+z)^2 - 4D}{4z}$; supporrò adunque, dipendentemente dalla indetermi-

Digitized by Google

nata z, l'equazione

$$\frac{C^2}{4z^2} = \frac{(B+z)^2 - 4D}{4z},$$

e avremo quindi

$$z^3 + 2Bz^2 + (B^2 - 4D)z - C^2 = 0,$$

equazione del terzo grado, la cui soluzione, pel n° 215 a noi cognita, ci darà tre valori della z, e uno di questi, sostituito nella

$$x^2 - \frac{C}{z}x + \frac{(B+z)^2 - 4D}{4z},$$

la renderà un quadrato perfetto, la renderà cioè

$$x^2 - \frac{C}{z}x + \frac{C^2}{4z^2} = \left(x - \frac{C}{2z}\right)^2.$$

Espresso per z' uno qualunque di questi valori, esso ci darà

$$\left(x^2 + \frac{B+z'}{2}\right)^2 = z'\left(x - \frac{C}{2z'}\right)^2,$$

ed estraendo la radice quadrata,

$$x^2 + \frac{B+z'}{2} = \pm\left(x - \frac{C}{2z'}\right)\sqrt{z'},$$

ossia

$$x^2 \mp x\sqrt{z'} + \frac{B+z'}{2} \pm \frac{C}{2\sqrt{z'}} = 0,$$

equazione dalla cui soluzione abbiamo

$$x = \frac{\pm\sqrt{z'}}{2} \pm \sqrt{-\frac{2B+z'}{4} \mp \frac{C}{2\sqrt{z'}}}:$$

espressione generale della x, in cui il segno positivo di $\frac{\sqrt{z'}}{2}$ combinasi col negativo di $\frac{C}{2\sqrt{z'}}$ e viceversa, ed ambedue poscia i segni di queste quantità così combinate corrispondono egualmente sì all'uno che all'altro dei segni della

$$\sqrt{-\frac{2B+z'}{4} \mp \frac{C}{2\sqrt{z'}}},$$

onde avremo con simili combinazioni i quattro valori della x.

Giacchè poi dall'equazione

$$z'^3 + 2Bz'^2 + (B^2 - 4D)z' - C^2 = 0$$

abbiamo

$$\frac{C}{2\sqrt{z'}} = \frac{\sqrt{z'^3 + 2Bz'^2 + (B^2 - 4D)z'}}{2\sqrt{z'}} = \frac{\sqrt{z'^2 + 2Bz' + B^2 - 4D}}{2},$$

sostituendo nella formola ritrovata in luogo di $\frac{C}{2\sqrt{z'}}$ questa quantità otterremo per le

Digitized by Google

chieste radici l'altra espressione

$$x = \frac{\pm\sqrt{z'}}{2} \pm \sqrt{-\frac{2B + z'}{4} \mp \frac{\sqrt{z'^2 + 2Bz' + B^2 - 4D}}{2}}.$$

221. Potrebbe sembrare a taluno che, avendo la z tre valori diversi, a ciascuno di questi corrispondere potessero quattro valori diversi della x, onde la data venisse così ad avere dodici diverse radici contro del n° 21: ma questa illusione svanirà ben presto, riflettendo che, chiamati z', z'', z''' i tre valori della z, quei valori della x che corrispondono a z', quegli stessi sono che corrispondono a z'' ed a z'''. Imperciocchè, non avendo noi fatto altro nella

$$x^4 + Bx^2 = -(Cx + D)$$

che aggiungere nell'un membro e nell'altro la medesima quantità

$$x^2 + \left(\frac{B + z}{2}\right)^2,$$

qualunque sia il valore della z, non turbandosi quindi l'equazione, non vengono perciò a turbarsi neppure le radici della data; il restante del precedente raziocinio non serve che per determinare fra gli infiniti valori della z quei che rendono

$$x^2 - \frac{C}{z}x + \frac{(B + z)^2 - 4D}{4z}$$

un quadrato perfetto, tali ritrovandosi essere i soli tre z', z'', z'''.

222. La soluzione della precedente equazione di quarto grado dipende dalla soluzione della equazione in z, che è di terzo grado. Dunque, andando quest'ultima pel n° 216 soggetta al caso irreducibile, al caso medesimo anderà soggetta anche l'altra di quarto grado.

223. *Risolvere l'equazione generale di quarto grado*

$$x^4 + Ax^3 + Bx^2 + Cx + D = 0.$$

Suppongo $x = t - \frac{A}{4}$, sostituisco, e ridotta così la data ad un'altra della forma

$$t^4 + B't^2 + C't + D' = 0$$

risolvo quest'ultima col metodo del n° 220: ciò fatto, pongo di nuovo in luogo della t e dei coefficienti B', C', D' i corrispondenti valori, e avremo così la soluzione dimandata.

224. Le riflessioni istesse dei n^i 221, 222 riguardanti l'equazione del n° 220, è chiaro che si applicano egualmente anche all'equazione generale del n° prec.

225. Se l'equazione proposta supera il quarto grado, non possiamo aver metodo, onde ottenerne la soluzione generale algebraica. Gioverà però il fare le riflessioni seguenti.

Digitized by Google

CAPO XII.

DELLA SOLUZIONE ALGEBRAICA RICAVATA *A PRIORI* DELLE EQUAZIONI DETERMINATE DI TERZO E QUARTO GRADO.

226. Chiamasi *algebraica* quella quantità la quale, contenendo un numero finito di termini finiti, dipende pienamente e solamente da alcune o da tutte le sei operazioni dell'algebra o dell'aritmetica: tali sono tutte le quantità considerate finora, e tali quelle che andiamo considerando continuamente in questa Teoria, quelle eccettuate dei Capi 17, 18, 19, 20 [10]. In conseguenza di questa definizione diremo che una data equazione resta risoluta per una soluzione algebraica, o algebraicamente, ogni qual volta il valore delle sue radici ottienesi espresso da quantità algebraica.

227. Ciò posto, mentre vogliasi sciogliere algebraicamente un'equazione determinata di un grado qualunque, è chiaro che non potremo farlo che riducendo essa ad un'altra equazione di grado inferiore o dello stesso grado, di cui ci sia nota la soluzione, e dalle radici della quale possiamo in seguito determinare, o mediatamente o immediatamente, le radici della proposta: ma le radici della trasformata sono funzioni delle radici della data (n° 88); dunque, *per la soluzione algebraica delle equazioni altro non facciamo che determinare delle funzioni delle radici della equazione proposta, tali che l'equazione, dalla quale esse dipendono, abbia le proprietà accennate.* Molti sono i metodi a questo fine proposti, e tutti si riducono a questo solo principio: si può ciò vedere facilmente nelle precedenti soluzioni delle equazioni di terzo e quarto grado (n' 213, 215, 219, 220). Essendo però quelle state ritrovate con particolari artifizj, e come suol dirsi *a posteriori,* cercheremo nel capo presente di determinare esse medesime *a priori,* e con tutta la generalità; onde veniamo così a conoscere cosa c'insegni l'esposto principio nella soluzione generale algebraica di tutte le equazioni.

228. Abbiasi l'equazione di terzo grado

$$(N) \qquad x^3 + Bx + C = 0$$

mancante per maggiore semplicità del secondo termine. Affine di averne la soluzione *a priori,* cercherò primamente di ridurla ad un'altra di grado inferiore.

Ma se si consideri la funzione

$$f(x')(x'')(x''')$$

esprimente in generale le radici di qualunque trasformata della (N) (n° 88), sappiamo dal n° 92, che essa, generalmente parlando, mentre sia razionale, è determinabile per

Digitized by Google

un'equazione del grado $1.2.3 = 6$, di cui le radici sono

$$(I)\qquad \begin{cases} 1^a\ f(x')(x'')(x'''), & 4^a\ f(x')(x''')(x''), \\ 2^a\ f(x''')(x')(x''), & 5^a\ f(x'')(x')(x'''), \\ 3^a\ f(x'')(x''')(x'), & 6^a\ f(x''')(x'')(x'). \end{cases}$$

Dunque, per ottenere la soluzione cercata, ossia un tale abbassamento, supposta per ora la nostra funzione costantemente razionale, converrà che delle esposte sei radici ve ne siano delle uguali fra loro.

Ora simile uguaglianza deve succedere indipendentemente dal valore particolare delle

$$x',\quad x'',\quad x'''$$

(n° 95), giacchè la data non è che un'equazione generale, equazione, per conseguenza, la quale prescinde da qualunque valore particolare delle sue radici; dunque, questi sei valori dovendo essere uguali tra loro per la forma della funzione (n° 88), converrà che siano fra loro uguali a tre a tre per lo meno; onde in allora due soltanto divenendo i valori diversi della funzione, la trasformata non ascenderà che al secondo grado.

Supponiamo perciò la funzione $1^a = 2^a$, cioè supponiamo che la funzione 1ª resti la medesima trasportando la radice che occupa l'ultimo luogo nel primo, e avanzando le altre due nella posizione, in cui si trovano [11].

Questa proprietà deve pel n° 97 competere anche alle altre radici; dunque avremo la $2^a = 3^a$, $4^a = 5^a$, $5^a = 6^a$; ma per la ipotesi si ha $1^a = 2^a$, e presentemente abbiamo $2^a = 3^a$; dunque sarà la funzione $1^a = 2^a = 3^a$, e così la funzione $4^a = 5^a = 6^a$ [12]. Una tale supposizione pertanto soddisferà alla condizione cercata, e si otterrà per suo mezzo un'equazione del grado $\frac{1.2.3}{3} = 2$.

229. [13] Infinite sono le funzioni che godono di questa proprietà: volendosi però esprimerne in generale la forma, prendiamo un'altra funzione qualunque delle x', x'', x''', che esprimeremo con la caratteristica φ, e le tre

$$\varphi(x')(x'')(x'''),\qquad \varphi(x''')(x')(x''),\qquad \varphi(x'')(x''')(x'),$$

che corrispondono alle tre precedenti funzioni 1^a, 2^a, 3^a (n° prec.), si disegnino con le lettere ζ', ζ'', ζ''', e con le u', u'', u''' si disegnino le altre tre funzioni

$$\varphi(x')(x''')(x''),\qquad \varphi(x'')(x')(x'''),\qquad \varphi(x''')(x'')(x')$$

corrispondenti alla 4^a, 5^a, 6^a.

Ciò fatto, io dico che *sarà in generale la precedente funzione* $1^a = F(\zeta', \zeta'', \zeta''')$ e la $4^a = F(u', u'', u''')$.

Imperciocchè, potendosi evidentemente una qualunque funzione delle x', x'', x''' considerare sempre come composta di altre funzioni delle radici medesime; di più essendo la 1ª una funzione non soggetta ad altra condizione che a quella di restar la medesima pel cangiamento del n° prec., e finalmente per simile cangiamento non facendo le ζ', ζ'', ζ''' che permutarsi fra loro, e così fra loro le u', u'', u'''; quindi ne segue che

Digitized by Google

qualunque suppongasi la $\varphi(x')(x'')(x''')$, le

$$F(z', z'', z'''), \qquad F(u', u'', u''')$$

saranno appunto sempre tali che soddisferanno in generale alla condizione del n° prec., e però avremo la funzione

$$1^a = 2^a = 3^a = F(z', z'', z''')$$

e la

$$4^a = 5^a = 6^a = F(u', u'', u''').$$

Sia per esempio $z' = \frac{x'^2}{x''}$; avendosi perciò

$$z'' = \frac{x'''^2}{x'}, \qquad z''' = \frac{x''^2}{x'''}$$

ed

$$u' = \frac{x'^2}{x'''}, \qquad u'' = \frac{x''^2}{x'}, \qquad u''' = \frac{x'''^2}{x''},$$

se per esempio supporremo

$$F(z', z'', z''') = z' + z'' + z''',$$

la funzione

$$\frac{x'^2}{x''} + \frac{x'''^2}{x'} + \frac{x''^2}{x'''}$$

sarà appunto quale è stata richiesta nel n° prec. la $1^a = f(x')(x'')(x''')$, e non avrà che i due valori diversi

$$\frac{x'^2}{x''} + \frac{x'''^2}{x'} + \frac{x''^2}{x'''}, \qquad \frac{x'^2}{x'''} + \frac{x''^2}{x'} + \frac{x'''^2}{x''}.$$

230. Giacchè le

$$F(z', z'', z'''), \qquad F(u', u'', u'''),$$

qualunque esse siensi, qualunque forma si dia alla

$$\varphi(x')(x'')(x'''),$$

e qualunque permutazione si faccia tra le x', x'', x''', non possono mai acquistare che due valori diversi (n° prec.), chiamiamo la prima di queste funzioni y', la seconda y'', ed

(II) $$y^2 + Sy + T = 0$$

l'equazione da cui dipende il loro valore.

Determinati mediante il n° 105 i coefficienti S, T, sciogliamo la (II), ed ottenuti per tal modo i valori delle y', y'' espressi pei coefficienti della data, non resterà, pel n° 227, che a trovare in conseguenza di questi il valore richiesto delle x', x'', x'''. Ma essendo la x' una funzione della forma

$$f(x')(x'', x''')$$

(n° 103), la sua determinazione in conseguenza di uno dei due valori y', y'' deve pei n^i 103, 156 necessariamente dipendere da un'equazione del terzo grado, ed anzi dalla stessa

$$x^3 + Bx + C = 0,$$

Digitized by Google

poichè di tale equazione non solo deve esser radice la x', ma anche le altre due x'', x''' (n° 93).

Dunque, non sapendosi questa risolvere, e di più non sapendosi risolvere in generale le equazioni di terzo grado, se non se mentre sono della forma

$$Z^3 - M = 0,$$

ne viene, che inutile sarebbe il cercare immediatamente dalle y', y'' il valore delle x', x'', x''', e che in vece converrà cercare dalle stesse y', y'' prima il valore di altre funzioni, le quali divengano radici di equazioni di terzo grado non aventi che il primo e l'ultimo termine, e da queste già conosciute potremo poscia pel n° 144 dedurre il valore delle x', x'', x''', senza ricorrere ad altre equazioni di grado maggiore del primo.

Chiamata Z questa nuova funzione, siano Z', Z'', Z''' i suoi tre valori, che corrispondono ad y', e però alle tre permutazioni 1^a, 2^a, 3^a (n° 229); siano V', V'', V''' i valori corrispondenti alla y'', e però alle altre tre permutazioni 4^a, 5^a, 6^a; e siano finalmente

$$Z^3 - M = 0, \qquad V^3 - N = 0$$

le due equazioni, di cui queste funzioni sono radici. Sciolgo la prima di queste due equazioni, ed avendosi pel n° 212

$$Z = \sqrt[3]{M}, \qquad \alpha\sqrt[3]{M}, \qquad \alpha^2\sqrt[3]{M},$$

posto

$$Z' = \sqrt[3]{M},$$

sarà

$$Z'' = \alpha\sqrt[3]{M} = \alpha Z', \qquad Z''' = \alpha^2\sqrt[3]{M} = \alpha^2 Z';$$

e nel modo istesso trovasi

$$V'' = \alpha V', \qquad V''' = \alpha^2 V'.$$

Dunque la funzione Z pel nostro intento non potrà già essere qualunque, ma dovrà esser tale, che i suoi valori Z', Z'', Z''' corrispondendo alle 1^a, 2^a, 3^a; e gli altri V', V'', V''' alle 4^a, 5^a, 6^a, si abbiano le quantità Z'', V'', Z''', V''' uguali rispettivamente alle Z', V', moltiplicate le prime due per α, le seconde per α^2.

231. Tutti i metodi adunque di soluzione per le equazioni di terzo grado, dipendenti dall'ipotesi del n° 228, a questo necessariamente riduconsi, di trovare cioè da prima una supposizione che renda le funzioni del n° 228 uguali fra loro a tre a tre, e di determinare in tal modo un'equazione

$$y^2 + Sy + T = 0,$$

di cui siano radici le

$$y' = F(z', z'', z'''), \qquad y'' = F(u', u'', u''')$$

(n^i 229, 230), essendo la z una funzione qualunque.

Determinati poscia con la soluzione della

$$y^2 + Sy + T = 0$$

Digitized by Google

i valori delle radici y', y'', prendesi un'altra funzione Z dotata delle proprietà accennate nel n° prec.; si determina dal valore y' il coefficiente M, oppure da y'' l'altro N, il che può sempre farsi razionalmente pel n° 145; e sciolta infine una delle due equazioni

$$Z^3 - M = 0, \qquad V^3 - N = 0,$$

e conosciuto così il valore delle Z', Z'', Z''' o delle V', V'', V''' da cadauna delle prime o delle seconde di queste quantità deducesi corrispondentemente il valore di ciascuna delle radici x', x'', x''', e questo può sempre effettuarsi mediante la formola (M) (n° 144).

Come un tale andamento abbiasi seguito *a posteriori* nella soluzione del n° 213, lo vedremo fra non molto, ma prima cerchiamo di compiere la soluzione medesima, che ci siamo proposta *a priori* (n° 228), e di fare alcune ulteriori riflessioni.

232. Potendo la funzione ζ avere una forma ed un valore qualunque (n° 229), supponiamo per maggiore semplicità $\zeta = Z$, onde in vece di attendere a due funzioni diverse, non abbiasi a tener conto che di una sola; sarà quindi

$$\zeta^3 = M, \qquad u^3 = N, \qquad \zeta'' = \alpha\zeta', \qquad \zeta''' = \alpha^2\zeta', \qquad u'' = \alpha u', \qquad u''' = \alpha^2 u'$$

(n° 230). Ciò presupposto, diamo alla ζ ossia alla Z questa forma

$$Px' + Qx'' + Rx''',$$

che è la più semplice, e supponiamo le quantità P, Q, R costanti, e da determinarsi per modo, che si vengano a verificare le condizioni precedenti (n^i 228, 230) [14]. Essendo pertanto

$$\zeta' = Px' + Qx'' + Rx''',$$

ne verrà

$$\zeta'' = Px''' + Qx' + Rx'', \qquad \zeta''' = Px'' + Qx''' + Rx',$$

e però

$$Px''' + Qx' + Rx'' = \alpha\,(Px' + Qx'' + Rx'''),$$
$$Px'' + Qx''' + Rx' = \alpha^2(Px' + Qx'' + Rx''').$$

Paragono ora insieme i termini omologhi di queste equazioni, ed ottenendosi

$$P = \alpha R, \qquad Q = \alpha P, \qquad R = \alpha Q, \qquad P = \alpha^2 Q, \qquad Q = \alpha^2 R, \qquad R = \alpha^2 P,$$

osservo che abbiamo con tre indeterminate P, Q, R sei equazioni. Dunque alcune di esse, o sono identiche con le altre, o sono assurde. Se fossero queste assurde, allora la supposta

$$Px' + Qx'' + Rx'''$$

non potrebbe servire all'intento; che, se siano identiche, la funzione sarà opportuna.

Colloco in luogo delle Q, R i due loro valori αP, $\alpha^2 P$ ottenuti dalle $Q = \alpha P$, $R = \alpha^2 P$; divengono perciò identiche tutte le precedenti equazioni, e la P resta indeterminata; dunque la

$$Px' + Qx'' + Rx'''$$

è stata opportunamente supposta, e dato alla P per maggior semplicità il valore 1, avremo

$$\zeta' = (x' + \alpha x'' + \alpha^2 x'''), \quad \zeta'' = \alpha(x' + \alpha x'' + \alpha^2 x'''), \quad \zeta''' = \alpha^2(x' + \alpha x'' + \alpha^2 x''').$$

Digitized by Google

Quello che si è detto delle z', z'', z''', dicendosi egualmente delle u', u'', u''', sarà

$$u' = (x' + \alpha x''' + \alpha^2 x''), \quad u'' = \alpha(x' + \alpha x''' + \alpha^2 x''), \quad u''' = \alpha^2(x' + \alpha x''' + \alpha^2 x'').$$

Supponiamo che

$$z' z'' z''', \qquad u' u'' u'''$$

siano le due funzioni

$$F(z', z'', z'''), \qquad F(u', u'', u''');$$

ne verrà

$$y' = z' z'' z''' = \alpha^3(x' + \alpha x'' + \alpha^2 x''')^3 = (x' + \alpha x'' + \alpha^2 x''')^3,$$
$$y'' = u' u'' u''' = \alpha^3(x' + \alpha x''' + \alpha^2 x'')^3 = (x' + \alpha x''' + \alpha^2 x'')^3,$$

e posto per brevità

$$x' + \alpha x'' + \alpha^2 x''' = r,$$
$$x' + \alpha x''' + \alpha^2 x'' = s,$$

avremo nella (II) il coefficiente

$$S = -(r^3 + s^3),$$

e

$$T = r^3 s^3.$$

233. Affine presentemente di determinare questi coefficienti, e però l'equazione in y, osservo che abbiamo

$$r^3 = x'^3 + 3\alpha x'^2 x'' + 3\alpha^2 x'^2 x''' + 3\alpha^2 x' x''^2$$
$$+ 6x' x'' x''' + 3\alpha x' x'''^2 + x''^3 + 3\alpha x''^2 x''' + 3\alpha^2 x'' x'''^2 + x'''^3,$$
$$s^3 = x'^3 + 3\alpha^2 x'^2 x'' + 3\alpha x'^2 x''' + 3\alpha x' x''^2$$
$$+ 6x' x'' x''' + 3\alpha^2 x' x'''^2 + x''^3 + 3\alpha^2 x''^2 x''' + 3\alpha x'' x'''^2 + x'''^3,$$

onde, sommando e ponendo -1 in vece di $\alpha + \alpha^2$, giacchè pel n° 209

$$1 + \alpha + \alpha^2 = 0,$$

ne viene

$$r^3 + s^3 = 2(x'^3 + x''^3 + x'''^3)$$
$$+ 12x' x'' x''' - 3(x'^2 x'' + x' x''^2 + x'^2 x''' + x' x'''^2 + x''^2 x''' + x'' x'''^2)$$
$$= 2\sum x^3 + 12x' x'' x''' - 3\sum x^2 x.$$

Dunque a cagione di $A = 0$ (n° 228) avendosi pei n^i 35, 24, 41

$$\sum x^3 = -3C, \qquad x' x'' x''' = -C, \qquad \sum x^2 x = +3C,$$

sostituendo otterremo

$$S = -(r^3 + s^3) = +6C + 12C + 9C = +27C;$$

e con simile artifizio ci risulterà

$$T = r^3 s^3 = -27B^3.$$

Colloco questi valori nella

$$y^2 + Sy + T = 0,$$

e divenendo essa

$$y^2 + 27Cy - 27B^3 = 0,$$

con la soluzione ricaveremo

$$y = -\frac{27C}{2} \pm \sqrt{\frac{27^2 C^2 + 4 \cdot 27 B^3}{4}},$$

Digitized by Google

e posto questo valore per maggiore semplicità $= \pi \pm p$, avremo

$$y' = \pi + p, \qquad y'' = \pi - p.$$

234. Dalla determinazione delle y', y'' converrà passare a quella delle quantità M, N, onde conoscere le due equazioni

$$Z^3 - M = 0, \qquad V^3 - N = 0,$$

e ciò in generale sempre otterrebbesi pel n° 144: nel nostro caso però essendo

$$z = Z, \qquad z^3 = M, \qquad u^3 = N,$$

$$z' = x' + \alpha x'' + \alpha^2 x''', \qquad u' = x' + \alpha x''' + \alpha^2 x'',$$

$$y' = (x' + \alpha x'' + \alpha^2 x''')^3, \qquad y'' = (x' + \alpha x''' + \alpha x'')^3$$

(n° 232), otterremo immediatamente pel n° precedente

$$M = y' = \pi + p, \qquad N = y'' = \pi - p,$$

e però

$$Z^3 = \pi + p, \qquad V^3 = \pi - p,$$

ossia

$$z^3 = \pi + p, \qquad u^3 = \pi - p.$$

Sciolta ora una di queste equazioni, da ciascuno dei tre valori della z o della u ricaveremo pel n° 231 ciascuna delle chieste radici

$$x', \quad x'', \quad x'''.$$

Esse però più facilmente otterrannosi nella seguente maniera.

Avendosi

$$(x' + \alpha x'' + \alpha^2 x''')^3 = \pi + p,$$

$$(x' + \alpha x''' + \alpha^2 x'')^3 = \pi - p \quad \text{ed} \quad x' + x'' + x''' = 0,$$

sommando le tre equazioni

$$\text{(III)} \qquad \begin{cases} x' + \alpha x'' + \alpha^2 x''' = \sqrt[3]{\pi + p}, \\ x' + \alpha^2 x'' + \alpha x''' = \sqrt[3]{\pi - p}, \\ x' + x'' + x''' = 0. \end{cases}$$

pel n° 209 otterremo

$$3x' = \sqrt[3]{\pi + p} + \sqrt[3]{\pi - p},$$

e però

$$x' = \frac{\sqrt[3]{\pi + p} + \sqrt[3]{\pi - p}}{3}.$$

Moltiplico la prima delle (III) per α^2, la seconda per α, le sommo tutte e tre, e diviso il risultato per 3, ne verrà

$$x'' = \frac{\alpha^2 \sqrt[3]{\pi + p} + \alpha \sqrt[3]{\pi - p}}{3}.$$

Moltiplicata finalmente la prima delle (III) per α, la seconda per α^2, e proseguito il

Digitized by Google

calcolo, come di sopra, ricaveremo

$$x''' = \frac{\alpha\sqrt[3]{\pi + p} + \alpha^2\sqrt[3]{\pi - p}}{3}.$$

Questi saranno i tre valori delle radici cercate, e, ponendo che α significhi una qualunque delle tre radici cubiche dell'unità, vedesi che avremo pel valor generale della x

$$x = \frac{\alpha\sqrt[3]{\pi + p} + \alpha^2\sqrt[3]{\pi - p}}{3}.$$

Collocando in luogo delle π, p i rispettivi valori

$$-\frac{27C}{2}, \qquad \sqrt{\frac{27^2C^2 + 4.27B^3}{4}}$$

(n° 233), ne viene

$$\frac{\sqrt[3]{\pi \pm p}}{3} = \sqrt[3]{\frac{\pi \pm p}{27}} = \sqrt[3]{-\frac{27C}{2.27} \pm \sqrt{\frac{27^2C^2 + 4.27B^3}{4.27^2}}}$$
$$= \sqrt[3]{-\frac{C}{2} \pm \sqrt{\frac{C^2}{4} + \frac{B^3}{27}}}.$$

Dunque, sostituendo sarà

$$(O) \qquad x = \alpha\sqrt[3]{-\frac{C}{2} + \sqrt{\frac{C^2}{4} + \frac{B^3}{27}}} + \alpha^2\sqrt[3]{-\frac{C}{2} - \sqrt{\frac{C^2}{4} + \frac{B^3}{27}}},$$

formola non punto diversa dall'ottenuta nel n° 213 *a posteriori.*

235. Se l'equazione data (n° 228) avesse avuto il secondo termine, chiamato A il suo coefficiente, si sarebbe fatto il discorso medesimo, ponendo però

$$Sx = -A, \qquad Sx^2 = A^2 - 2B, \qquad Sx^3 = 3AB - A^3 - 3C$$

(n° 35) e avremmo in egual maniera ottenuti i valori corrispondenti della x.

236. Estraendo la radice cuba dalla

$$y' = (x' + \alpha x'' + \alpha^2 x''')^3, \qquad y'' = (x' + \alpha x''' + \alpha^2 x'')^3$$

(n° 232), abbiam ricavato

$$\sqrt[3]{y'} = x' + \alpha x'' + \alpha^2 x''', \qquad \sqrt[3]{y''} = x' + \alpha x''' + \alpha^2 x'':$$

ma tre devono essere i valori di queste radici; tenendo dunque conto di tutti, avremo

$$\sqrt[3]{y'} = (x' + \alpha x'' + \alpha^2 x'''),$$
$$\sqrt[3]{y'} = \alpha(x' + \alpha x'' + \alpha^2 x'''),$$
$$\sqrt[3]{y'} = \alpha^2(x' + \alpha x'' + \alpha^2 x'''),$$
$$\sqrt[3]{y''} = (x' + \alpha x''' + \alpha^2 x''),$$
$$\sqrt[3]{y''} = \alpha(x' + \alpha x''' + \alpha^2 x''),$$
$$\sqrt[3]{y''} = \alpha^2(x' + \alpha x''' + \alpha^2 x'').$$

Digitized by Google

Tutti questi valori però nulla alterano la soluzione precedente; poichè, paragonando insieme i valori che si corrispondono, conseguiremo gli stessi risultati del n° 234.

237. Abbiamo nel n° 228 supposte le (I) tali che risulti la $1^a = 2^a$, e ne abbiamo così dedotta la soluzione della (N); facciamo presentemente allo stesso fine un'altra supposizione diversa; supponiamo per esempio la $1^a = 4^a$. Divenendo perciò la $2^a = 6^a$, la $3^a = 5^a$, le (I) saranno tra loro uguali a due a due, e saranno per conseguenza determinabili per un'equazione del terzo grado (n° 99). Ma, acciocchè la fatta supposizione possa servire alla soluzione della nostra equazione, pel n° 230 è necessario che conduca ad un'equazione della forma $y^3 - T = 0$, essendo $y' = 1^a$, $y'' = 2^a$, $y''' = 3^a$.

Dunque le (I) dovranno esser tali che abbiasi, non solo la $1^a = 4^a$, la $2^a = 6^a$, la $3^a = 5^a$, ma di più, pel n° 230, che ne venga

$$y'' = \alpha y', \qquad y''' = \alpha^2 y'.$$

Ora è egli ciò possibile?

Per la ipotesi fatta la

$$1^a = f(x')(x'')(x''')$$

pel n° 3 divenendo

$$f(x')(x'', x'''),$$

vedesi che avremo

$$y' = f(x')(x'', x'''), \quad y'' = f(x''')(x', x''), \quad y''' = f(x'')(x''', x').$$

Ciò posto moltiplico la seconda di queste equazioni per α^2, e la terza per α, risultando da ciò

$$\alpha^2 y'' = \alpha^2 f(x''')(x', x''), \quad \alpha y''' = \alpha f(x'')(x''', x'),$$

le quantità $\alpha^2 y''$, $\alpha y'''$ saranno evidentemente tali, che non cangiano valore per la permutazione, in quanto alla prima, di x' in x'', e in quanto alla seconda per la permutazione di x' in x'''. Ora avendosi

$$y'' = \alpha y', \qquad y''' = \alpha^2 y',$$

ne viene

$$y' = \frac{1}{\alpha} y'' = \alpha^2 y'', \qquad y' = \frac{1}{\alpha^2} y''' = \alpha y'''$$

(n° 202): dunque anche la funzione y' non cangerà valore per questi cambiamenti di x' in x'', e di x' in x'''; ma la y' è già tale che resta la medesima per la permutazione di x'' in x'''; dunque essa y' non cangerà mai di valore, qualunque cambiamento si faccia fra tutte e tre le x', x'', x''', e dovendo quindi pel n° 3 essere

$$y' = f(x', x'', x'''),$$

ne verrà

$$y' = y'' = y''',$$

il che è un assurdo (n^i 211, 199). Dunque, etc.

238. Da ciò segue che nelle

$$Z^3 - M = 0,$$

$$U^3 - N = 0$$

(n° 230) non potrà giammai essere

$$M = N,$$

Digitized by Google

poichè, se ciò fosse, le due

$$Z^3 - M = 0, \qquad V^3 - N = 0$$

si ridurrebbero alla sola

$$Z^3 - M = 0,$$

e da ciò seguirebbe l'assurdo del n° prec. *Dunque la Z del* n° 230 *deve sempre avere necessariamente sei valori differenti tra loro.*

239. Supponiamo ora le (I) tali che la 1^a, oltre di essere come nel n° 237 uguale alla 4^a, sia anche uguale ad un'altra di esse funzioni per esempio alla 6^a. Divenendo perciò la

$$2^a = 6^a = 5^a, \quad \text{la} \quad 3^a = 5^a = 4^a,$$

le (I) saranno tutte uguali fra loro, e la

$$f(x')(x'')(x''')$$

diventerà della forma

$$f(x',\ x'',\ x''').$$

Questa supposizione potrà essa servire allo scioglimento della (N)?

Fatta secondo il solito la nostra

$$f(x'\ x'',\ x''') = y,$$

la sua determinazione pel n° 101 condurrà sempre ad un'equazione razionale

$$y - R = 0.$$

Volendo presentemente da questo valore della $y = R$ ricavare il valore delle radici x', x'', x''', per quanto si è detto nel n° 230, non potrà ciò eseguirsi immediatamente, ma solo col determinare da prima le radici di un'equazione

$$Z^3 - M = 0.$$

Essendo dunque necessaria la determinazione di questa

$$Z^3 - M = 0,$$

converrà dal valore R ricavare quello del coefficiente M: Ora la Z ha necessariamente i sei valori Z', Z'', Z''', V', V'', V''', ed il prodotto dei primi tre è $= M$, essendo il secondo uguale ad un'altra quantità N (n^i 230, 238).

Dunque per la determinazione della M farà duopo cadere in un'equazione di secondo grado, di cui siano radici le due quantità M, N (n° 147). Ma nella ipotesi del n° 232 abbiamo

$$M = y', \qquad N = y'',$$

essendo y', y'' radici della (II), equazione derivata dalla supposizione del n° 228, cioè dalla supposizione della funzione $1^a = 2^a$. Dunque la ipotesi presente ci dà bensì la soluzione della (N), ma ce la dà conducendoci alla supposizione istessa che abbiamo fatta sin da principio (n° 228).

240. Potremo pertanto francamente asserire che, potendo le (I) essere tra loro uguali o a due a due, o a tre a tre, o a sei a sei, *il solo caso in cui esse si uguagliano a tre a tre, quello si è, che propriamente conduce alla soluzione della data* (N) [15].

Digitized by Google

241. Abbiamo sin'ora supposta la

$$y = f(x')(x'')(x'')$$

funzione razionale (n° 228); vogliasi presentemente che sia incommensurabile. Onde avere la soluzione della data, sappiamo dovere la nostra

$$f(x')(x'')(x''')$$

essere tale che serva a' due fini: l'uno cioè di condurre ad un'equazione in y, di cui conoscasi la soluzione indipendentemente dalla data (n° 227), l'altro di far sì, che dai valori y', y'' possansi dedurre i corrispondenti della x o della Z (n° 230). Ora se la

$$f(x')(x'')(x''')$$

è irrazionale, l'equazione in y divenendo del grado $p\pi$ (n° 136), il primo di questi fini riesce sempre più difficile ad ottenersi, e pel secondo dall'irrazionabilità della

$$f(x')(x'')(x''')$$

non ricaviamo vantaggio veruno (n° 158). Dunque la supposizione che la

$$f(x')(x'')(x''')$$

sia irrazionale, essendo una supposizione al nostro intento per lo meno inutile, potremo pienamente abbandonarla. Lo stesso affatto si dice di qualunque altro grado si sia l'equazione data a risolversi.

242. *Se l'equazione* (N) *ha due radici immaginarie, le quantità* y', y'' *saranno necessariamente reali; saranno poi queste immaginarie, mentre le* x', x'', x''' *siano tutte reali e disuguali fra loro; che, se finalmente due delle* x', x'', x''' *sono reali ed uguali fra loro, in allora le* y', y'' *divengono anch'esse uguali fra loro e reali.*

Potendo la x' rappresentare una qualunque delle tre radici della (N), supponiamo che ci esprima la radice reale che deve sempre necessariamente esistere (n° 54); le altre due x'', x''' potranno essere reali od immaginarie, uguali o disuguali fra loro.

Siano esse primieramente reali ed uguali; avremo da ciò

$$x' + \alpha x'' + \alpha^2 x''' = x' + \alpha x''' + \alpha^2 x'' = x' + x''(\alpha + \alpha^2) = x' - x'' = \sqrt[3]{y'}$$

(n° 209), e avremo egualmente

$$x' - x'' = \sqrt[3]{y''}.$$

Dunque in questa ipotesi le $\sqrt[3]{y'}$, $\sqrt[3]{y''}$, e però le y', y'' saranno reali ed eguali tra loro.

2° Abbiansi le x'', x''' reali, e fra loro disuguali; risultando in questo caso

$$x' + \alpha x'' + \alpha^2 x''' = x' + x'' \times \frac{-1 + \sqrt{-3}}{2} + x''' \times \frac{-1 - \sqrt{-3}}{2}$$

$$= x' - \frac{1}{2}(x'' + x''') + (x'' - x''')\frac{\sqrt{-3}}{2} = \sqrt[3]{y'},$$

ed

$$x' + \alpha x''' + \alpha^2 x'' = x' - \frac{1}{2}(x''' + x'') + (x''' - x'')\frac{\sqrt{-3}}{2} = \sqrt[3]{y''},$$

Digitized by Google

vedesi che le $\sqrt[3]{y'}$, $\sqrt[3]{y''}$, e quindi le y', y'', saranno necessariamente disuguali fra loro ed immaginarie.

3°. Supponiamo finalmente le x'', x''' immaginarie; dovendo esse pel n° 187 avere necessariamente la forma

$$d + e\sqrt{-1}, \qquad d - e\sqrt{-1},$$

supponiamo

$$x'' = d + e\sqrt{-1}, \qquad x''' = d - e\sqrt{-1};$$

quindi risulterà

$$x' + \alpha x'' + \alpha^2 x''' = x' + \alpha(d + e\sqrt{-1}) + \alpha^2(d - e\sqrt{-1})$$

$$= x' + (\alpha + \alpha^2)d + (\alpha - \alpha^2)e\sqrt{-1} = x' - d - e\sqrt{3} = \sqrt[3]{y'},$$

e nel modo istesso

$$x' + \alpha x''' + \alpha^2 x'' = x' - d + e\sqrt{3} = \sqrt[3]{y''},$$

e per conseguenza avremo in questo caso le quantità $\sqrt[3]{y'}$, $\sqrt[3]{y''}$, e perciò le y', y'' reali e disuguali tra loro. Dunque, etc.

243. Ciò stesso che abbiamo dimostrato nel n° prec. riguardo le y', y'' del n° 228 si verifica eziandio in generale rapporto alle quantità M, N (n° 230).

Attribuitasi alla funzione Z (n° 230) una forma qualunque, e qualunque perciò divengano le M, N, è chiaro che dovranno esse risultar sempre due funzioni delle x', x'', x''' simili alle y', y''; dunque, volendo determinar quelle per queste, dovremo ricorrere alla (M) (n° 144), e otterremo così due valori della forma

$$M = \frac{ay' + b}{2y' + p}, \qquad N = \frac{ay'' + b}{2y'' + p},$$

supponendosi pel n° 144

$$y^2 + py + q = 0$$

l'equazione determinata in y, e supponendosi

$$a = H_1, \qquad b = H_1 p + H_2.$$

Ora con la divisione ci risulta

$$M = \frac{a}{2} + \frac{2b - ap}{4y' + 2p}, \qquad N = \frac{a}{2} + \frac{2b - ap}{4y'' + 2p},$$

e frattanto le a, b, p sono tutte quantità reali, e non può giammai essere

$$2b - ap = 0,$$

poichè allora ne verrebbe

$$M = \frac{a}{2} = N$$

contro del n° 238.

Dunque, come facilmente conoscesi dalla semplice ispezione dei valori ottenuti, quali sono le quantità y', y'', se reali cioè o immaginarie, uguali o disuguali tra loro, tali saranno pur anche fra loro le M, N, e per conseguenza, etc.

244. Poichè, qualunque artifizio adoperisi per la soluzione della (N), sempre dob-

Digitized by Google

biam cadere a determinare le

$$x', \quad x'', \quad x'''$$

dipendentemente dalle

$$Z', \quad Z'', \quad Z''',$$

oppure dalle

$$V', \quad V'', \quad V'''$$

(n^i 230, 239, 240), e poichè il valore di queste Z', Z'', etc. dipende dal valore delle quantità M, N, ne viene, pei n^i 144, 230, che le radici x', x'', x''', se sono reali e disuguali fra loro, verranno sempre ad essere determinate per quantità immaginarie, e se due fra queste radici sono immaginarie, il loro valore, prescindendo dal valore di α (n° 212) in esso contenuto, verrà sempre a determinarsi per quantità reali. Da questo si vede che, qualunque metodo si adoperi nella soluzione generale delle equazioni di terzo grado, non potremo giammai evitare il caso irreducibile (n° 217).

245. Passiamo ora a vedere, giusta il n° 228, come la soluzione della (N) data *a posteriori* (n° 213) segua esattamente l'andamento accennato nei n^i precedenti.

Fatta nel citato n° 213 la supposizione

$$x = z + u,$$

e ricavate le due

$$z^3 + u^3 + C = 0, \qquad 3uz + B = 0,$$

sostituisco nella prima il valore di u ricavato dall'ultima di queste equazioni. Avendosi perciò

$$x = z - \frac{B}{3z},$$

sarà

$$z^2 - xz - \frac{B}{3} = 0, \quad \text{e} \quad z = \frac{x}{2} \pm \sqrt{\frac{x^2}{4} + \frac{B}{3}}.$$

Volendo presentemente tener conto di un solo dei valori della z, lascio innanzi del radicale il solo segno $+$, e colloco in vece della x il valore x', e in luogo della B il suo valore

$$x'x'' + x'x''' + x''x''',$$

ossia, a cagione di

$$x' + x'' + x''' = 0,$$

il valore

$$-(x'^2 + x'x'' + x''^2).$$

Operando in tal modo, e riducendo, otterremo

$$z' = \frac{x'}{2} + \sqrt{\frac{-x'^2 - 4x'x'' - 4x''^2}{12}}$$

$$= \frac{x'}{2} + (x' + 2x'')\sqrt{\frac{-3}{36}} = \frac{3x'}{6} + \frac{x'\sqrt{-3}}{6} + \frac{2x''\sqrt{-3}}{6}$$

$$= \frac{x'}{3} + \frac{1 + \sqrt{-3}}{6}x' + \frac{2x''\sqrt{-3}}{6},$$

e giacchè

$$x' = -x'' - x''',$$

Digitized by Google

sostituendo di nuovo, sarà

$$\begin{aligned}\zeta &= \frac{x'}{3} - \frac{1-\sqrt{-3}}{6}x'' - \frac{1+\sqrt{-3}}{6}x''' \\ &= \frac{x'}{3} + \frac{-1+\sqrt{-3}}{2}\times\frac{x''}{3} + \frac{-1-\sqrt{-3}}{2}\times\frac{x'''}{3} \\ &= \frac{x' + \alpha x'' + \alpha^2 x'''}{3},\end{aligned}$$

supposto

$$\frac{-1+\sqrt{-3}}{2} = \alpha$$

(n° 212); elevo questo valore al cubo, e, poichè ne viene

$$\zeta^3 = \frac{1}{27}(x' + \alpha x'' + \alpha^2 x''')^3,$$

e poichè pel n° 232 abbiamo $\zeta^3 = y$, ci risulterà finalmente

$$y = \frac{1}{27}(x' + \alpha x'' + \alpha^2 x''')^3.$$

Dunque la y del n° 213 altro non è che una funzione delle x', x'', x''', perfettamente uguale a quella del n° 232, supponendo

$$P = \frac{1}{27}$$

(n° 232). Due pertanto essendo i valori della y (n° 228), i due cioè che ricavansi dalla

$$y^2 + Cy - \frac{B^3}{27} = 0$$

(n° 213), converrebbe ora pel n° 230 da essi determinare le quantità M, N, coefficienti delle

$$Z^3 - M = 0, \qquad V^3 - N = 0$$

(n° 230). Nel n° 232, supposto per semplicità $Z = \zeta$, $V = u$, e fatto

$$F(\zeta', \zeta'', \zeta''') = \zeta'\zeta''\zeta''', \qquad F(u', u'', u''') = u'u''u''',$$

ne abbiamo ricavato $M = y'$, $N = y''$, e però

$$\zeta^3 = y', \qquad u^3 = y''.$$

Dunque, avendosi nel n° 213 $\zeta^3 = y$, vedesi che anche questa supposizione equivale precisamente a quella del citato n° 232. Finalmente dai tre valori ζ', ζ'', ζ''' secondo il n° 230 conviene determinare corrispondentemente i tre x', x'', x'''; e ciò di fatti eseguiscesi nella (O) (n° 213); poichè, essendo questa nata dal sostituire nella

$$x = \zeta + u = \zeta - \frac{B}{3\zeta}$$

il valore della $\zeta = \alpha\sqrt[3]{y}$, e pei n^{i} 212, 232 avendosi

$$\zeta'' = \frac{-1+\sqrt{-3}}{2}\zeta', \qquad \zeta''' = \frac{-1-\sqrt{-3}}{2}\zeta';$$

Digitized by Google

se in essa (O) farò $\alpha = 1$, diverrà $z = z'$ e verrò così ad ottenere la radice x' dipendentemente da z'; se farò

$$\alpha = \frac{-1 + \sqrt{-3}}{2},$$

risultandomi

$$z = \frac{-1 + \sqrt{-3}}{2} z' = z'',$$

verrò a ricavare da questo valore z'' il corrispondente di x'', e supponendo finalmente

$$\alpha = \frac{-1 - \sqrt{-3}}{2},$$

e però

$$z = \frac{-1 - \sqrt{-3}}{2} z' = z''',$$

ci risulterà il valore di x''' da z'''. Dunque l'artifizio adoperato nel n° 213 riducesi in fondo a quello stesso che ci siamo proposto e che abbiamo usato nel Capo presente: colà però abbiamo trovato un tale artifizio indirettamente e come a tentone; ma qui ricercandolo avvedutamente e direttamente.

246. *Venga richiesta a priori la soluzione dell'equazione generale di 4° grado*

$$(P) \qquad x^4 + Bx^2 + Cx + D = 0,$$

che pongo, come nel n° 220, priva del secondo termine.

La funzione generale derivante dalle sue radici si è la

$$f(x')(x'')(x''')(x^{IV})$$

determinabile per un'equazione del grado

$$1.2.3.4 = 24.$$

Affine adunque di determinare una trasformata che serva allo scioglimento della (P), converrà, pel n° 227, tra le infinite forme di questa

$$f(x')(x'')(x''')(x^{IV})$$

trovare quella nella quale i risultati che provengono dalle varie permutazioni tra le

$$x', \quad x'', \quad x''', \quad x^{IV}$$

riescono uguali fra loro ad otto ad otto, poichè in allora la trasformata diviene del grado $\frac{24}{8} = 3°$. Ora supponiamo essa funzione della forma

$$f[(x', x''), (x''', x^{IV})],$$

i suoi valori diversi sono appunto di numero $\frac{24}{2.2.2} = 3$ (n° 102) [16]; tale forma adunque sarà opportuna all'intento, e le radici della trasformata saranno le

1^a $f[(x', x''), (x''', x^{IV})]$, 2^a $f[(x', x'''), (x'', x^{IV})]$, 3^a $f[(x', x^{IV}), (x''', x'')]$.

Dovendo presentemente determinare questa funzione (n° 227), prendo a tal uopo, siccome nel n° 229, un'altra funzione delle x', x'', x''', x^{IV}, che disegno con la caratteristica φ

Digitized by Google

e chiamo χ, faccio in essa tutte le permutazioni analoghe alle già fatte nella funzione disegnata con la f, e queste, operando come nel cit. n° 229, ci daranno in generale i valori delle funzioni 1^a, 2^a, 3^a.

Poichè pel n° 229 la χ può avere una forma qualunque, per maggiore semplicità supponiamo che abbia la forma

$$\varphi(x', x'')(x''', x^{IV}) \text{ [17]},$$

e sia

$$\varphi(x', x'')(x''', x^{IV}) = \chi', \qquad \varphi(x''', x^{IV})(x', x'') = \chi'';$$

osservando in questa ipotesi la natura delle nostre funzioni, ed osservando insieme quanto si disse nel n° 229, vedesi non difficilmente che potremo sempre esprimere la nostra funzione 1^a per $F(\chi', \chi'')$ [18].

In egual modo posto

$$\varphi(x', x''')(x'', x^{IV}) = u', \qquad \varphi(x'', x^{IV})(x', x''') = u'',$$

$$\varphi(x', x^{IV})(x'', x''') = t', \qquad \varphi(x'', x''')(x', x^{IV}) = t'',$$

ne verrà la $2^a = F(u', u'')$, e la $3^a = F(t', t'')$.

247. Proseguendo l'operazione secondo il n° 230, supposto

$$F(\chi', \chi'') = y', \qquad F(u', u'') = y'', \qquad F(t', t'') = y''',$$

converrebbe pel n° 105 determinare l'equazione

$$y^3 + Sy^2 + Ty + V = 0, \tag{IV}$$

sciogliere questa e, conosciuto il valore delle sue radici, determinare dipendentemente da una di loro, per esempio dalla y', il valore di una quantità M coefficiente di un'altra equazione

$$Z^4 - M = 0$$

(n° 230). Ciò fatto, converrebbe dalla

$$Z^4 - M = 0$$

determinare il valore delle quantità Z', Z'', Z''', Z^{IV}, e da queste dedurre finalmente in corrispondenza il valore richiesto delle radici x', x'', x''', x^{IV}.

248. Ma per essere 4 l'esponente della (P) potremo in altro modo giungere al nostro fine, spezzando cioè essa (P) in altre due equazioni di secondo grado. Supponiamo infatti un'equazione di cui siano radici le quantità χ', χ'', e tale sia la

$$\chi^2 + M\chi + N = 0. \tag{V}$$

Avendosi il coefficiente

$$M = -(\chi' + \chi'') = F(\chi', \chi''),$$

non sarà questo che un valore della y', e però, come la y' dipende da un'equazione di terzo grado (IV), così parimenti da un'equazione di terzo grado dipenderà la determinazione di esso coefficiente M: conosciuto così il valore della M, dipendentemente da questo potremo conoscere il corrispondente della N (n° 144), e determinata in tal modo l'equazione (V), dallo scioglimento di essa ricaveremo i valori delle χ', χ''.

Digitized by Google

Ciò posto, supponiamo

$$z' = \varphi(x', x'')(x''', x^{IV}) = \varphi(x', x'') + o(x''' + x^{IV}) = \varphi(x', x''),$$

ne verrà

$$z'' = \varphi(x''', x^{IV}),$$

ed è chiaro che la determinazione di queste z', z'' dipenderà da un'equazione simile alla precedente (V). Ora, se suppongansi le x', x'' radici di un'equazione

$$x^2 + fx + g = o,$$

e le x''', x^{IV} radici di un'altra

$$x^2 + hx + k = o;$$

avendosi

$$f = -(x' + x'') = \varphi(x', x''), \qquad h = -(x''' + x^{IV}) = \varphi(x''', x^{IV}),$$

queste quantità sono del genere delle precedenti

$$z' = \varphi(x', x''), \qquad z'' = \varphi(x''', x^{IV}),$$

e determinabili per conseguenza per un'equazione di secondo grado (V), i cui coefficienti dipendono da un'equazione del grado terzo; e inoltre, conosciute queste f, h, dalla prima di esse può sempre determinarsi la g, dalla seconda la k (n° 144). Dunque, con la sola soluzione di un'equazione di secondo, di una di terzo e di altre di primo grado, potremo sempre determinare i coefficienti f, h, g, k, e però le equazioni

$$x^2 + fx + g = o, \qquad x^2 + hx + k = o,$$

onde i valori ricaveremo delle x', x'', x''', x^{IV}.

Queste due equazioni

$$x^2 + fx + g = o, \qquad x^2 + hx + k = o$$

equivalgono alle due

$$x^2 - x\sqrt{z} + \frac{B + z}{2} + \frac{C}{2\sqrt{z}} = o, \qquad x^2 + x\sqrt{z} + \frac{B + z}{2} - \frac{C}{2\sqrt{z}} = o$$

del n° 220, essendo

$$f = -\sqrt{z}, \qquad h = \sqrt{z}, \qquad g = \frac{B + z}{2} + \frac{C}{2\sqrt{z}}, \qquad k = \frac{B + z}{2} - \frac{C}{2\sqrt{z}}.$$

Digitized by Google

CAPO XIII.

RIFLESSIONI INTORNO ALLA SOLUZIONE GENERALE DELLE EQUAZIONI.

---

249. Data sia a risolversi l'equazione generale

$$(D) \qquad x^m + Ax^{m-1} + Bx^{m-2} + \cdots = 0.$$

Dovendosi al nostro intento, pel n° 227, determinare da principio una trasformata di grado inferiore al numero m o ad esso uguale, purchè risolubile indipendentemente dalla data, supponiamo essere questa la

$$(I) \qquad y^n + Sy^{n-1} + Ty^{n-2} + \cdots = 0,$$

avendosi n numero non maggiore di m. Per la determinazione di una simile trasformata prendo la funzione

$$f(x')(x'')(x''') \ldots (x^m),$$

e giacchè il suo valore, generalmente parlando, dipende da un'equazione del grado $1.2.3 \ldots m$ che chiamo π, converrà che da prima io cerchi quella forma di essa per cui tutti i suoi π valori riescano tra loro uguali ad $1.2.3 \ldots (n-1)(n+1) \ldots m$, ad $1.2.3 \ldots (n-1)(n+1) \ldots m$; poichè in allora il grado della trasformata diviene per l'appunto

$$\frac{1.2.3 \ldots (n-1)n(n+1) \ldots m}{1.2.3 \ldots (n-1)(n+1) \ldots m} = n$$

(n° 100). Supposto di aver ciò fatto, chiamo

$$y', \quad y'', \quad y''', \ldots, y^{(n)}$$

i risultati diversi della nostra funzione (n° 105), determino col loro mezzo i coefficienti S, T, ..., ed ho così la trasformata (I), di cui già conosco la soluzione.

Effettuata questa pertanto e conosciuti i valori delle

$$y', \quad y'', \quad y''', \ldots, y^{(n)},$$

poichè, generalmente parlando, qui pure si replica quanto si disse nel n° 230, veggo che in generale da questi non potrò determinare i valori delle x', x'', x''', ..., $x^{(m)}$, ma che sarà necessario determinare prima, come nel cit. n° 230, dipendentemente da y' una quantità M coefficiente di un'equazione corrispondente

$$Z^m - M = 0,$$

Digitized by Google

oppure da y'' una quantità N coefficiente di un'equazione

$$V^m - N = 0$$

corrispondente ad y'', e così di seguito. Ciò adunque eseguisco, e sciolta una di tali equazioni, per esempio la

$$Z^m - M = 0,$$

dagli m valori che si ricavano

$$\sqrt[m]{M}, \quad \alpha\sqrt[m]{M}, \quad \alpha^2\sqrt[m]{M}, \ldots$$

(n° 203), deduco finalmente in corrispondenza i valori delle radici x', x'', x''', $\ldots$, $x^{(m)}$, e avremo così sciolta la data (D).

250. Se m fosse un numero composto e fosse $m = np$, sembrando allora non aver più luogo l'inconveniente del n° 230, dagli n valori della y pare che potremo cercare immediatamente gli m della x, deducendo da y' i primi corrispondenti valori

$$x', \quad x'', \ldots, x^{(p)},$$

da y'' i secondi

$$x^{(p+1)}, \quad x^{(p+2)}, \ldots, x^{(2p)},$$

e così in progresso.

251. Osservando la soluzione della (P) (n° 246), ottenuta con lo spezzamento di essa nei due fattori

$$x^2 + fx + g = 0, \qquad x^2 + hx + k = 0$$

(n° 248), potremmo noi credere che esista un'altro metodo onde sciogliere le equazioni, differente dal primo (n° 248), quello cioè di spezzare la (D) in due fattori

$$x^p + ax^{p-1} + bx^{p-2} + \cdots = 0, \qquad x^{m-p} + gx^{m-p-1} + hx^{m-p-2} + \cdots = 0,$$

la soluzione dei quali essendo già cognita, ci dia il valor domandato delle x', x'', x''', $\ldots$, $x^{(m)}$; ma da quanto si è detto nel n° 227 e da quanto diremo nei seguenti vedremo che questo nuovo metodo, allorchè ha luogo, dipende totalmente dal primo.

252. Per la determinazione di un'equazione

$$x^p + ax^{p-1} + bx^{p-2} + \cdots = 0,$$

di cui voglionsi radici le p quantità

$$x', \quad x'', \quad x''', \ldots, x^{(p)}$$

radici della data (D), converrà determinare i coefficienti a, b, $\ldots$, ciascuno dei quali sia funzione della forma

$$f(x', x'', x''', \ldots, x^{(p)}).$$

Ora sappiamo dal n° 104 che la determinazione di una tale funzione non può ottenersi se non dipendentemente da un'equazione del grado

$$\frac{m(m-1)(m-2)\ldots(m-p+1)}{p(p-1)(p-2)\ldots 3.2.1}.$$

Espresso dunque per brevità con la lettera λ questo numero, il valore del coefficiente a dipenderà da un'equazione

(II) $$a^\lambda + Ma^{\lambda-1} + Na^{\lambda-2} + \cdots = 0.$$

Digitized by Google

Perchè poi gli altri coefficienti b, c, ... non sono che altrettante funzioni somiglianti alla funzione a, saranno tutti pel n° 144 determinabili razionalmente dai corrispondenti valori di questa. Dunque la determinazione della

$$x^p + ax^{p-1} + \cdots = 0,$$

ossia lo spezzamento accennato nel n° 251, non può effettuarsi se non dipendentemente dalla soluzione di un'equazione

$$a^\lambda + Ma^{\lambda-1} + Na^{\lambda-1} + \cdots = 0,$$

la quale, dipendendo affatto dalla proposta (D), non ne sarà infine che una sua trasformata.

253. Se sia

$$p = m - 1, \quad \text{ovvero} \quad p = 1,$$

ne viene

$$\lambda = \frac{m}{1};$$

se facciasi

$$p = m - 2, \quad \text{oppure} \quad p = 2,$$

ne risulta

$$\lambda = \frac{m(m-1)}{1.2};$$

se

$$p = m - 3, \quad m - 4, \ldots \quad \text{ovvero} \quad p = 3, 4, \ldots,$$

ottienesi corrispondentemente

$$\lambda = \frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3}, \qquad \lambda = \frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{1.2.3.4}, \ldots;$$

ma, a cagione di $p < m$, *niuno di questi risultati è inferiore ad m*. Dunque, generalmente parlando, *ignota essendoci la soluzione della* (D), *non sapremo neppure risolvere la* (II) *e quindi non sapremo neppure spezzare essa* (D), come ci siam proposti nel n° 251.

254. Ho detto generalmente parlando, poichè esister ponno benissimo dei casi particolari in cui la (II) possa abbassarsi di grado, e per tal modo risolversi. Nel n° 248, ove a cagione di $m = 4$, $p = 2$ deve essere $\lambda = 2.3 = 6$ (n° 253), abbiamo ritrovato dipendere il coefficiente f che corrisponde al nostro a (n° 251) da un'equazione di secondo grado, cioè dalla

$$z^2 + Mz + N = 0,$$

e il coefficiente M abbiam veduto dipendere da un'altra di terzo, equivalendo poi evidentemente amendue queste equazioni considerate insieme ad una di sesto grado.

255. Qualunque metodo adunque si usi per lo scioglimento della data (D), saremo sempre condotti a quello del n° 249. Ma è egli questo sempre possibile? Abbiamo veduto che sì, ogniqualvolta non sia $m > 4$; ma, se $m > 4$, che cosa allora succeda ce lo diranno le riflessioni seguenti.

256 [13]. *Chiamo permutazione semplice quella in cui le radici che la compongono devonsi muovere tutte simultaneamente dal loro luogo*. Semplici dunque saranno le per-

Digitized by Google

mutazioni per cui non cambiano valore le funzioni

$$\frac{x'^2}{x''} + \frac{x'''^2}{x'} + \frac{x''^2}{x'''} \quad (\text{n}^\circ\ 229), \quad x'x''x'''^2 + x'''x^{\text{IV}}x'^2,$$

restando la seconda di queste la medesima al cambiamento simultaneo di x' in x''', e di x'' in x^{IV}, e la prima a quello di x' in x''', di x''' in x'', di x'' in x'; e semplice sarà parimenti la permutazione di

$$f(x')(x'')(x''')(x^{\text{IV}})(x^{\text{V}})$$

in

$$f(x'')(x''')(x^{\text{IV}})(x^{\text{V}})(x').$$

Che, *se la permutazione è tale che il cambiamento fra alcune delle sue radici può aver luogo e simultaneamente e non simultaneamente al cambiamento fra altre delle medesime, prese o disgiuntamente o unitamente alle prime,* allora alla permutazione daremo il nome di *composta.* Sarà quindi composta la permutazione per cui non cangiano di valore la funzione

$$\frac{x' + x'' + x'''}{x''x^{\text{IV}}}$$

e l'altra

$$f(x', x'', x''', x^{\text{IV}})(x^{\text{V}});$$

e tale sarà pur anche la permutazione di

$$f(x')(x'')(x''')(x^{\text{IV}})$$

in

$$f(x'')(x')(x^{\text{IV}})(x'''),$$

mentre il cambiamento di x' in x'' possa aver luogo separatamente dall'altro di x''' in x^{IV}.

257. *Due generi distingueremo di permutazioni semplici.*

Diremo del secondo genere *quelle nelle quali, mentre alcune delle radici che le formano cambiansi fra di loro, altre si cambiano fra loro disgiuntamente dalle prime:* di questo genere è la permutazione per cui resta la medesima la precedente funzione

$$x'x''x'''^2 + x'''x^{\text{IV}}x'^2.$$

Diremo poi *permutazioni del* primo genere *quelle nelle quali non possono alcune delle radici cambiarsi fra loro separatamente dalle altre:* sarà del primo genere la permutazione per cui rimane la stessa la funzione

$$\frac{x'^2}{x''} + \frac{x''''^2}{x'} + \frac{x'''^2}{x'''}$$

(n° prec.), e tale sarà l'altra di

$$f(x')(x'')(x''')(x^{\text{IV}})(x^{\text{V}})$$

in

$$f(x'')(x''')(x^{\text{IV}})(x^{\text{V}})(x').$$

258. Nelle permutazioni semplici del *secondo genere* e nelle *composte* chiameremo *permutazioni componenti* quelle le quali eseguisconsi separatamente dalle altre. Conside-

Digitized by Google

rando nelle due funzioni

$$\frac{x' x'''^2}{x^{IV}} + \frac{x^{IV} x''^2}{x'}, \quad \frac{x''^2 + x'''^2}{x''' x^{IV} x^V}$$

la permutazione per cui esse non cambiansi di valore; nella prima le due componenti saranno la mutazione di x' in x^{IV} e quella di x'' in x''', nella seconda la reciproca fra le tre radici x''', x^{IV}, x^V, e l'altra fra le due x', x''. È chiaro che nelle permutazioni semplici del *secondo genere* le componenti non possono che essere semplici del *primo.*

259. *Le permutazioni composte distinguonsi in tre generi.*

Il genere primo *comprende quelle nelle quali niuna delle radici esistenti in una qualunque delle permutazioni componenti può passare tra le radici, o nel luogo occupato dalle radici di un'altra.*

Il secondo *abbraccia quelle nelle quali le radici di una permutazione componente possono passare tutte ad occupare il luogo già prima occupato dalle radici di un'altra, senza però che le radici della prima si framischino a quelle della seconda.*

Il terzo *finalmente comprende le permutazioni, in cui le radici di una delle componenti possono passare a mescolarsi tra le radici di un'altra.*

Se vogliasi la

$$f(x')(x'')(x''')(x^{IV})(x^V)(x^{VI}) = f(x'')(x''')(x')(x^{VI})(x^V)(x^{IV})$$

per una permutazione composta, tale permutazione sarà composta del primo genere; poichè è dessa formata dalla semplice di x' in x'', di x'' in x''', di x''' in x', e dall'altra di x^{IV} in x^{VI}, e non entra frattanto nella prima di queste alcuna delle radici, che formano la permutazione seconda.

La funzione del n° 246

$$f[(x', x''), (x''', x^{IV})]$$

resta la medesima per una permutazione composta del *secondo genere,* poichè avendosi

$$f[(x', x''), (x''', x^{IV})] = f[(x''', x^{IV}), (x', x'')],$$

le radici x', x'' della prima permutazione componente senza mescolarsi colle radici x''', x^{IV} della seconda, passano in essa ad occuparne il loro luogo.

Che se si voglia

$$f(x')(x'', x''')(x^{IV})(x^V) = f(x')(x'', x^{IV})(x^V)(x'''),$$

queste due funzioni si uguaglieranno fra loro per una permutazione composta del *terzo genere;* imperciocchè nel secondo risultato in luogo di x''', radice della prima permutazione componente, collocandosi la x^{IV}, radice della seconda, e in luogo di x^V, radice spettante a quest'ultima permutazione, ponendosi la x''', radice della prima, noi abbiamo mescolate insieme le radici delle due permutazioni componenti.

260. *Nelle permutazioni composte del* secondo genere *le radici che passar deggiono a vicenda da una delle permutazioni componenti all'altra, devono in ciascuna di queste essere sempre di numero uguale.* Imperciocchè se ciò non fosse, come nella permutazione per cui non cambia di valore la funzione

$$f[(x', x''), (x''', x^{IV}, x^V)],$$

Digitized by Google

dovendo in allora risultare

$$f[(x', x''), (x''', x^{IV}, x^{V})] = f[(x''', x^{IV}), (x', x'', x^{V})]$$

(n° 3), con la x^{V} radice appartenente alla permutazione seconda anderebbonsi a mescolare le x', x'' radici della permutazione prima contro del n° precedente.

261. *Se la funzione*

$$y = f(x')(x'')(x''')(x^{IV})(x^{V}) \dots (x^{(m)})$$

è tale, che per la sua forma uguaglia il risultato che deriva da essa per una data permutazione, se sia, per esempio,

$$f(x')(x'')(x''')(x^{IV})(x^{V}) \dots (x^{(m)}) = f(x'')(x''')(x^{IV})(x^{V})(x') \dots (x^{(m)}),$$

rinnovando successivamente la permutazione medesima su i nuovi risultati che ne vengono, finchè ritorni il primo, tutti questi saranno uguali fra loro.

A cagione del n° 97 ciò si dimostra affatto come nel n° 228. Perciò, se questi risultati fra loro uguali sono di numero p, tutti i π risultati della y (n° 93) saranno fra loro uguali a p a p, e dovrà per conseguenza essere π esattamente divisibile per p. Chiameremo questo numero p *il grado di uguaglianza* della nostra funzione.

262. *Se nella data*

$$y = f(x')(x'')(x''')(x^{IV})(x^{V})(x^{VI}) \dots (x^{(m)})$$

eseguiscasi una permutazione semplice qualsivoglia del primo genere, *ed essa medesima si replichi quanto si può, tutti i risultati, che quindi si ottengono, tanti dovranno essere di numero, quante sono le radici implicate nella permutazione* [20].

Supponiamo che nella nostra

$$y = f(x')(x'')(x''')(x^{IV})(x^{V})(x^{VI}) \dots (x^{(m)})$$

permutinsi le cinque radici x', x'', x''', x^{V}, x^{VI}, e fissiamo l'attenzione sulla prima x'. Tolta essa dal suo posto, venga questo occupato da un'altra delle radici, per esempio dalla x^{V}; la x' non potrà passare al quinto posto, poichè, se ciò fosse, la permutazione di x' in x^{V} sarebbe disgiunta dall'altra fra le x'', x''', x^{VI} contro la supposizione (n° 257); sia pertanto il quinto posto occupato da un'altra delle tre radici x'', x''', x^{VI}, per esempio dalla x'''; neppure in luogo di questa x''' potrà collocarsi la x', imperciocchè in tal caso le x', x''', x^{V} si cambierebbero fra loro separatamente dalle x'', x^{VI} contro la ipotesi. In luogo adunque della x''' entri, per esempio, la x^{VI}; invece della x^{VI} dovrà per la stessa ragione entrare non già la x', ma la x'', e la x' occuperà finalmente il posto di quest'ultima radice x'': ciò fatto, ne verrà il risultato

$$2^{o} \quad f(x^{V})(x')(x^{VI})(x^{IV})(x''')(x'') \dots (x^{(m)}).$$

Considerando la natura della nostra permutazione dal primo e secondo risultato, vedesi nascere questo da quello col trasportarsi nel primo posto la radice che occupava il quinto, col porre nel quinto la radice che occupava il terzo, con lo scrivere nel terzo la radice del sesto, mettendo nel sesto la radice del secondo, e nel secondo finalmente

Digitized by Google

la radice del primo

$$\text{(III)}\quad \begin{cases} 1^\circ & f(x')(x'')(x''')(x^{IV})(x^V)(x^{VI}) \ldots (x^{(m)}), \\ 2^\circ & f(x^V)(x')(x^{VI})(x^{IV})(x''')(x'') \ldots (x^{(m)}), \\ 3^\circ & f(x''')(x^V)(x'')(x^{IV})(x^{VI})(x') \ldots (x^{(m)}), \\ 4^\circ & f(x^{VI})(x''')(x')(x^{IV})(x'')(x^V) \ldots (x^{(m)}), \\ 5^\circ & f(x'')(x^{VI})(x^V)(x^{IV})(x')(x''') \ldots (x^{(m)}). \end{cases}$$

Ora replicando, siccome in (III), questa medesima operazione sul risultato secondo, poscia sul terzo, e così di seguito, io dico che dopo del quinto la x' tornerà immediatamente al suo primo posto: e di fatti, per la natura della permutazione essa vi tornerà subito dopo che ha occupato il posto quinto; ma a questo quinto posto non vi può passare se non dal terzo, e al terzo non può andare se non dal sesto, ed al sesto, se non dal secondo. Dunque essa x', tornando al suo primo luogo solamente dopo avere percorsi gli altri tutti, vedesi chiaramente che vi tornerà solo alla quinta permutazione, ossia dopo il quinto risultato. Ma fissando l'attenzione sulle altre radici x'', x''', x^V, x^{IV} trovasi in egual modo che la x'' torna essa pure al secondo luogo nel tempo stesso che la x' torna nel primo, e così la x''' nel terzo, la x^V nel quinto, e la x^{VI} nel sesto. Dunque alla quinta permutazione tornandosi ad ottenere il risultato primo, ne viene che i successivi risultati richiesti dovranno essere in punto cinque, ossia tanti, quante sono le radici impiegate nella permutazione: ciò vedesi in (III). Ora questo discorso medesimo ha luogo egualmente qualunque siasi la semplice permutazione supposta e qualunque il numero delle radici impiegatevi. Dunque si verificherà sempre che, etc.

263. Da questo teorema ricavasi:

1° *Che una delle radici implicate nella permutazione precedente occupando un dato luogo in uno dei risultati (III), non potrà giammai occupare il luogo istesso in un'altro qualunque dei medesimi.* La radice per esempio x^V trovasi nel quinto luogo del risultato primo; ma in nessuno degli altri risultati può il quinto luogo venire occupato dalla stessa x^V.

2° *Se vogliamo che la nostra y* (n° prec.) *si conservi dello stesso valore per una permutazione semplice qualsivoglia del* primo genere, *tutti gli* $1.2.3. \ldots m = \pi$ *valori di essa saranno uguali fra loro a tanti a tanti, quante sono le radici che impiegansi nella permutazione supposta; così che, se queste radici sono di numero p, il numero dei valori differenti della y sarà*

$$\frac{1.2.3 \ldots m}{p} = \frac{\pi}{p}.$$

Se sia $m = 5$, $p = 3$, e la

$$f(x')(x'')(x''')(x^{IV})(x^V) = f(x')(x'')(x^V)(x''')(x^{IV}),$$

i primi risultati tra loro uguali saranno i tre

$$f(x')(x'')(x''')(x^{IV})(x^V),$$
$$f(x')(x'')(x^V)(x''')(x^{IV}),$$
$$f(x')(x'')(x^{IV})(x^V)(x'''),$$

e i valori differenti della y saranno in numero di $\frac{1.2.3.4.5}{3} = \frac{120}{3} = 40$.

Digitized by Google

3° *I* π *valori della* y *per una permutazione semplice del* primo genere *non potranno al più che essere uguali fra loro ad* m *ad* m, *e ciò quando nella permutazione le* m *radici tutte si muovono dal loro luogo.* Nel caso di $m = 5$, il maggior numero di risultati uguali fra loro per una permutazione semplice non potrà essere che di cinque, e ciò mentre si cangino fra loro tutte le x', x'', x''', x^{IV}, x^{V}. Vedesi questo nell'esempio seguente

$$\text{(IV)} \quad \begin{cases} 1^\circ & f(x')(x'')(x''')(x^{IV})(x^{V}), \\ 2^\circ & f(x'')(x''')(x^{IV})(x^{V})(x'), \\ 3^\circ & f(x''')(x^{IV})(x^{V})(x')(x''), \\ 4^\circ & f(x^{IV})(x^{V})(x')(x'')(x'''), \\ 5^\circ & f(x^{V})(x')(x'')(x''')(x^{IV}). \end{cases}$$

4° *Se una permutazione ci dà i* π *valori della* y *tra loro uguali a* p *a* p, *essendo* $p > m$, *tale permutazione non potrà essere che composta, o semplice del* secondo genere.

264. *Determinare il grado* p *di uguaglianza nella* y, *mentre essa conservisi la medesima per una permutazione semplice del* secondo genere.

Supponiamo primieramente che, come nella ipotesi di

$$\begin{aligned} & f(x')(x'')(x''')(x^{IV})(x^{V})(x^{VI})(x^{VII})(x^{VIII})(x^{IX})(x^{X}) \\ = & f(x^{IV})(x')(x'')(x''')(x^{VI})(x^{VII})(x^{VIII})(x^{IX})(x^{X})(x^{V}), \end{aligned}$$

la nostra permutazione sia formata di due sole componenti (n° 258), la prima di quattro e la seconda di sei radici. Replicando sul risultato secondo, poscia sul terzo e così di seguito l'operazione medesima, ne verranno i risultati

$$\text{(V)} \quad \begin{cases} 1^\circ & f(x')(x'')(x''')(x^{IV})(x^{V})(x^{VI})(x^{VII})(x^{VIII})(x^{IX})(x^{X}), \\ 2^\circ & f(x^{IV})(x')(x'')(x''')(x^{VI})(x^{VII})(x^{VIII})(x^{IX})(x^{X})(x^{V}), \\ 3^\circ & f(x''')(x^{IV})(x')(x'')(x^{VII})(x^{VIII})(x^{IX})(x^{X})(x^{V})(x^{VI}), \\ 4^\circ & f(x'')(x''')(x^{IV})(x')(x^{VIII})(x^{IX})(x^{X})(x^{V})(x^{VI})(x^{VII}), \\ 5^\circ & f(x')(x'')(x''')(x^{IV})(x^{IX})(x^{X})(x^{V})(x^{VI})(x^{VII})(x^{VIII}), \\ 6^\circ & f(x^{IV})(x')(x'')(x''')(x^{X})(x^{V})(x^{VI})(x^{VII})(x^{VIII})(x^{IX}), \\ 7^\circ & f(x''')(x^{IV})(x')(x'')(x^{V})(x^{VI})(x^{VII})(x^{VIII})(x^{IX})(x^{X}), \\ 8^\circ & f(x'')(x''')(x^{IV})(x')(x^{VI})(x^{VII})(x^{VIII})(x^{IX})(x^{X})(x^{V}), \\ 9^\circ & f(x')(x'')(x''')(x^{IV})(x^{VII})(x^{VIII})(x^{IX})(x^{X})(x^{V})(x^{VI}), \\ 10^\circ & f(x^{IV})(x')(x'')(x''')(x^{VIII})(x^{IX})(x^{X})(x^{V})(x^{VI})(x^{VII}), \\ 11^\circ & f(x''')(x^{IV})(x')(x'')(x^{IX})(x^{X})(x^{V})(x^{VI})(x^{VII})(x^{VIII}), \\ 12^\circ & f(x'')(x''')(x^{IV})(x')(x^{X})(x^{V})(x^{VI})(x^{VII})(x^{VIII})(x^{IX}) \end{cases}$$

Digitized by Google

tutti uguali fra loro, e questi dovranno essere tanti di numero, quanti se ne ottengono finchè ritorna il primo, ossia finchè le radici delle due componenti tornano tutte insieme alla prima lor posizione: ora le radici della prima componente pei n^{i} 258, 262 vi ritornano ad ogni quattro risultati, e quelle della seconda vi ritornano ad ogni sei: dunque sì le une che le altre di tali radici non potranno tutte insieme ricuperare la posizione loro primiera, che dopo un numero di risultati multiplo del 4 e multiplo del 6; ma il numero minore che gode di questa proprietà si è il 12, come è facile a vedersi, a cagione di $4 = 2.2$, di $6 = 2.3$, e del 2 massimo comun divisore fra questi due numeri 4, 6. Dunque dodici saranno i risultati (V), e 12 il grado richiesto di uguaglianza.

Se siano b le radici che impiegansi nella prima permutazione componente, c quelle della seconda, e se sia $b = ng$, $c = nh$, essendo n il loro massimo comun divisore, nel modo medesimo troveremo dover essere p multiplo tanto del numero b, come dell'altro c, ed essere perciò $p = ngh$.

Se la nostra permutazione contenga tre, quattro, etc. permutazioni componenti, e se b, c, d, etc. ci esprimono i numeri delle rispettive radici, supposto n il loro massimo divisor comune, e supposto $b = ng$, $c = nh$, $d = ni$, etc., vedremo egualmente dover essere $p = nghi$, mentre i numeri g, h, i, etc. siano, presi a due a due, primi fra loro; che, se due o più fra questi, per esempio i due q, h, hanno un divisore comune, se sia $g = rk$, $h = rl$, essendo r il loro massimo comun divisore, allora risulterà $p = nrkli$. In generale *il numero p deve sempre avere il minimo valore multiplo di cadauno dei numeri a, b, c*, etc. [21].

265. *Determinare il grado di uguaglianza, allorchè la y conserva il proprio valore per una permutazione composta del primo genere* [22].

Siano due le permutazioni componenti, sia G il numero dei risultati che ottengonsi dalla y mediante la prima di queste considerata da sè sola, e siano H i risultati che nella stessa guisa ricavansi dalla y col mezzo della seconda. Poichè pel n° 259 le nostre permutazioni componenti sono in tutto e per tutto indipendenti fra loro, trovati tutti i G risultati che nascono dalla prima di esse, è chiaro che su ciascuno dei medesimi potrò eseguire la permutazione seconda; ma per tale operazione da ciascuno dei G valori se ne ottiene un numero H; dunque sarà GH il numero totale di questi risultati, e per conseguenza sarà $p = GH$.

Se sia $m = 5$, e per una permutazione composta del *primo genere* vogliasi

$$f(x')(x'')(x''')(x^{IV})(x^{V}) = f(x'')(x')(x^{V})(x''')(x^{IV}),$$

onde si abbia $G = 2$, $H = 3$, sarà $p = 2.3 = 6$, e perciò

$$\frac{\pi}{GH} = \frac{120}{6} = 20.$$

Nella ipotesi che tre, quattro, etc. siano le permutazioni componenti, e che I, K, etc. ci esprimano corrispondentemente i risultati che nascono dalla y per la terza, la quarta, etc. di queste, nella maniera medesima troveremo dover essere in corrispondenza $p = GHI$, $p = GHIK$, etc.

Digitized by Google

266. *Chiamato q il numero totale delle radici che impiegansi in una data permutazione (formata di due sole componenti), per cui la y non cambia di valore, se questo q sia numero primo, la permutazione supposta non potrà giammai essere semplice del* genere secondo [23].

Se ciò si nega, sia la permutazione che si vuole semplice del *secondo genere,* formata di due sole componenti, la prima di un numero b di radici e la seconda di un numero c, cosicchè $b + c = q$. A cagione di q numero primo, b, c devono essere due numeri primi fra loro: ma il grado di uguaglianza p (n° 261) deve essere multiplo di amendue questi numeri (n° 264); dunque dovrà essere $p = bc$.

Ma se p ha questo valore, è facile a vedersi dal n° 265 che la permutazione è composta del *primo genere.* Dunque, etc.

267. Da ciò segue evidentemente, che, se una funzione

$$y = f(x')(x'')(x''')(x^{IV})(x^{V})$$

è di tal forma, che abbiasi

$$f(x')(x'')(x''')(x^{IV})(x^{V}) = f(x'')(x')(x^{IV})(x^{V})(x'''),$$

ciò potrà succedere per una permutazione composta del *primo genere,* e quindi sarà ancora

$$f(x')(x'')(x''')(x^{IV})(x^{V}) = f(x'')(x')(x''')(x^{IV})(x^{V})$$

268. Lasciando nella precedente funzione y la x^{V} sempre a suo luogo, facciamo tutte le possibili permutazioni fra le altre $5 - 1 = 4$ radici, e scriviamo nella tavola (VI) [24], in una prima colonna verticale, tutti i risultati che ne derivano.

In seguito portiamo in ciascuno di questi risultati della prima colonna la prima cifra nell'ultimo luogo, facendo retrocedere tutte le altre come si trovano: replichiamo questa operazione quanto è possibile, e scriviamo tutti i valori che ne nascono in tante colonne verticali. Ciò fatto osservo che la prima colonna è composta di $1.2.3.4 = 24$ risultati diversi fra loro, osservo inoltre che da questi si hanno $1.2.3.4 = 24$ fila orizzontali, in ciascuna delle quali i valori vengon prodotti per una permutazione semplice del *genere primo* fra tutte le 5 radici. Dunque in ciascuna fila trovandosi 5 risultati diversi (n° 262), la somma totale dei risultati (VI) sarà $1.2.3.4.5 = 24.5 = 120$, e questi per conseguenza saranno i valori tutti che ottengonsi dalla y, nel farsi su di essa tutte le possibili permutazioni, come nella Tav. VI.

269. Supposte $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \eta, \ldots$ le radici della data (D), abbiasi di esse una funzione la quale non cambi di valore per una qualunque permutazione semplice del *primo genere,* per quella, a cagione di esempio, fra le prime cinque radici di α, in γ, di γ in η, di η in δ, di δ in β, e di β in α. Poichè le lettere x', x'', x''', x^{IV}, x^{V}, ..., di cui ci serviamo a rappresentar le radici, sono per sè indifferenti a rappresentarne piuttosto alcune che altre, espressa con la x^{V} una qualunque delle α, β, γ, δ, η, per esempio la β, denominiamo x' quella che nella permutazione va ad occupare il luogo della β, cioè la α; esprimiamo con x'' quella che va a porsi invece della α, cioè la γ; chiamiamo x''' l'altra che va al luogo della γ, cioè la η; e finalmente chiamiamo x^{IV} quella che

Digitized by Google

1°	$f(x')(x'')(x''')(x^{iv})$	97°	$f(x^{v})(x')(x'')(x''')(x^{iv})$,
2°	$f(x'')(x')(x''')(x^{iv})$	98°	$f(x^{v})(x'')(x')(x''')(x^{iv})$,
3°	$f(x'')(x''')(x')(x^{iv})$	99°	$f(x^{v})(x'')(x''')(x')(x^{iv})$,
4°	$f(x''')(x')(x'')(x^{iv})$	100°	$f(x^{v})(x''')(x')(x'')(x^{iv})$,
5°	$f(x')(x''')(x'')(x^{iv})$	101°	$f(x^{v})(x')(x''')(x'')(x^{iv})$,
6°	$f(x''')(x'')(x')(x^{iv})$	102°	$f(x^{v})(x''')(x'')(x')(x^{iv})$,
7°	$f(x'')(x''')(x^{iv})(x')$	103°	$f(x^{v})(x'')(x''')(x^{iv})(x')$,
8°	$f(x''')(x^{iv})(x')(x'')$	104°	$f(x^{v})(x''')(x^{iv})(x')(x'')$,
9°	$f(x^{iv})(x')(x'')(x''')$	105°	$f(x^{v})(x^{iv})(x')(x'')(x''')$,
10°	$f(x')(x''')(x^{iv})(x'')$	106°	$f(x^{v})(x')(x''')(x^{iv})(x'')$,
11°	$f(x''')(x^{iv})(x'')(x')$	107°	$f(x^{v})(x''')(x^{iv})(x'')(x')$,
12°	$f(x^{iv})(x'')(x')(x''')$	108°	$f(x^{v})(x^{iv})(x'')(x')(x''')$,
13°	$f(x''')(x')(x^{iv})(x'')$	109°	$f(x^{v})(x''')(x')(x^{iv})(x'')$,
14°	$f(x')(x^{iv})(x'')(x''')$	110°	$f(x^{v})(x')(x^{iv})(x'')(x''')$,
15°	$f(x^{iv})(x'')(x''')(x')$	111°	$f(x^{v})(x^{iv})(x'')(x''')(x')$,
16°	$f(x')(x'')(x^{iv})(x''')$	112°	$f(x^{v})(x')(x'')(x^{iv})(x''')$,
17°	$f(x'')(x^{iv})(x''')(x')$	113°	$f(x^{v})(x'')(x^{iv})(x''')(x')$,
18°	$f(x^{iv})(x''')(x')(x'')$	114°	$f(x^{v})(x^{iv})(x''')(x')(x'')$,
19°	$f(x''')(x'')(x^{iv})(x')$	115°	$f(x^{v})(x''')(x'')(x^{iv})(x')$,
20°	$f(x'')(x^{iv})(x')(x''')$	116°	$f(x^{v})(x'')(x^{iv})(x')(x''')$,
21°	$f(x^{iv})(x')(x''')(x'')$	117°	$f(x^{v})(x^{iv})(x')(x''')(x'')$,
22°	$f(x'')(x')(x^{iv})(x''')$	118°	$f(x^{v})(x'')(x')(x^{iv})(x''')$,
23°	$f(x')(x^{iv})(x''')(x'')$	119°	$f(x^{v})(x')(x^{iv})(x''')(x'')$,
24°	$f(x^{iv})(x''')(x'')(x')$	120°	$f(x^{v})(x^{iv})(x''')(x'')(x')$,

Digitized by Google

Digitized by Google

portasi al luogo della η, cioè la δ. Ciò fatto, nello scrivere giusta il n° 2 una funzione qualunque delle x', x'', x''', ..., essendo evidentemente indifferente lo scrivere prima una delle radici che un'altra, potremo esprimere la funzione data fra le α, β, γ, ... con la $f(x')(x'')(x''')(x^{IV})(x^{V})$, ... e, ciò eseguito, la permutazione supposta ci darà

$$\text{(VII)} \qquad f(x')(x'')(x''')(x^{IV})(x^{V}) \cdots = f(x'')(x''')(x^{IV})(x^{V})(x') \ldots .$$

Dunque: *se una funzione delle radici della data è tale che non cambi di valore ad una permutazione semplice del primo genere fra cinque delle radici, tale funzione e tale permutazione, qualunque siansi, potranno venire sempre espresse dalla* (VII). Se il numero delle radici che impiegansi nella permutazione è diverso dalle cinque, vedremo in egual modo che la funzione e la permutazione corrispondente possonsi sempre rappresentare con espressione simile alla precedente.

270. [25] *Restando i* $\pi = 120$ *valori della*

$$y = f(x')(x'')(x''')(x^{IV})(x^{V})$$

fra loro uguali a p a p per una permutazione composta del secondo genere (n° 259), *determinare il valore del numero p.*

Essendo cinque soltanto le radici della funzione supposta; dal n° 260 è chiaro che, nella permutazione composta del *secondo genere,* ciascuna delle componenti non potrà che contenere due sole radici. Dunque la nostra y, non cambiando valore per una simile permutazione, applicato qui pure il raziocinio del n° prec., potrà sempre ridursi alla forma

$$f[(x', x''), (x''', x^{IV})](x^{V})$$

(n° 3), e quindi, per questa avremo

$$p = 2.2.2. = 8.$$

Che, se oltre la forma precedente si volesse che la nostra y fosse tale che potesse acquistare anche l'altra

$$f(x')[(x'', x'''), (x^{IV}, x^{V})],$$

allora avendosi nella Tavola VI il risultato $1° = 51°$ ne verrebbe, per la forma supposta a principio,

$$f[(x', x''), (x''', x^{IV})](x^{V}) = f[(x', x^{IV}), (x^{V}, x'')](x'''),$$

e però la y non resterebbe più la medesima per una permutazione composta del *genere secondo,* ma per una del *terzo* (n° 259), il che è contro la supposizione. Dunque nella nostra ipotesi non può la p che avere il valore 8.

271. *Determinare il numero p allora quando i 120 valori della nostra y rimangono fra loro uguali per una permutazione del terzo genere composta, in cui la prima delle componenti sia semplice e comprenda tutte insieme le cinque radici della funzione.*

Qualunque siasi la seconda permutazione componente, espressa la prima pel n° 269 con l'equazione (VII), tutti i cinque risultati della prima fila nella Tav. VI riduconsi per essa al solo 1° (n° 261), tutti i risultati della fila seconda riduconsi al solo 2°, e così di seguito; dunque per questa prima permutazione i valori tutti della y si ridurranno

Digitized by Google

infine a quei soli della prima colonna verticale, i quali non sono che di numero $1.2.3.4 = 24$ (n° 268), e nei quali la x^v trovasi immobile nell'ultimo luogo. Passando in seguito a considerare la permutazione seconda, supponiamo primieramente che questa pure sia semplice, e poichè essa può aver luogo fra due o tre o quattro o tutte le cinque radici della y:

1° *Supponiamo che abbia luogo fra due, e queste siano le* x', x'', onde il 1° tra i valori (VI) divenga

$$f(x', x'')(x''')(x^{iv})(x^v).$$

Pel n° 97 il risultato 25° diventerà

$$f(x'', x''')(x^{iv})(x^v)(x');$$

ma questo risultato 25° a cagione della prima permutazione componente non solo è uguale, ma è identico ed uno stesso col risultato 1°. Dunque, se il 25° non cambia di valore, come non lo cambia di fatti, alla permutazione di x'' in x''', non lo cambierà neppure alla permutazione medesima il 1°, e per conseguenza esso 1° restando il medesimo non solo pel cambiamento di x' in x'', ma per quello eziandio di x'' in x''', acquisterà la forma $f(x', x'', x''')(x^{iv})(x^v)$. Il risultato 25° divenendo perciò

$$f(x'', x''', x^{iv})(x^v)(x'),$$

resterà il medesimo alla permutazione reciproca fra le x'', x''', x^{iv}. Dunque, per la ragione ora addotta, dovendo alla permutazione istessa fra le stesse tre radici x'', x''', x^{iv} rimanere il medesimo anche il risultato primo, esso diventerà $f(x', x'', x''', x^{iv})(x^v)$. Ora proseguendo lo stesso raziocinio, si trova che in fine il risultato 1°, ossia la y aver deve la forma

$$f(x', x'', x''', x^{iv}, x^v).$$

Dunque in questo primo caso avremo

$$p = 1.2.3.4.5 = 120.$$

2° *Supponiamo che la permutazione seconda riguardi altre due radici diverse dalle precedenti* x', x'', per esempio le due x', x''', oppure le x'', x^v, onde si abbia il risultato $1° = 6°$, ovvero esso $1° = 83°$. Nel primo di questi casi avendosi per la permutazione prima il risultato $6° = 30°$; sarà ancora il $1° = 30°$; ma, se ciò succede, ne viene pei n^i 266, 267 il $1° = 2°$; dunque la y acquisterà la forma

$$f(x', x'')(x''')(x^{iv})(x^v).$$

Nel secondo poi dei supposti casi, se il risultato primo non cambia valore al cambiamento reciproco delle radici che occupano il secondo e il quinto luogo, non lo cambierà neppure il 25° alla mutazione reciproca delle radici x', x''' (n° 97); ma il $25° = 1°$, dunque al cambiamento medesimo di x' in x''', esso 1° non cambierà neppure di valore, e quindi avendosi il $1° = 6°$, questo si ridurrà al caso precedente, e però la y acquistando ancor quivi la forma

$$f(x', x'')(x''')(x^{iv})(x^v),$$

Digitized by Google

sempre ci darà

$$p = 1.2.3.4.5 = 120$$

(prec. 1°). Lo stesso sempre si ritrova se le due radici a permutarsi sono diverse dalle considerate finora.

3° *Succeda la seconda permutazione componente fra tre radici,* cioè fra le tre x', x'', x''', così che si abbia il risultato

$$\begin{aligned} &1^\circ \quad f(x')(x'')(x''')(x^{IV})(x^{V}) \\ &= 3^\circ \quad f(x'')(x''')(x')(x^{IV})(x^{V}) \\ &= 4^\circ \quad f(x''')(x')(x'')(x^{IV})(x^{V}). \end{aligned}$$

In conseguenza di ciò il risultato 25° rimarrà lo stesso alla permutazione semplice fra le x'', x''', x^{IV}; ma questo 25°, per la prima e la seconda permutazione componente, è identico ed uno col 1°, col 3°, e col 4°: dunque eseguendo fra le stesse x'', x''', x^{IV} la permutazione medesima negli accennati 1°, 3° e 4° risultati, nessuno di essi per questa cambierà di valore. Ora per tale proprietà il risultato 3° non cangia valore alla permutazione semplice tra le radici che occupano il primo, il secondo e il quarto posto; e il risultato 4° non lo cangia alla permutazione istessa fra le radici che sono nei posti primo, terzo e quarto. Dunque pel n° 98 anche il risultato 1° resterà il medesimo alla permutazione semplice delle tre radici che occupano i posti primo, secondo e quarto, e per quella delle radici che occupano i posti primo, terzo e quarto; ma tal risultato 1°, per quanto abbiamo detto, resta anche il medesimo per la permutazione semplice delle radici che esistono nei luoghi primo, secondo e terzo, e per l'altra delle radici esistenti nei luoghi secondo, terzo e quarto. Dunque, se nel risultato 1° troviamo tutte le combinazioni a tre a tre delle x', x'', x''', x^{IV}, e se sopra ciascuna di queste combinazioni pratichiamo la nostra permutazione semplice, sempre esso 1° conserverà il suo valore. Ma queste combinazioni sono in numero $\frac{4.3.2}{2.3} = 4$; e, corrispondentemente a ciascuna di esse, praticando e replicando quanto è possibile la supposta permutazione semplice, ottengonsi dodici risultati nei quali tutti la x^{V} occupa l'ultimo luogo. Dunque per tale permutazione i 24 valori della prima colonna dovranno essere fra loro uguali a 12 a 12, avendosi così il

$$\text{(VIII)} \quad \begin{cases} 1^\circ = 3^\circ = 4^\circ = 17^\circ = 21^\circ = 19^\circ = 12^\circ = 10^\circ = 14^\circ = 8^\circ = 24^\circ = 22^\circ \\ \text{ed il} \\ 2^\circ = 5^\circ = 6^\circ = 23^\circ = 15^\circ = 13^\circ = 9^\circ = 7^\circ = 20^\circ = 11^\circ = 18^\circ = 16^\circ; \end{cases}$$

e per conseguenza a cagione della permutazione prima in questo terzo caso avremo $p = 12.5 = 60$.

4° *Siano pur anche tre le radici della permutazione seconda, e siano queste, per esempio, le* x', x''', x^{IV} *onde divenga il risultato* $1^\circ = 19^\circ = 12^\circ$. Effettuando questa permutazione su quello fra i cinque risultati della prima fila, nel quale la x^{V} resta esclusa dalla permutazione medesima, cioè, nel nostro caso, su il 73°; vedesi che questo 73°

Digitized by Google

non cambierà di valore al cambiamento fra le radici x^{IV}, x', x''. Dunque alla mutazione medesima fra le stesse x^{IV}, x', x'', non cangiando neppur di valore i precedenti tre risultati 1°, 19°, 12°, potrò su di essi replicare il raziocinio medesimo del prec. 3°; e però ancora in questa supposizione ricaveremo $p = 60$. Che, se x'', x^{IV}, x^{V} son le radici date a permutarsi; il risultato 97° restando perciò il medesimo al cambiamento fra le x', x''', x^{IV}, tale rimarrà ancora il risultato 1°, mentre in esso si cambino fra loro le stesse x', x''', x^{IV}; dunque questo caso si ridurrà al precedente, e per conseguenza qui pure otterremo $p = 60$. Lo stesso trovasi in egual modo in tutti gli altri, in cui tre siano le radici che impiegansi nella permutazione seconda.

5° *Siano quattro le radici della seconda permutazione componente, ed essendo questa semplice del secondo genere, vogliasi il risultato:*

$$1° \quad f(x')(x'')(x''')(x^{IV})(x^{V})$$
$$= 8° \quad f(x''')(x^{IV})(x')(x'')(x^{V}).$$

Per questa seconda permutazione componente dovrà il 25° restare il medesimo alla mutazione simultanea di x'' in x^{IV}, e di x''' in x^{V} (n° 97); dunque, a cagione del 25° identico col 1°, per quanto abbiam detto precedentemente dovrà essere questo $1° = 51°$, e però $= 3°$, poichè per la prima permutazione componente il $51° = 3°$. Ora il 3° nasce dal 1° per la permutazione semplice fra le sole tre radici x', x'', x''', dunque questo caso racchiude quello del precedente caso 3°. Ma questo precedente 3° dandoci, come si vede in (VIII), il risultato $1° = 8°$ racchiude il quinto caso ora supposto. Dunque i nostri due casi 3° e 5° sono identici fra di loro, e quindi anche in quest'ultimo si verificheranno le uguaglianze (VIII) e sarà $p = 60$.

6° *Se la precedente permutazioue seconda* (Caso 5°) *sia tale, che abbiasi il risultato* $1° = 22°$, troveremo in egual modo dover essere $p = 60$: *ma se per essa divenga il risultato* $1° = 24°$; allora, replicando i soliti raziocinii, sopra qualunque dei risultati della prima fila si applichi questa permutazione supposta e qualunque nuova permutazione venga perciò a generarsi nel risultato 1°, da esso non si producono mai altri risultati che quegli esistenti nell'ultima fila. Dunque, i risultati in questo caso uguali al primo essendo quei soli delle fila prima ed ultima, vedesi che avremo $p = 10$.

Che, se poi in questa permutazione seconda invece di una delle prime quattro radici, per esempio invece della x^{4}, entra la x^{V}, effettuando allora, come nel caso 4°, tale permutazione su quello dei cinque risultati della prima fila nel quale la x^{V} resta esclusa dalla permutazione medesima, nel nostro caso sopra del 97°, vedo che in esso tal cangiamento viene a prodursi fra le x', x'', x''', x^{IV}. Dunque, a cagione di questo $97° = 1°$, dovendo pel cangiamento istesso fra le stesse radici x', x'', x''', x^{IV} rimanere il medesimo anche il risultato 1°, vedesi che la permutazione supposta fra le quattro radici compresavi la x^{V}, si riduce infine ad un'altra fra quattro radici nella quale la x^{V} resta esclusa, e però, che *tutti questi ultimi casi riducendosi sempre ai precedenti* 5° *e* 6°, *sempre ci daranno* $p = 60$ *oppure* $p = 10$.

7° *Rimanendo quattro le radici della seconda permutazione componente sia questa una*

Digitized by Google

semplice del genere primo, e sia perciò il risultato

$$\begin{aligned} 1^{o} \quad & f(x')(x'')(x''')(x^{IV})(x^{V}) \\ = 7^{o} \quad & f(x'')(x''')(x^{IV})(x')(x^{V}) \\ = 8^{o} \quad & f(x''')(x^{IV})(x')(x'')(x^{V}) \\ = 9^{o} \quad & f(x^{IV})(x')(x'')(x''')(x^{V}). \end{aligned}$$

Poichè, in conseguenza della supposizione fatta, esser deve il $1^{o} = 8^{o}$, e poichè questa uguaglianza quella si è che abbiamo supposta nel prec. Caso 5°, ne segue, evidentemente, che dovrà essere ancora il nostro risultato $1^{o} = 3^{o}$. Ora tale uguaglianza del 1° al 3° unita all'altra del 1° al 25° pel prec. Caso 3° ci dà che la nostra funzione deve eziandio restar la medesima alla permutazione semplice delle tre radici che occupano i luoghi secondo, terzo e quarto. Dunque dovrà essere ancora il risultato $7^{o} = 20^{o} = 2^{o}$; ma il $7^{o} = 1^{o}$; dunque sarà esso $1^{o} = 2^{o}$, e però la y acquistando la forma $f(x', x'')(x''')(x^{IV})(x^{V})$, diverrà tale qual fu la supposta nel Caso 1°; ma in questo caso trovammo che essa y finalmente aver deve la forma $f(x', x'', x''', x^{IV}, x^{V})$; dunque tale funzione avrà la forma medesima anche in questo quarto caso, e qui pure per conseguenza avremo $p = 1.2.3.4.5 = 120$.

8° Per la permutazione precedente (Caso 7°) possonsi dare ancora due casi diversi dall'accennato, nei quali entrano le sole prime quattro radici, e tali sono quello del $1^{o} = 11^{o}$, e l'altro del $1^{o} = 13^{o}$, per cui risulta il $1^{o} = 11^{o} = 22^{o} = 18^{o}$, ovvero esso $1^{o} = 13^{o} = 24^{o} = 20^{o}$. Nel primo di questi casi, avendosi il $1^{o} = 22^{o}$, rinnovato il discorso precedente (Caso 7°) pel Caso 6° troveremo $p = 120$, ma nell'altro, a cagione del $1^{o} = 24^{o}$, non è difficile a vedersi, dal Caso 6°, che dovrà essere $p = 20$. Nel modo stesso poi che abbiamo accennato sul fine del Caso 6°, troveremo che dovrà essere sempre $p = 120$, ovvero $p = 20$ anche allorquando fra le quattro radici appartenenti alla seconda permutazione viene compresa la x^{V}.

9° *La seconda permutazione componente essendo semplice del primo genere riguardi tutte cinque le radici della y.* Dovendo per questa la x^{V} muoversi dal suo luogo, il risultato che dal 1° immediatamente deriva, non potrà esistere nella prima colonna. Ora tal risultato vedesi dalla Tavola VI, che deve esistere o nella 1^{a} fila, o in qualcuna delle seguenti 3^{a}, 4^{a}, 8^{a}, 10^{a}, 12^{a}, 14^{a}, 17^{a}, 19^{a}, 21^{a}, 22^{a}. Se esiste nella 1^{a}, come nella ipotesi che ne venga il risultato $1^{o} = 73^{o}$; avendosi allora per la permutazione prima il $1^{o} = 25^{o} = 49^{o} = 73^{o} = 97^{o}$, e per la seconda il $1^{o} = 73^{o} = 25^{o} = 97^{o} = 49^{o}$, queste saranno identiche fra di loro, e non potranno però che darci $p = 5$. Che se il risultato proveniente dal 1°, che dirò risultato secondo, esiste in qualche altra delle fila ora accennate, allora osservo nella fila istessa il risultato che gli corrisponde nella prima colonna verticale: ma quest'ultimo è sempre tale, che nasce dal primo per una permutazione semplice fra tre sole radici o per una semplice del *secondo genere* fra quattro, come apparisce dai precedenti numeri esprimenti le fila paragonati coi numeri (VIII). Dunque a cagione della permutazione prima essendo quest'ultimo risultato identico col secondo, se replicheremo qui lo stesso raziocinio che abbiamo fatto pel Caso 5°

Digitized by Google

troveremo in modo eguale che il caso presente riducesi sempre ad uno dei quattro 3°, 4°, 5°, 6°, e però che avremo $p = 60$. Avvertasi che tra le fila sopraccennate non avendo luogo la 24ª, non potrà giammai essere quivi, come nel Caso 6°, $p = 10$.

10° *Se finalmente anche la seconda permutazione componente sia della classe delle composte:* essendo in allora questa pure formata di altre componenti, in ciascuna delle quali entreranno o due o tre o quattro o cinque radici, è facile il vedere dai Casi prec. che la p dovrà acquistar sempre uno dei valori seguenti 120, 60, 20.

272. Con raziocinii simili ai precedenti potremo sempre determinare il valore del numero p; anche allorquando il numero delle radici che formano la prima permutazione componente, sia minore di cinque.

273. *) *Eseguita nel risultato* 1° (Tav. VI) *una permutazione qualunque,* quella per esempio di x' in x'', *e osservato quali radici vengono smosse per tale permutazione in ciascuno dei risultati della prima fila,* cioè nel nostro caso le due x'', x''' nel risultato 25°; le x''', x^{IV} nel 49°; le x^{IV}, x^{V} nel 73°, e le x^{V}, x' nel 97°; *se suppongo la y tale, che il risultato* 1° *resti sempre il medesimo, mentre la permutazione supposta si eseguisca in esso fra due qualunque delle accennate radici,* cioè fra le due x', x'', oppure fra le due x'', x''', oppure etc., cosicchè ne venga esso $1° = 2° = 5° = 16° = 33° = 103°$; io dico che, in simile caso, *dovrà sempre ricavarsi tal risultato* $1° = 25°$.

1° Eseguisco in questa prima supposizione la permutazione seconda sul risultato 2°, e avuta l'equazione $2° = 3°$, effettuo su questo 3° la permutazione terza; ottenuto così il $3° = 7°$, faccio su del 7° la permutazione quarta, ma quindi ne nasce il $7° = 25°$. Dunque sarà ancora il $1° = 25°$.

2° Siano le permutazioni componenti di tre radici, e, giusta l'enunciato del teorema, suppongasi perciò il risultato $1° = 3° = 10° = 28° = 38° = 80°$. Applicando al risultato 3° la permutazione terza ne viene esso $3° = 25°$. Dunque, etc.

3° Supposte quattro le radici da permutarsi, e ciascuna permutazione componente supposta semplice del *secondo genere,* sia il risultato $1° = 22° = 45° = 113° = 36° = 115°$. Dall'equazione $36° = 45°$ si ricava il $1° = 3°$, ed il $113° = 52°$; ma dalla $113° = 115°$ si vede dover essere il $52° = 80°$, e però il $1° = 28°$. Dunque, applicando quest'ultima permutazione al risultato 3°, otterremo il $3° = 25°$, e però, etc.

4° Siano quattro tutt'ora le radici, ed, essendo le permutazioni componenti semplici del *genere primo,* si abbia il risultato $1° = 7° = 26° = 29° = 40° = 57°$. Per le equazioni $26° = 29°$, $40° = 57°$ abbiamo corrispondentemente le altre $1° = 3°$, $1° = 28°$. Dunque, come nel prec. 3°, ne verrà il $3° = 25°$, e per conseguenza, etc.

5° Essendo cinque le radici esistenti in ciascuna permutazione, supponiamo il risultato $1° = 27° = 34° = 52° = 62° = 104°$. Poichè dalla $62° = 104°$ ottienesi il $34° = 43°$,

---

*) NOTA AGGIUNTA POSTERIORMENTE DALL'AUTORE [26]:

Il teorema del § 273 vero generalissimamente nelle funzioni di cinque radici, o di un numero di radici *primo,* non è così quando il numero delle medesime non fosse *primo.* Per ciò nell'applicazione del medesimo sono necessarie alcune avvertenze. Vedasi un foglio in data 24 agosto 1802.

Digitized by Google

sarà il $1^\circ = 3^\circ$; ma per la $52^\circ = 62^\circ$ si ricava il $43^\circ = 82^\circ$; e quindi si ha il $1^\circ = 28^\circ$. Dunque risultando il $3^\circ = 25^\circ$, ne viene che, etc.

6° Tutti gli altri casi essenzialmente differenti tra loro, e differenti dagli esposti fin'ora, su de' quali si verifica quanto è stato supposto nell'enunciato del teorema, sono i seguenti:

Mentre in ciascuna permutazione impiegansi due radici, il risultato

$$1^\circ = 6^\circ = 33^\circ = 66^\circ = 15^\circ = 83^\circ.$$

Mentre s'impiegano tre radici, il risultato

$$1^\circ = 17^\circ = 60^\circ = 19^\circ = 46^\circ = 69^\circ.$$

Quando le radici impiegate sono quattro, ciascuna mutazione è semplice del *secondo genere,* il risultato

$$1^\circ = 8^\circ = 51^\circ = 58^\circ = 76^\circ = 86^\circ$$

$$1^\circ = 24^\circ = 96^\circ = 48^\circ = 120^\circ = 72^\circ.$$

Allorchè con quattro radici eseguisconsi delle permutazioni semplici del *genere primo,* il risultato

$$1^\circ = 11^\circ = 54^\circ = 71^\circ = 114^\circ = 63^\circ$$

$$1^\circ = 13^\circ = 37^\circ = 61^\circ = 85^\circ = 109^\circ.$$

Quando finalmente le radici a permutarsi sono cinque il risultato

$$1^\circ = 75^\circ = 82^\circ = 100^\circ = 110^\circ = 32^\circ.$$

Ora in tutti questi casi possonsi sempre eseguire dei discorsi simili ai precedenti Casi 1°, 2°, 3°, 4°, 5°, come può ognuno vedere non difficilmente da sè medesimo. Dunque ciascuno di essi ci darà sempre il risultato $1^\circ = 25^\circ$.

Se le permutazioni componenti fossero composte esse pure, vedesi facilmente doversi anche allora verificare il nostro teorema.

274. [27]. Da quanto si è esposto nei n^i 262, 263, 267, 271 dedurremo non difficilmente, che: *se la* $y = f(x')(x'')(x''')(x^{iv})(x^v)$ *resta la medesima per una permutazione qualunque, in cui non esista alcuna permutazione componente semplice del primo genere fra tutte cinque le*

$$x', \quad x'', \quad x''', \quad x^{iv}, \quad x^v,$$

dedurremo, dissi, non difficilmente, che in allora il grado di uguaglianza p non potrà giammai essere multiplo del 5.

Dimostro primieramente che, nella fatta ipotesi, non può il numero p acquistare alcun valore multiplo del 5 e non minore di 30.

Imperciocchè, se si volesse per es. $p = 30$, dovendo allora i risultati della Tav. VI essere fra loro eguali a 30 a 30, potremo considerare questi come divisi in quattro [28] classi, in ciascuna delle quali contengansi i 30 eguali fra loro. La prima di queste quattro classi contenga il risultato 1°, in essa non potrà aver luogo alcun altro dei risultati esistenti nella 1^a linea della nostra tavola; poichè se si contenesse per esempio il risultato 25°, allora, venendone il risultato $1^\circ = 25^\circ$, la funzione y resterebbe la medesima

Digitized by Google

ancora per una permutazione semplice fra tutte cinque le radici x', x'', ..., x^v, contro la supposizione.

Esista questo risultato 25^0 nella classe 2^a. Ciò essendo, tal classe non potrà contenere alcuno dei risultati 49^0, 73^0, 97^0; poichè se contenesse per es. il risultato 97^0, ne verrebbe il risultato $25^0 = 97^0$, e però il $1^0 = 73^0$, nuovamente contro della supposizione.

Esista questo risultato 97^0 nella classe 3^a; non dovranno in questa classe contenersi ancora gli altri due 49^0, 73^0, ma ciò è impossibile poichè se per es. contenesse il risultato 49^0, ne verrebbe il risultato $97^0 = 49^0$, e però il $1^0 = 73^0$, contro quello che abbiamo dimostrato poc'anzi.

Esista questo risultato 49^0 nella classe quarta, dovrà in questa classe esistere anche il risultato 73^0; ma ciò è impossibile, poichè ne verrebbe il risultato $1^0 = 25^0$, contro quello che abbiamo dimostrato.

Dunque sarà ancora impossibile che nella nostra supposizione risulti $p = 30$. Lo stesso discorso ha luogo mentre si voglia $p > 30$; ma, se si vuole $p < 30$, allora rifletto che, dovendo essere p multiplo del 5, dovrà la y restare la medesima per una permutazione fra le x', x'', x''', x^{iv}, x^v composta: poichè, se rimanesse la stessa per una permutazione semplice, non potendo questa per la supposizione e pel n° 267 contenere tutte cinque le radici x', x'', ..., x^v, ne conterrebbe tutt'al più quattro; quindi, non potendo pel n° 262 risultare $p > 4$, molto meno potrebbe risultare multiplo del 5. Aggiungo inoltre che nella ipotesi di $p < 30$, l'accennata permutazione non potrebbe che essere composta del 1° genere in cui due siano le permutazioni componenti e ciascuna di queste contenga due sole radici; imperciocchè, se si volesse altrimenti, se la nostra permutazione si volesse per es. formata di due componenti, l'una fra due radici, l'altra fra tre, in questo caso p dovendo per la prima permutazione componente risultare multiplo del 2, e per la permutazione seconda risultare multiplo del 3, diverrebbe multiplo del $2 \times 3 = 6$: ma per la supposizione prima deve esso p risultare multiplo del 5; dunque diverrebbe ancora multiplo del numero $6.5 = 30$, e per conseguenza non potrebbe essere $p < 30$ contro della ipotesi.

In egual modo se la nostra permutazione si volesse bensì formata di due componenti, cadauna delle quali contenesse due sole radici, ma si volesse poi composta del 2° genere (n° 259) come se fosse

$$y = f(x', x'')(x''', x^{iv})(x^v),$$

o del genere 3°, come se fosse

$$y = f(x' x'')(x''', x^{iv})(x^v) = f(x', x''')(x'', x^{iv})(x^v),$$

troveremmo sempre, come precedentemente, non poter risultare $p < 30$, contro la supposizione.

Ma se la nostra permutazione è composta di 1° genere, e le due componenti non contengono che due sole radici per cadauna, pel n° 265 il numero p non può che divenire $= 2.2 = 4$. Dunque, neppure nel caso di $p < 30$ potendo esso p acquistare valore multiplo del 5, ne viene che, etc.

Digitized by Google

275. [29]. *Per qualunque permutazione vogliansi fra loro uguali i* 120 *valori della nostra y, non potrà mai il numero p acquistare i valori* 15, 30, 40.

Se ciò fosse possibile, a cagione dei numeri 15, 30, 40 tutti e tre multipli del 5, dovrebbe pel n° 274 nella permutazione supposta esistere una componente semplice fra tutte cinque le radici; ma se questo succede, il numero p non può acquistar che i valori 5, 120, 60, 10, 20 (n^i 262, 271). Dunque, etc.

276. *Volendosi trasformare un'equazione generale del quinto grado in un'altra di grado inferiore al suo proprio,* dai n^i 275, 99, 105 apparisce che *potrò bensì ottenere delle trasformate del primo, oppure del secondo grado; ma non ne potrò ottenere giammai alcuna del quarto o del terzo.*

277. [30]. *Se vogliasi Z radice di un'equazione della forma* $Z^5 - M = 0$, *e funzione insieme delle radici di un'equazione generale del quinto grado*

$$(Q) \qquad x^5 + Ax^4 + Bx^3 + Cx^2 + Dx + E = 0,$$

io dico che essa Z dovrà avere i suoi 120 *valori* (n° 92) *tutti disuguali fra loro.*

Espressi con le lettere

$$Z', \quad Z'', \quad Z''', \quad Z^{iv}, \quad Z^{v}, \quad Z^{vi}, \quad Z^{vii}, \quad Z^{viii}, \ldots,$$

i valori tutti della Z, e con le prime cinque rappresentate le cinque radici nella

$$Z^5 - M = 0,$$

chiamo α una delle radici quinte della unità differente dalla unità medesima. Dovendo pel n° 203 aversi

$$Z' = \sqrt[5]{M}, \qquad Z'' = \alpha\sqrt[5]{M}, \qquad Z''' = \alpha^2\sqrt[5]{M}, \qquad Z^{iv} = \alpha^3\sqrt[5]{M}, \qquad Z^{v} = \alpha^4\sqrt[5]{M},$$

è chiaro che sarà

$$Z'' = \alpha Z', \qquad Z''' = \alpha^2 Z', \qquad Z^{iv} = \alpha^3 Z', \qquad Z^{v} = \alpha^4 Z',$$

che questi primi cinque valori sono già tutti necessariamente fra loro disuguali (n° 199), e che possono essi rappresentarsi con i cinque 1°, 25°, 49°, 73°, 97° della Tav. VI (n° 269), rappresentando con gli altri della Tavola istessa tutti i susseguenti

$$Z^{vi}, \quad Z^{vii}, \quad Z^{viii}, \ldots,$$

uguali, o disuguali fra loro. Ciò posto, se non si vuole che i 120 valori della Z siano tutti fra loro differenti, supponiamo, se è possibile, che due per esempio dei medesimi siano fra loro uguali. Essendo la (Q) un'equazione generale, ed essendo la Z funzione delle sue radici, vedesi che la supposta uguaglianza non potrà aver luogo, quando ciò non dipenda dalla forma della

$$f(x')(x'')(x''')(x^{iv})(x^{v}).$$

Supponiamo pertanto essa tale, che Z' non cambi di valore alla permutazione di x' in x''': per questa ipotesi la Z'' non dovrà cambiar di valore alla mutazione di x'' in x^{iv}, la Z''' non dovrà cambiarlo a quella di x''' in x^{v}, la Z^{iv} all'altra di x^{v} in x', e la Z^{v} a quella di x^{v} in x''. Ora altro non essendo le quantità Z'', Z''', Z^{iv}, Z^{v}, che la stessa Z' moltiplicata in corrispondenza per le α, α^2, α^3, α^4, è chiaro che, se quelle ri-

Digitized by Google

mangono rispettivamente le medesime alla mutazione reciproca delle x'', x^{IV}, delle x''', x^{V}, delle x', x^{IV}, e delle x'', x^{V}, dovrà ancora la Z' rimanere la medesima alla mutazione in essa delle stesse radici, cioè per la mutazione fra loro delle x'', x^{IV}, e per quella della x''', x^{V}, e per quella delle x' x^{IV}, e per l'altra finalmente delle x'', x^{V}; ma, se questo succede, pei n^{i} 273, 261 deve seguirne il risultato $1° = 25° = 49° = 73° = 97°$. Dunque sarà ancora

$$Z' = Z'' = Z''' = Z^{IV} = Z^{V},$$

il che è impossibile.

Se due o più dei valori della Z vogliansi fra loro uguali per altre permutazioni quali si vogliono diverse dalla precedente; rinnovato l'esposto discorso, pel cit. n° 273 sempre si giunge nella maniera medesima al medesimo assurdo di dover essere

$$Z' = Z'' = Z''' = Z^{IV} = Z^{V}.$$

Dunque sarà impossibile che i 120 valori della supposta Z non siano tutti disuguali fra loro.

278. Pertanto il coefficiente M della nostra $Z^5 - M = 0$ dovrà avere 24 valori tutti differenti, e chiamati questi

$$M_1, \quad M_2, \quad M_3, \quad M_4, \ldots, M_{24},$$

i 120 valori della Z saranno contenuti nelle 24 equazioni

$$Z^5 - M_1 = 0, \qquad Z^5 - M_2 = 0, \qquad Z^5 - M_3 = 0, \ldots, Z^5 - M_{24} = 0.$$

279. Essendo

$$Z', \quad Z'', \quad Z''', \quad Z^{IV}, \quad Z^{V}$$

le radici della

$$Z^5 - M_1 = 0,$$

poichè abbiamo

$$Z'^5 = M_1, \qquad Z''^5 = M_1, \qquad Z'''^5 = M_1, \qquad Z^{IV\,5} = M_1, \qquad Z^{V\,5} = M_1,$$

e poichè pel n° 277 dalla Tav. VI abbiamo

$$Z' = \text{ris.}^{\circ}\ 1, \qquad Z'' = 25°, \qquad Z''' = 49°, \qquad Z^{IV} = 73°, \qquad Z^{V} = 97°,$$

sarà ancora

$$M_1 = (\text{ris.}^{\circ}\ 1°)^5 = (25°)^5 = (49°)^5 = (73°)^5 = (97°)^5;$$

e quindi si vede, che anche la M è una funzione delle

$$x', \quad x'', \quad x''', \quad x^{IV}, \quad x^{V},$$

ma una funzione tale che non cambia valore per la permutazione da cui produconsi nella nostra Tavola i risultati della prima fila. Corrispondendo adunque i 24 valori diversi della M ai 24 della prima colonna verticale, sarà

$$M_1 = (\text{ris.}^{\circ}\ 1°)^5, \qquad M_2 = (2°)^5, \qquad M_3 = (3°)^5, \ldots, M_{24} = (24°)^5,$$

280. *Trasformata pel* n° 276 *la*

$$(Q) \qquad x^5 + Ax^4 + Bx^3 + Cx^2 + Dx + E = 0$$

Digitized by Google

nella equazione di secondo grado

$$y^2 + my + n = 0,$$

cercare, dipendentemente da questa, se è possibile la soluzione della proposta (*Q*).

Con lo scioglimento di questa trasformata ottenuti i valori delle sue radici, che chiamerò y', y'', non avremo, onde risolvere il nostro problema, che a cercare dipendentemente da essi i valori delle

$$x', \quad x'', \quad x''', \quad x^{IV}, \quad x^{V},$$

ma, per quanto si disse nel n° 230, ciò non può eseguirsi immediatamente; converrà dunque procurare di farlo mediatamente, cercando in primo luogo, come nel cit. n° 230, dipendentemente da y', oppure da y'' il coefficiente M di un'equazione

$$Z^5 - M = 0,$$

e poscia dai cinque valori

$$Z', \quad Z'', \quad Z''', \quad Z^{IV}, \quad Z^{V}$$

deducendo in corrispondenza i cinque

$$x', \quad x'', \quad x''', \quad x^{IV}, \quad x^{V}.$$

Ora, per la ipotesi, i 120 valori della y riduconsi a due soli

$$y' = 1^{\circ} = f(x')(x'')(x''')(x^{IV})(x^{V}),$$

$$y'' = 2^{\circ} = f(x'')(x')(x''')(x^{IV})(x^{V})$$

(3°, 4°, 5°, 6°, 9°, n° 271), e pel n° 278 il coefficiente M ha necessariamente 24 valori diversi, corrispondenti ai 24 della prima colonna verticale nella nostra Tavola (n° 279). Dunque per la determinazione di questo coefficiente M, dipendentemente dalle quantità y', y'', dovremo pel n° 147 cadere in due equazioni del 12° grado, la prima delle quali pel cit. n° 147 avrà per radici i valori

$$M_1, \quad M_3, \quad M_4, \quad M_{17}, \quad M_{21}, \quad M_{19}, \quad M_{12}, \quad M_{10}, \quad M_{14}, \quad M_8, \quad M_{24}, \quad M_{22},$$

e la seconda i valori

$$M_2, \quad M_5, \quad M_6, \quad M_{23}, \quad M_{15}, \quad M_{13}, \quad M_9, \quad M_7, \quad M_{20}, \quad M_{11}, \quad M_{18}, \quad M_{16}.$$

Prendiamo a considerare più particolarmente i 12 valori della M dipendentemente da y, e sia

$$M^{12} + aM^{11} + bM^{10} + cM^9 + \cdots = 0 \qquad \text{(IX)}$$

l'equazione che li contiene.

Essendo necessario il conoscere almeno uno dei valori della M, ed essendoci ignota la soluzione generale di un'equazione del 12° grado, converrà, pel nostro intento, che la M sia una funzione delle

$$x', \quad x'', \quad x''', \quad x^{IV}, \quad x^{V}$$

tale che la (IX) sia riducibile ad altra equazione che io sappia sciogliere e dalle cui radici sappia poi ricavare le radici sue.

1° *Supponiamo pertanto essa M tale, che la equazione* (IX) *sia riducibile ad un'al-*

Digitized by Google

tra di quarto grado, per esempio, alla

$$N^4 + pN^3 + qN^2 + rN + s = 0. \tag{X}$$

In tal caso, determinate colla soluzione di questa le radici

$$N', \quad N'', \quad N''', \quad N^{iv},$$

dai valori di esse cercherò separatamente le radici della (IX), e queste troverò, pel n° 147 condotto a quattro equazioni tutte del terzo grado.

Ma è egli possibile che la nostra (IX) sia riducibile ad un'equazione (X)? Affine di ciò conoscere, osservo che, dipendendo i valori della M in (IX) da y', dalla stessa y' dipenderanno ancora i valori della N, e quindi da questa funzione invece dei valori della M potremo ricavare immediatamente quei della N. Ora quattro di questi valori dovendosi dedurre da y', e quattro altri da y'', essi sono otto di numero; dunque la N è una funzione delle

$$x', \quad x'', \quad x''', \quad x^{iv}, \quad x^v$$

tale che ha il suo grado di uguaglianza

$$p = \frac{120}{8} = 15,$$

e ciò mentre i suoi otto valori siano disuguali fra loro, ed ha poi lo stesso grado

$$p = \frac{120}{4} = 30,$$

allor quando si voglia che i suoi primi quattro valori uguagliansi ai secondi: ma sì l'uno, che l'altro di questi valori della p sono impossibili (n° 275). Dunque sarà ancora impossibile una funzione delle

$$x', \quad x'', \quad x''', \quad x^{iv}, \quad x^v,$$

quale noi la vogliamo, e però impossibile che possa la (IX) ridursi ad un'equazione (X) di quarto grado.

2° *Se non ad una del quarto, vediamo se possa la nostra* (IX) *ridursi ad una equazione del terzo grado,* cioè alla

$$N^3 + pN^2 + qN + r = 0, \tag{XI}$$

venendo qui pure la N ad esser tale che tre dei suoi valori dipendono da y' e tre da y'', o i primi tre fra questi voglionsi corrispondentemente uguali ai secondi tre, o no. Nel primo di questi casi ne verrebbe

$$p = \frac{120}{3} = 40;$$

ma ciò pel n° 275 non può succedere, dunque se è possibile la riduzione della (IX) alla (XI), dovranno i primi tre valori della N essere disuguali dai secondi tre, e dovrà per conseguenza riescire

$$p = \frac{120}{6} = 20.$$

Digitized by Google

Ora pel n° 271 è bensì possibile un tal valore della p, ed è perciò possibile l'esistenza d'un'equazione di sesto grado, da cui dipendano i sei valori della N; ma è egli poi possibile, che tre di questi possansi ricavare da y', e tre da y''?

Supponiamo

$$N = \varphi(x')(x'')(x''')(x^{iv})(x^{v}),$$

e supponiamo nella Tav. VI di cambiare la f in φ, onde abbiansi in essa sott'occhio tutti i risultati che con le solite permutazioni ottengonsi dalla

$$\varphi(x')(x'')(x''')(x^{iv})(x^{v}).$$

Se col mezzo delle y', y'' noi ricercassimo tutti questi risultati, sessanta dei medesimi dovrebbersi ricavare da y', sessanta da y'', e pel n° 279 è chiaro che i primi 60 sarebbero i contenuti nelle fila 1^{a}, 3^{a}, 4^{a}, 17^{a}, 21^{a}, 19^{a}, 12^{a}, 10^{a}, 14^{a}, 8^{a}, 24^{a}, 22^{a}, i secondi 60 quei che esistono nelle fila 2^{a}, 5^{a}, 6^{a}, 23^{a}, 15^{a}, 13^{a}, 9^{a}, 7^{a}, 20^{a}, 11^{a}, 18^{a}, 16^{a}. Rifletto presentemente che, a cagione di $p = 20$, deve la nostra

$$\varphi(x')(x'')(x''')(x^{iv})(x^{v})$$

pel n° 274 esser tale che il 1° dei suoi primi sessanta risultati deve necessariamente restare il medesimo per una permutazione composta, in cui entri una semplice del *primo genere* fra tutte e cinque le

$$x', \quad x'', \quad x''', \quad x^{iv}, \quad x^{v}:$$

ma qualunque siasi una tale permutazione, effettuando questa semplice del *primo genere* su del risultato 1°, e replicandola quanto si può, sappiamo dal 1° del n° 263, che fra i quattro risultati nuovi, che dal 1° quindi provengono (n° 262), non può mai contenersene alcuno degli esistenti nella prima colonna verticale; e lo stesso egualmente succede applicando e ripetendo la permutazione medesima sopra qualunque altro dei valori 2°, 3°, 4°, ..., 24°. Ciò dunque essendo, l'uguaglianza, che per l'esposta permutazione succede fra tutti i risultati della Tav. VI, farà sì, che i primi 60 si ridurranno ai dodici 1°, 3°, 4°, 17°, 21°, 19°, 12°, 10°, 14°, 8°, 24°, 22°, e i secondi 60 corrispondentemente ai dodici 2°, 5°, 6°, 23°, 15°, 13°, 9°, 7°, 20°, 11°, 18°, 16°; ma infine i primi valori della N differenti tra loro devono essere tre soli, che chiamerò N', N'', N''', e i secondi altri tre, che denominerò N^{iv}, N^{v}, N^{vi}. Dunque i primi dodici risultati, a cui ci siamo ridotti, dovranno nuovamente essere fra loro uguali a quattro a quattro, e così uguali a quattro a quattro fra loro i secondi dodici separatamente dai primi. Ora qualunque supposizione si faccia, può ognuno facilmente vedere da sè medesimo non potersi questo giammai ottenere. Dunque non potrà nè pure ottenersi giammai, che i tre valori N', N'', N''' possansi ricavare da y', e i tre N^{iv}, N^{v}, N^{vi} da y'', e quindi, che la (IX) sia riducibile ad una equazione (XI) di terzo grado.

3° *Suppongasi che l'equazione, a cui vogliamo potersi ridurre la* (IX), *sia del grado secondo, e tale sia la*

(XII) $$N^{2} + pN + q = 0.$$

Qui pure o i due valori N', N'' dipendenti da y' suppongonsi disuguali dagli altri N''', N^{iv} dipendenti da y'', o no. Se si volessero disuguali, allora i valori della N

Digitized by Google

sarebbero in numero di quattro, e però ci risulterebbe

$$p = \frac{120}{4} = 30,$$

il che è impossibile (n° 275). Che se si volesse

$$N' = N''', \qquad N'' = N^{IV},$$

in tal caso, essendo due soli i valori della N, dovrà questa funzione essere affatto simile alla y (n° 271). Dunque, dalla y' non potendosi propriamente dedurre che un solo valore della N, dovrà essere $N' = N''$; ma $N' = N'''$, $N'' = N^{IV}$ per la ipotesi; dunque $N' = N'' = N''' = N^{IV}$; e per conseguenza la N non avendo che un solo valore, sarà inutile all'abbassamento della (IX).

4° Potremo da y' dedurre bensì un'equazione di primo grado

$$N + p = 0;$$

ma è chiaro pel n° 147, che neppure da questa ricavasi vantaggio alcuno per lo scioglimento della (IX).

5° Sia la

$$\varphi(x')(x'')(x''')(x^{IV})(x^{V})$$

tale, che il suo valore 1° uguagli il 25° ed il 24°. In questa ipotesi, essendo $p = 10$ (6° n° 271), i valori della N saranno in numero di 12, e sei dei medesimi, cioè i sei

$$1°, 3°, 4°, 17°, 19°, 8°,$$

potranno benissimo ricavarsi da y', e gli altri sei

$$2°, 5°, 6°, 23°, 13°, 11°,$$

da y'', onde la (IX) potrà ridursi ad un'equazione di sesto grado

$$N^6 + pN^5 + qN^4 + \cdots = 0. \tag{XIII}$$

Ora essendoci ignota la soluzione generale di questa (XIII), vediamo se può essere abbassabile ad una terza equazione, di cui conosca la soluzione e dalle radici della quale possa ricavarne le sue. Dipendendo le radici di questa terza equazione dalle radici della (XIII), verranno esse pure a dipendere dalla y'. Ma pei 1°, 2°, 3°, 4° (n° prec.) da questa y' non si può giammai dedurre alcuna equazione o del quarto, o del terzo, o del secondo grado, ed una del primo è inutile. Dunque, non sarà neppure possibile che possiamo abbassare la (XIII) ad una terza equazione opportuna all'intento.

Non potendo pertanto la (IX) abbassarsi che alla (XIII) o ad un'equazione del primo grado, e la soluzione di amendue le (IX) e (XIII) essendoci incognita, ne viene che non potrò giammai determinare alcuno dei valori della M nella $Z^5 - M = 0$ e, per conseguenza, che mi sarà impossibile la determinazione delle

$$x', \quad x'', \quad x''', \quad x^{IV}, \quad x^{V},$$

e quindi la soluzione della (Q) dipendentemente dalla

$$y^2 + my + n = 0.$$

Digitized by Google

281. Quantunque non possa la (IX) venir trasformata in un'altra equazione opportuna, pure potrebbe sembrare a taluno potersi essa formare in maniera, che fosse spezzabile in fattori, dai quali poi fosse determinabile qualcuno dei valori della M; ma riflettiamo che i coefficienti di questi fattori dovrebbero pel n° 252 dipendere da delle equazioni le quali sarebbero tante trasformate della (IX); dunque su di esse dovendo applicarsi quanto si è detto nel n° 253 prec., ne viene che non sarà neppure possibile la determinazione degli accennati fattori.

282. *Non sapendosi dalla y' ricavare il valore della M coefficiente della*

$$Z^5 - M = 0,$$

vediamo se mai potesse determinarsi dalla stessa y' un'altra equazione

$$Z^5 + PZ^4 + QZ^3 + RZ^2 + SZ + T = 0 \tag{XIV}$$

di forma tale, che sappia risolversi indipendentemente dalla soluzione generale della (Q), e pel cui mezzo possiamo per conseguenza determinar le radici

$$x', \quad x'', \quad x''', \quad x^{IV}, \quad x^{V}.$$

O si vuole che il coefficiente P dipendente da y' abbia un solo valore, o si vuole che ne abbia più di uno. Nel primo di questi casi essendo la (XIV) di forma diversa dalla

$$Z^5 - M = 0,$$

e dovendo avere le sue cinque radici tutte fra di lor differenti (n° 230), non potremo pel n° 227 ottenere la sua soluzione, che abbassandola ad altra equazione del quarto, oppure del terzo, ovvero del secondo grado. Supponiamo per ora effettuato un simile abbassamento, e sia perciò la (XIV) ridotta ad una delle tre equazioni

$$\text{(XV)} \qquad \begin{cases} N^4 + pN^3 + qN^2 + rN + s = 0, \\ N^3 + pN^2 + qN + r = 0, \\ N^2 + pN + q = 0. \end{cases}$$

In una qualunque di queste essendo il valor della N funzione della y', sarà essa sempre tale, che potremo col suo mezzo determinare non solo la (XIV), ma pel n° 147 potremo determinare eziandio i valori del coefficiente M nella

$$Z^5 - M = 0.$$

Ora pei 1°, 2°, 3° del n° 280 la determinazione o l'esistenza di una tale equazione è sempre impossibile. Dunque sarà anche impossibile che possiamo dalla y' ritrarre un'equazione (XIV), come l'abbiamo supposta.

Supponiamo, in secondo luogo, che P abbia dipendenti dalla y' più valori. Se si vuole che questo coefficiente abbia un numero di valori < 5, allora, replicando sull'equazione in P corrispondente quanto si è detto su della (XV), verremo alla conclusione medesima.

Che se l'equazione in P è di un grado > 4, concluderemo lo stesso, applicando il discorso medesimo su della trasformata necessaria a farsi onde avere il valore della P. Dunque, etc.

Digitized by Google

283. Che, se la trasformata del n° 280 si volesse del quinto, o del primo grado, allora, onde sciogliere il nostro problema, converrebbe evidentemente nel 1° caso abbassare essa trasformata ad altra di grado inferiore (n^i 227, 277); e nel secondo non potendosi dal valore della y ricavare immediatamente quello della M nella

$$Z^5 - M = 0$$

(n^i 278, 280), converrebbe innalzare tale trasformata ad altra di grado > 1, che io sapessi risolvere, e dalle radici della quale potessi dedurre il valore della M. Ora, per quanto si è dimostrato nei n^i 280, 281, 282, sappiamo che tanto nell'uno che nell'altro di questi casi una trasformata di grado > 1 e < 5 opportuna all'intento non è determinabile. Dunque il problema del n° 280 non sarà risolubile neppure col mezzo delle trasformate che ci siamo ora proposte.

284. In ciascuno dei risultati della Tav. VI immaginiamoci che venga aggiunta la x^{VI}; supponiamo in seguito che sopra tutti i 120 valori, che ne provengono, si eseguisca, come nel n° 268, e si replichi, quanto si può, la permutazione di

$$f(x')(x'')(x''')(x^{IV})(x^{V})(x^{VI})$$

in

$$f(x'')(x''')(x^{IV})(x^{V})(x^{VI})(x').$$

In tal modo è chiaro, che tutte otterremo le $1.2.3.4.5.6 = 720$ permutazioni della

$$y = f(x')(x'')(x''')(x^{IV})(x^{V})(x^{VI}).$$

285. *Volendo trasformare l'equazione generale del sesto grado*

$$(R) \qquad x^6 + Ax^5 + Bx^4 + Cx^3 + Dx^2 + Ex + F = 0$$

in un'equazione di un grado < 5; questa non potrà essere, che del primo o del secondo grado [31].

Chiamata y l'incognita della trasformata, vedesi in primo luogo che pel nostro intento i 720 valori della $y = f(x')(x'')(x''')(x^{IV})(x^{V})(x^{VI})$ devono essere uguali fra loro per due permutazioni semplici entrambe del *primo genere*, l'una fra cinque e l'altra fra sei radici. Per la seconda di queste permutazioni, qualunque essa siasi, i 720 valori della y si ridurranno immediatamente ai 120 della Tav. VI, ma questi, per la permutazione prima, che pel n° 269 posso sempre supporre espressa dall'equazione (VII), riduconsi ai soli 24 della prima colonna. Dunque, acciocchè la nostra trasformata sia di un grado < 5, converrà che questi 24 valori siano tra loro uguali a 6 a 6, o ad 8 ad 8, o a 12 a 12, o tutti insieme. Ora qualunque uguaglianza esista fra due o più degli accennati 24 valori opportuna al caso, combinando questa colle due precedenti sempre risultano questi 24 valori o uguali tutti insieme, o uguali fra loro a 12 a 12 (n° 271). Dunque la y non potrà avere che uno o due valori diversi, e però, etc.

286. *Supposta Z radice della $Z^5 - M = 0$, e funzione delle*

$$x', \quad x'', \quad x''', \quad x^{IV}, \quad x^{V}, \quad x^{VI},$$

la M non potrà avere nè tre, nè quattro soli valori differenti fra loro; imperciocchè, se ciò fosse, esisterebbe contro del n° 285 una trasformata della (R) di un grado terzo,

Digitized by Google

oppur quarto. *Essa M non può avere neppure o un solo o due soli valori disuguali:* perchè altrimenti in amendue questi casi, divenendo la Z una funzione tale che dovrebbe non cambiar di valore ad una permutazione composta di una semplice del *primo genere* fra cinque radici e di un'altra semplice, nel primo caso fra le due x', x'', nel secondo fra le tre x', x'', x''' (n° 271), replicato prima un discorso simile a quello dei 1°, 2° del n° 273 su del risultato 2° nel primo caso, su del 4° nel secondo, e replicato in seguito il raziocinio del n° 277, ne verrebbe $Z' = Z'' = Z''' = Z^{IV} = Z^{V} = Z^{VI}$ contro del n° 199.

287. *Cercasi, se è possibile, la soluzione della* (R) *dipendentemente dalla trasformata*

$$y^2 + my + n = 0$$

(n° 285).

O vorremo dalle due radici

$$y', \quad y''$$

dedurre immediatamente le

$$x', \quad x'', \quad x''', \quad x^{IV}, \quad x^{V}, \quad x^{VI},$$

cioè le tre prime dalla y', le altre tre dalla y''; oppure vorremo dedurle mediatamente, ricavando prima dalle stesse y', y'' il valore del coefficiente M nella

$$Z^6 - M = 0,$$

od il valore dei coefficienti in altra equazione, di cui conoscasi la soluzione e dalle radici della quale sappiansi dedurre le radici della (R).

Ma nel primo caso non essendovi ragione, per cui da una delle y', y'', per esempio dalla y', dipendano piuttosto tre delle

$$x', \quad x'', \quad x''', \quad x^{IV}, \quad x^{V}, \quad x^{VI},$$

che tre altre; nel secondo, in conseguenza del n° prec., avendo luogo i raziocinî dei n^i 280, 281, 282, e perciò non potendosi dipendentemente dalle y', y'' ottenere il valore della M nè quello di altri coefficienti opportuni, ne viene che, dalle supposte radici della trasformata non potremo nè mediatamente, nè immediatamente ottenere il valore delle radici della (R), e però, etc.

288. *Se la trasformata in y si volesse del primo, ovvero del quinto, o del sesto grado, troveremmo allor pure, come nel* n° 283, *essere col suo mezzo impossibile la soluzione della* (R).

289. Proposta un'equazione generale del settimo, o dell'ottavo, etc. grado, è facile avvedersi, che su di esse si applica sempre, e nella maniera medesima, quanto è stato detto e concluso nei n^i 280, 281, 282, 283, 285, 286, 287, 288.

290. *La soluzione algebraica di un'equazione generale di un grado qualunque maggiore del quarto è impossibile.*

Questo teorema non è che una chiara conseguenza dei n^i 227, 241, 255, 276, 280, 283, 285, 287, 288, 289.

291. *È vero essere impossibile in generale la soluzione delle equazioni di grado* > 4 (n° prec.); *ma non è questo già vero in vari casi particolari.* I precedenti discorsi sup-

Digitized by Google

pongono essenzialmente, che le

$$x', \quad x'', \quad x''', \ldots$$

abbiano un valore qualunque, e prescindono totalmente da qualsivoglia rapporto particolare fra loro. Ma se alcuni dei valori della

$$y = f(x')(x'')(x''') \ldots (x^{(m)})$$

sono fra loro uguali, non per la forma della funzione, ma per un valore particolare o per un particolare rapporto delle

$$x', \quad x'', \quad x''', \ldots$$

(n° 95), in allora non avranno più luogo neppure i raziocini dei n^i prec., e potrà perciò darsi benissimo che la data sia risolubile. Inoltre, quantunque sia impossibile l'esatta soluzione generale della nostra equazione, pure potremo sempre aver questa per approssimazione, accostandoci ai veri valori delle radici quanto vogliamo.

Nei Capi che seguono considereremo: primo, i principali casi particolari, in cui le equazioni ammettono soluzione esatta; secondo, esporremo il metodo onde avere per approssimazione in qualunque caso la soluzione della data.

Digitized by Google

CAPO XIV.

DEL MODO DI RITROVARE I FATTORI RAZIONALI DI UNA DATA EQUAZIONE ALGEBRAICA DETERMINATA.

292. *Un'equazione algebraica, determinata, priva del coefficiente del primo termine e avente tutti gli altri coefficienti interi e razionali, non potrà avere giammai per radice una frazione razionale.*

Siano nella

$$(D) \qquad x^m + Ax^{m-1} + Bx^{m-2} + \cdots + V = 0$$

tutti i coefficienti

$$A,\quad B,\quad C,\ \ldots$$

tanti numeri interi e razionali, e sia, se è possibile, radice di questa equazione la frazione razionale $\frac{p}{q}$, che supporremo ridotta ai minimi termini. Sostituita invece della x questa quantità, dovrà essere

$$\frac{p^m}{q^m} + \frac{Ap^{m-1}}{q^{m-1}} + \frac{Bp^{m-2}}{q^{m-2}} + \cdots = 0;$$

e quindi, moltiplicando tutta l'equazione per q^{m-1} e trasportando, avremo

$$\frac{p^m}{q} = -(Ap^{m-1} + Bp^{m-2}q + Cp^{m-3}q^2 + \cdots).$$

Ma questo è un assurdo, poichè, se ciò fosse, ne verrebbe un rotto uguale ad un intero. Dunque, etc.

293. *Se sia α radice razionale della precedente (D), dovrà essere $\frac{V}{\alpha}$ un numero intero e razionale.*

Essendo la V uguale al prodotto di tutte le radici della (D) preso col proprio segno o col segno contrario, sarà esso divisibile esattamente per α; ma essendo α un numero razionale, esser deve anche intero (n° prec.). Dunque tale dovrà essere anche il quoto $\frac{V}{\alpha}$.

294. *Proposta la*

$$(C) \qquad Fx^m + Gx^{m-1} + Hx^{m-2} + \cdots = 0,$$

in cui i coefficienti

$$F,\quad G,\quad H,\ \ldots$$

siano tutti numeri interi e razionali, determinare se essa abbia delle radici razionali, e quali queste siano.

Digitized by Google

Fatto

$$x = \frac{z}{F},$$

riducasi pel n° 85 la nostra (C) all'altra

$$z^m + Az^{m-1} + Bz^{m-2} + \cdots + V = 0,$$

in cui il coefficiente del primo termine sia l'unità, e gli altri $A, B, \ldots, V$ siano tutti numeri interi: in seguito si cerchino tutti i fattori razionali dell'ultimo termine V della trasformata; questi, presi sì positivi che negativi, sostituiscansi successivamente in luogo della z, e veggasi fra essi quali sono quei che fanno verificare simile equazione: supposto che

$$\alpha, \quad \beta, \quad \gamma, \ldots$$

siano i fattori della V che soddisfanno a tal condizione, essi saranno già tutte le radici razionali dell'equazione in z (n° prec.); ma abbiamo

$$x = \frac{z}{F};$$

dunque

$$\frac{\alpha}{F}, \quad \frac{\beta}{F}, \quad \frac{\gamma}{F}, \ldots$$

saranno tutte le radici razionali della data (C).

Che, se nessuno dei fattori della V rende

$$z^m + Az^{m-1} + Bz^{m-2} + \cdots$$

uguale allo zero, tale equazione, e perciò l'equazione data, non potrà in tal caso avere alcuna radice razionale (n° 292).

Se sia $F = 1$, per la soluzione del nostro problema basterà ritrovare tutti i fattori dell'ultimo termine della data (C), sostituire questi in luogo della x, e quelli fra essi che renderanno la $(C) = 0$ saran le radici richieste.

Sia per esempio

$$6x^3 - 23x^2 + 25x - 6 = 0$$

l'equazione data. Suppongo

$$x = \frac{z}{6},$$

sostituisco, e risultami l'equazione

$$z^3 - 23z^2 + 150z - 216 = 0;$$

pongo successivamente in luogo della z i fattori del 216. Ora fra questi trovo che i tre 2, 9, 12 fanno verificare l'equazione in z: dunque le radici della data saranno

$$\frac{z}{6} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}, \qquad \frac{z}{6} = \frac{9}{6} = \frac{3}{2}, \qquad \frac{z}{6} = \frac{12}{6} = 2.$$

295. Abbiasi l'equazione di quarto grado

(I) $$x^4 + Ax^3 + Bx^2 + Cx + V = 0$$

avente i coefficienti tutti numeri interi, e sia α una delle sue radici razionali. Essendo

Digitized by Google

si α che

$$\frac{V}{\alpha} = a$$

numeri interi (n^i 292, 293), pongasi

$$\frac{V}{\alpha} = a,$$

e si sostituisca nella (I), α in luogo della x ed αa in luogo di V; avremo perciò

$$\alpha^4 + A\alpha^3 + B\alpha^2 + C\alpha + a\alpha = 0$$

e quindi, dividendo per α,

$$\alpha^3 + A\alpha^2 + B\alpha + C + a = 0,$$

ossia

$$C + a = -(\alpha^3 + A\alpha^2 + B\alpha).$$

Dividasi di nuovo questo risultato per α, ne verrà

$$\frac{C+a}{\alpha} = -(\alpha^2 + A\alpha + B).$$

Ora il secondo membro di questa equazione è un numero intero: dunque tale dovrà essere anche il primo, e però $C + a$ sarà divisibile esattamente per α. Suppongo pertanto

$$\frac{C+a}{\alpha} = b,$$

sostituisco, e avremo

$$b = -(\alpha^2 + A\alpha + B),$$

ovvero

$$B + b = -(\alpha^2 + A\alpha),$$

e dividendo per α

$$\frac{B+b}{\alpha} = -(\alpha + A).$$

In quest'ultimo risultato, $\alpha + A$ è un numero intero: tale dovendo adunque essere anche $\frac{B+b}{\alpha}$, la quantità $B + b$ dovrà risultare divisibile esattamente per α. Supposto perciò $\frac{B+b}{\alpha} = c$, sostituendo otterremo

$$c = -(\alpha + A),$$

e finalmente

$$\frac{A+c}{\alpha} = -1.$$

Da tutto questo si vede che, se α è radice razionale della (I), dovrà essa dividere esattamente non solo l'ultimo termine V, ma ancora le quantità $C + a$, $B + b$, $A + c$, essendo a, b, c, -1 tutti i successivi quoti che risultano da simili divisioni. Ora questo discorso si applica egualmente ad un'equazione qualunque. Dunque in generale *essendo α radice razionale della*

$$x^m + Ax^{m-1} + Bx^{m-2} + \cdots + Rx^3 + Sx^2 + Tx + V = 0,$$

ritenuto che sia $\frac{V}{\alpha} = a$, $\frac{T+a}{\alpha} = b$, $\frac{S+b}{\alpha} = c$, $\frac{R+c}{\alpha} = d$, ..., tutte queste quan-

Digitized by Google

tità a, b, c, d, ..., saranno tanti numeri interi, e però α *dividerà esattamente l'ultimo termine* V, *la somma del quoto a col coefficiente* T *del penultimo termine, il risultato che si ha unendo insieme il quoziente* b *e il coefficiente* S *del termine antepenultimo, e così di seguito;* onde in generale α *dovrà essere un divisore esatto di ciascun coefficiente della data sommato col quoto della divisione precedente instituita nella esposta maniera, e il quoto finalmente dell'ultima divisione dovrà essere* $= -1$.

Se l'equazione data sia la (C), ed α sia sua radice intera e razionale, tutte si verificheranno le divisioni ora accennate; e dall'ultima soltanto, invece di ottenere il quoto -1, otterremo l'altro $-F$.

296. Un metodo quindi si deduce, elegante e spedito, onde *determinare quei numeri che servono di radici razionali alla data equazione.*

Se i fattori dell'ultimo termine non sono molti nè molto elevati di valore, servendoci della strada del n° 294 potremo, sostituendo ciascuno di essi in luogo della incognita, osservare quali sono quelli che fanno verificare la equazione, e così trovare le radici cercate: ma, se tali fattori sono molti e molto elevati, riuscendo allora questo metodo di sostituzione incomodo troppo e troppo prolisso, si suol piuttosto far ricorso al seguente:

Determinati tutti i fattori dell'ultimo termine, scrivansi questi in una riga sotto l'equazione data, prendendoli sì positivamente che negativamente; dividasi in seguito per ciascuno di essi l'ultimo termine, e i quoti che ne provengono scrivansi in una seconda fila, e questi poi, sommati col coefficiente del penultimo termine, si pongano in una terza sotto i divisori corrispondenti. Ciascuno di questi risultati dividasi allora per quel fattore che gli appartiene; se la divisione non riesce esatta, segno si è che un tal fattore non può essere radice della data (n° 295) *e perciò si trascura, scrivendosi poi i quoti che provengono esatti in una quarta riga in corrispondenza dei propri divisori. Posti inoltre in una quinta i risultati che si hanno unendo questi quozienti col coefficiente del termine antepenultimo, dividansi essi nel modo medesimo pei fattori corrispondenti, e trascurati quelli tra questi fattori che producono una divisione inesatta, scrivansi nel modo istesso di prima in una sesta riga i quozienti che riescono esatti; e ciò per proseguire, come precedentemente, la operazione, la quale si continui sempre in egual maniera, finchè si giunga al coefficiente del secondo termine: e in allora quei quozienti che risulteranno* $= -1$, *se l'equazione data sia la* (D), *ed* $= -F$, *se la data sia la* (C), *dimostreranno che i divisori corrispondenti sono altrettante radici intere della* (C), *e razionali della* (D) (n° 295), *e fuor di queste la nostra equazione non ne potrà aver altre.*

297. Vogliansi per esempio tutte le radici razionali della

$$x^5 - 3x^4 - 4x^3 + 12x^2 + 3x - 9 = 0.$$

Ritrovati tutti i fattori del 9, li scrivo sotto dell'equazione data in (II), prendendoli sì positivamente che negativamente; ciò fatto, divido il termine -9 per ciascheduno di questi fattori; e dispongo i quoti -9, -3, -1, etc. in una seconda riga in corrispondenza de' proprii divisori. Sommo in seguito ciascuno di questi coefficienti col coefficiente 3 del penultimo termine, e scritti i risultati -6, 0, 2, etc. in una terza

Digitized by Google

riga, li divido pei fattori corrispondenti, onde avere i quozienti — 6, 0, etc. che pongo in una quarta fila; quivi vedendosi che i numeri 2, 4 non sono divisibili pei fattori corrispondenti 9, — 9, concludo che tali fattori non ponno esser radici della data, e perciò li trascuro. Seguendo a tener conto degli altri, unisco i numeri — 6, 0, etc. col coefficiente 12 dell'antepenultimo termine; colloco i risultati 6, 12, etc. in una quinta fila; divido questi pei fattori corrispondenti, e trascurato il 10, la cui divisione per 3 è inesatta, pongo in una sesta riga i quoti 6, 4, etc. Aggiunto a ciascuno di questi il coefficiente — 4 del termine $-4x^3$, colloco in una settima i numeri 2, 0, etc. che ne risultano; instituisco su questi ultimi la solita divisione; ai quozienti 2, 0, etc. che provengono e che scrivo in una ottava fila, unisco il coefficiente — 3 del secondo termine; divido i risultati — 1, — 3, etc. già scritti in una nona riga pei rispettivi fattori, e, veggendo finalmente che dalla divisione dei tre fattori 1, 3, — 1 risulta il quoziente — 1, concludo, pel n° 295, che questi fattori sono tutti e tre radici razionali della data:

(II)

$$
\begin{array}{l}
x^5 - 3x^4 - 4x^3 + 12x^2 + 3x - 9 = 0 \\
\quad 1, \quad 3, \quad 9, \quad -1, \quad -3, \quad -9 \\
-9, \quad -3, \quad -1, \quad 9, \quad 3, \quad 1 \\
-6, \quad 0, \quad 2, \quad 12, \quad 6, \quad 4 \\
-6, \quad 0, \quad * \quad -12, \quad -2, \quad * \\
\quad 6, \quad 12, \quad 0, \quad 10, \\
\quad 6, \quad 4, \quad 0, \quad * \\
\quad 2, \quad 0, \quad -4 \\
\quad 2, \quad 0, \quad 4 \\
-1, \quad -3, \quad 1 \\
-1, \quad -1, \quad -1.
\end{array}
$$

298. Determinate pei n^i prec. le radici razionali della data (C), (D), chiamate queste α, β, γ, ... e sottratte dalla x, i binomj $x - \alpha$, $x - \beta$, $x - \gamma$, ..., che ne risultano, non saranno che i fattori razionali della data equazione.

299. *Trovare i fattori razionali di secondo grado della data equazione.*

Dividasi il primo membro della nostra equazione per un fattore di secondo grado

$$x^2 + ax + b,$$

i cui coefficienti a, b siano indeterminati. Eseguendo simile operazione, è chiaro che giungeremo finalmente ad un residuo, in cui la x non monterà che al primo grado, e sarà esso della forma

$$Mx + N,$$

essendo M, N funzioni delle a, b. Se questo residuo indipendentemente dalla x sia uguale allo zero, in allora sarà

$$x^2 + ax + b$$

un fattore esatto del supposto primo membro, e lo dividerà quindi esattamente ogniqualvolta le quantità a, b vengano determinate per modo che abbiasi

$$M = 0, \qquad N = 0.$$

Digitized by Google

Sia il nostro fattore razionale, e siano perciò razionali i due coefficienti a, b: affine di determinarli formo le due equazioni

$$M = 0, \qquad N = 0;$$

elimino da queste la b; cerco, da quella che nasce, i valori razionali di a (n^i 294, 296); sostituisco questi già ottenuti in una delle due $M=0$, $N=0$, onde avere nella stessa maniera i corrispondenti valori razionali di b; e sì gli uni che gli altri sostituiti opportunamente nella supposta quantità

$$x^2 + ax + b$$

tutti ci daranno i fattori razionali di secondo grado richiesti.

300. Data sia ad esempio l'equazione

$$x^4 - x^3 - 9x^2 - 3x - 36 = 0.$$

Instituita la divisione di questa pel trinomio

$$x^2 + ax + b,$$

e giunti al residuo

$$(2ab + b - 3 + 9a - a^2 - a^3)x + (b^2 + 9b - a^2 b - ab - 36),$$

dovendo questo essere uguale allo zero indipendentemente dalla x, suppongo

$$2ab + b - 3 + 9a - a^2 - a^3 = 0, \qquad b^2 + 9b - a^2 b - ab - 36 = 0.$$

Dalla prima di queste equazioni avremo

$$b = \frac{a^3 + a^2 - 9a + 3}{2a + 1},$$

e dalla seconda

$$b^2 - (a^2 + a - 9)b - 36 = 0,$$

ovvero, facendo per semplicità

$$a^2 + a - 9 = p,$$

avremo

$$b = \frac{ap + 3}{2a + 1}, \qquad b^2 - pb - 36 = 0.$$

Sciolgo l'ultima di queste equazioni: avuto il valore

$$b = \frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} + 36},$$

formo l'equazione

$$\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} + 36} = \frac{ap + 3}{2a + 1};$$

tolgo da questa le frazioni e i radicali, sostituisco in luogo della p il suo valore, e otterrò finalmente l'equazione

$$a^6 + 3a^5 - 15a^4 - 35a^3 + 210a^2 + 228a = 0.$$

Ora da questa, col metodo dei n^i 294, 296, ritrovo che la a ha i due valori razionali 0, — 1, e questi sostituiti nella

$$b = \frac{a^3 + a^2 - 9a + 3}{2a + 1}$$

Digitized by Google

ci dànno corrispondentemente

$$b = 3, \qquad b = -12.$$

Dunque, riposti successivamente nel fattore

$$x^2 + ax + b$$

i numeri 0, — 1 in luogo della a, e i numeri 3, — 12 in luogo della b, otterremo le due quantità

$$x^2 + 3, \qquad x^2 - x - 12,$$

le quali saranno due fattori esatti razionali della data.

301. *Determinare i fattori razionali di terzo grado della data* (D).

Si divida il primo membro della (D) pel quadrinomio

$$x^3 + ax^2 + bx + c,$$

i cui coefficienti a, b, c siano da determinarsi. Il residuo della divisione sarà della forma

$$Mx^2 + Nx + P,$$

e se questo indipendentemente dalla x si ridurrà allo zero, il supposto quadrinomio sarà un fattore esatto di terzo grado, fattor razionale, mentre siano razionali i coefficienti a, b, c.

Supponiamo

$$M = 0, \qquad N = 0, \qquad P = 0;$$

col mezzo della eliminazione riducansi queste tre equazioni ad una, in cui non esista che la sola a; ottenuti da questa mediante i n^i 294, 296 i valori razionali di essa a, sostituiscansi successivamente nelle altre, onde abbiansi, come nel n° prec., i valori corrispondenti di b e di c. Se questi si trovano razionali, come razionali si sono supposti i valori della a, la (D) avrà altrettanti fattori razionali di terzo grado, e li avremo con questo metodo determinati.

302. La strada tenuta presentemente è affatto la stessa che quella del n° 299 per la ricerca dei fattori razionali di secondo grado, e questa medesima deve egualmente tenersi nella determinazione dei fattori razionali del quarto, del quinto, etc. grado: supponendo, difatti, uguale allo zero ciascuno dei coefficienti del residuo, vedesi che avremo tante equazioni quanti sono i coefficienti indeterminati del supposto fattore, ed operando perciò come precedentemente, determineremo, mentre esistano, i valori commensurabili di tali coefficienti.

303. Sonovi dei casi particolari, ne' quali il metodo onde determinare i fattori razionali riesce molto più semplice del metodo generale considerato fin ora: tali sono quelle equazioni che andremo considerando presentemente.

304. *Ridotta, come nei n^i 60, 62, la* (D) *alla*

$$mx^{m-1} + (m-1)Ax^{m-2} + (m-2)Bx^{m-3} + \cdots = 0,$$

se la prima di queste equazioni ha un numero p *di radici* $= \alpha$, *la seconda avrà un numero* $p - 1$ *di simili radici* $= \alpha$.

Supposte uguali fra loro le p radici

$$\alpha, \ \beta, \ \gamma, \ \delta, \ \ldots, \ \pi,$$

Digitized by Google

poichè pel n° 60 abbiamo

$$m\alpha^{m-1} + (m-1)A\alpha^{m-2} + (m-2)B\alpha^{m-3} \cdots = (\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)(\alpha-\delta)\ldots,$$

poichè i fattori

$$\alpha-\beta,\quad \alpha-\gamma,\quad \alpha-\delta,\ \ldots,\ \alpha-\pi$$

sono evidentemente di numero $p-1$, e poichè nella nostra ipotesi per ciascuno di questi fattori la quantità

$$m\alpha^{m-1} + (m-1)A\alpha^{m-2} + (m-2)B\alpha^{m-3} + \cdots$$

diventa $= 0$, ne segue chiaramente che la

$$mx^{m-1} + (m-1)Ax^{m-2} + (m-2)Bx^{m-3} + \cdots = 0$$

avrà un numero $p-1$ di radici $= \alpha$.

305. Se la (D) non ha che una sola radice $= \alpha$, la

$$mx^{m-1} + (m-1)Ax^{m-2} + (m-2)Bx^{m-3} + \cdots = 0$$

non ne avrà veruna $= \alpha$.

306. Supposte nuovamente le quantità $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \ldots$ differenti tra loro, se la (D) ha un numero p di radici $= \alpha$, un numero q di radici $= \beta$, un numero r di radici $= \gamma, \ldots$ ed ha le radici $\rho, \sigma, \tau, \ldots$ replicate una volta sola, sarà essa spezzabile in tre fattori razionali, il primo dei quali sarà

$$= (x-\alpha)^{p-1}(x-\beta)^{q-1}(x-\gamma)^{r-1}\ldots,$$

il secondo

$$= (x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)\ldots,$$

e il terzo

$$= (x-\rho)(x-\sigma)(x-\tau)\ldots.$$

Ridotta la (D) alla

$$mx^{m-1} + (m-1)Ax^{m-2} + (m-2)Bx^{m-3} + \cdots = 0,$$

questa ultima equazione non avendo alcuna radice uguale alle quantità $\rho, \sigma, \tau, \ldots$, ne avrà un numero $p-1$ uguali ad α, $q-1$ uguali alla β, $r-1$ uguali alla γ, etc.: dunque, se troveremo il massimo comun divisore tra i due primi membri

$$x^m + Ax^{m-1} + Ax^{m-2} + \cdots,$$

$$mx^{m-1} + (m-1)Ax^{m-2} + (m-2)Bx^{m-3} + \cdots,$$

sarà esso

$$= (x-\alpha)^{p-1}(x-\beta)^{q-1}(x-\gamma)^{r-1}\ldots,$$

e se per questo divideremo il primo membro

$$x^m + Ax^{m-1} + Bx^{m-2} + \cdots,$$

il quoto che ne viene conterrà tutte le radici

$$\alpha,\ \beta,\ \gamma,\ \ldots,\ \rho,\ \sigma,\ \tau,\ \ldots$$

replicate ciascuna una volta sola. Supponiamo

$$(x-\alpha)^{p-1}(x-\beta)^{q-1}(x-\gamma)^{r-1}\cdots = X, \qquad \frac{x^m + Ax^{m-1} + \cdots}{X} = X',$$

Digitized by Google

e cerchisi il massimo comun divisore tra le due quantità X, X'; chiamato questo X'', poichè abbiamo

$$X' = (x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)\dots(x-\rho)(x-\sigma)(x-\tau)\dots,$$

sarà

$$X'' = (x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)(x-\delta)\dots,$$

e supposto finalmente $\frac{X'}{X''} = X'''$, otterremo

$$X''' = (x-\rho)(x-\sigma)(x-\tau)\dots.$$

Ora le tre quantità X, X'', X''' essendosi ricavate dalle

$$x^m + Ax^{m-1} + Bx^{m-2} + \cdots, \qquad mx^{m-1} + (m-1)Ax^{m-2} + \cdots$$

con tante successive divisioni, non ponno che essere razionali, e inoltre il loro prodotto $XX''X'''$ risulta

$$=(x-\alpha)^p(x-\beta)^q(x-\gamma)^r\dots(x-\rho)(x-\sigma)(x-\tau)\cdots = x^m + Ax^{m-1} + Bx^{m-2} + \cdots.$$

Dunque, etc.

307. Dunque, se la data (D) contiene delle radici uguali, potrà sempre spezzarsi nei tre fattori razionali

$$X, \quad X'', \quad X'''$$

con le semplici divisioni (n° prec.), e perciò in un modo molto più semplice dell'accennato nei n^i 298, 299, 301, 302. Inoltre, se sapremo risolvere le equazioni $X''=0$, $X'''=0$, la prima di esse ci darà le radici uguali, e la seconda le disuguali della proposta (D).

308. Sia

$$x^6 - 4x^5 + 8x^4 - 4x^3 - 11x^2 + 24x - 18 = 0$$

l'equazione proposta, in cui vogliasi determinare se abbianvi delle radici eguali e quali esse siano; ridotta perciò tale equazione all'altra

$$6x^5 - 20x^4 + 32x^3 - 12x^2 - 22x + 24 = 0,$$

cerco tra i loro primi membri il massimo comun divisore: ora colla nota operazione troviamo esser questo

$$x^2 - 2x + 3,$$

quantità corrispondente alla X del n° 306; dunque diremo, che la data ha benissimo delle radici uguali, e però, diviso il suo primo membro per X, avremo il quoto

$$x^4 - 2x^3 + x^2 + 4x - 6 = X'$$

(n° 306). Cerco nuovamente il massimo divisor comune fra le quantità X, X', e trovandosi esser questo

$$x^2 - 2x + 3 = X'',$$

formo, e sciolgo, l'equazione

$$x^2 - 2x + 3 = 0;$$

ma da questa abbiamo i due valori

$$x = 1 + \sqrt{-2}, \qquad x = 1 - \sqrt{-2};$$

dunque, giacchè il prodotto XX'' ascende al quarto grado, vedesi pel cit. n° 306 che

Digitized by Google

la data dovrà avere due radici

$$= 1 + \sqrt{-2},$$

ed altre due

$$= 1 - \sqrt{-2}.$$

Affine poi di determinare le radici disuguali, divido X' per X''; e poichè ne risulta il quoto

$$x^2 - 2 = X''',$$

tali radici disuguali saranno le due

$$+\sqrt{2}, \qquad -\sqrt{2}.$$

Da tutto questo finalmente apparisce essere stato il primo membro della proposta spezzato nei tre fattori razionali

$$X = x^2 - 2x + 3, \qquad X'' = x^2 - 2x + 3, \qquad X''' = x^2 - 2.$$

309. *Abbiano le due quantità intere e razionali A, B il massimo comun divisore K; se moltiplicheremo una di queste, per esempio la B, per un numero p primo all'altra A, e in seguito se ne faremo la somma, il risultato $A + pB$ avrà con ciascuna delle A, B lo stesso massimo divisor comune K.*

Che il numero K sia divisor comune delle quantità $A + pB$, A, B, ciò è evidente; che poi sia divisor massimo fra due qualunque di tali quantità, lo conosceremo facilmente dall'osservare che, se ciò si negasse, e si volesse una quantità $f > K$ divisor comune di $A + pB$ e di A, cosicchè si avesse

$$A + pB = fr, \qquad A = fs,$$

sostituendo ne verrebbe

$$fs + pB = fr,$$

e perciò

$$pB = f(r - s);$$

ma il numero p essendo primo ad A, deve esser primo anche ad f; dunque essendo la quantità

$$pB = f(r - s)$$

divisibile esattamente per f, non potrà per questa f essere divisibile, che la B; e perciò le due quantità A, B avrebbero per loro massima misura comune non più K, ma $f > K$; il che è contro la supposizione. Con più semplice raziocinio si vede ancora essere la K divisor comune più grande delle quantità $A + pB$, B.

310. *Se tre, quattro, etc. fossero le quantità intere e razionali A, B, C, ... aventi K per loro massimo comune divisore, e la seconda di esse si moltiplicasse per un numero p, la terza per un numero q, etc. tutti primi ad A; nel modo istesso si dimostra, che il medesimo numero K sarà massimo comun divisore delle quantità $A + pB + qC + \ldots$, A, B, ... insieme considerate, o a tre a tre, o a quattro a quattro, etc. secondo che tre, quattro, etc. erano le quantità date A, B, C, ...*

311. 1° Se nel n° 309 supponiamo $p = 1$, od $= -1$, ne verranno i due risultati

$$A + B, \qquad A - B;$$

Digitized by Google

ciascuno di questi avrà, pel cit. n° 309, con le quantità A, B lo stesso massimo divisor comune K.

2° Supponendo nel n° prec., che tre siano le quantità date, e che p ci esprima una qualunque delle radici cubiche dell'unità, e sia $q=p^2$ (n° 199), è chiaro che, nella ipotesi di A quantità razionale, il risultato

$$A+pB+p^2C$$

avrà con due qualsivogliano delle A, B, C lo stesso K per massima comune misura.

3° Se quattro siano le date A, B, C, D, se la prima fra loro sia razionale, e se i numeri p, p^2, p^3 tutti ci esprimano le radici quarte dell'unità (n° 199), vedremo in egual modo, pel n° 310, che K sarà il più grande divisor comune fra il risultato

$$A+pB+p^2C+p^3D,$$

e tre quali si vogliono delle quantità A, B, C, D. Lo stesso si dice nella supposizione che cinque, sei, etc. siano le quantità date.

312. *Supposto*

$$A+B=a, \qquad A-B=b,$$

determinare il massimo comun divisore fra le due quantità a, b.

Il più grande divisor comune richiesto sarà lo stesso che quello esistente fra le quantità a, $a+b$ (1°, n° 311); ma, essendo K la massima comune misura tra $A+B$, ed A (cit. n° 311), ed essendo

$$A+B=a, \qquad 2A=a+b,$$

vedesi che, se

$$\frac{A+B}{K}=\frac{a}{K}$$

risulta numero pari, allora il massimo comun divisore tra

$$A+B \quad \text{e} \quad 2A,$$

ossia tra a ed $a+b$, diviene $2K$, e resta lo stesso K se

$$\frac{A+B}{K}=\frac{a}{K}$$

risulta numero dispari. Dunque anche il massimo divisor comune tra a e b sarà $2K$ oppur K, secondo che $\frac{a}{K}$ uguaglia un numero pari od un numero dispari.

313. *Attribuito alla* p (2°, n° 311) *il valore*

$$\frac{-1+\sqrt{-3}}{2},$$

determinare il più grande divisor comune fra le tre quantità

$$A+B+C, \qquad A+pB+p^2C, \qquad A+p^2B+p^4C.$$

Prima di procedere a simile determinazione, osservo che il massimo divisor comune fra le tre quantità

$$A, \quad A+B+C, \quad A+pB+p^2C$$

Digitized by Google

esser deve lo stesso K esistente fra le tre A, B, C, e perciò fra le

$$A, \quad B, \quad A + B + C$$

(n° 310): e difatti, se ciò si nega, volendosi per massima comune misura delle esposte tre quantità un numero $f > K$, supposto

$$A = fr, \qquad A + B + C = fs, \qquad A + pB + p^2 C = ft,$$

con la eliminazione delle quantità A, C, otterremo

$$(p^2 - p^4)B = f[p^2 s - t + (1 - p^2)r];$$

onde si vede che la quantità f dovrà dividere esattamente il prodotto $(p^2 - p^4)B$; ma essendo

$$p^2 - p^4 = \pm\sqrt{-3},$$

ed essendo f quantità razionale, perchè divisore esatto della quantità razionale A (n° 310), non può eseguirsi una tal divisione quando non sia divisibile esattamente per la f la quantità B. Dunque, riescendo essa f divisore esatto di tutte e tre le quantità

$$A, \quad B, \quad A + B + C,$$

non sarebbe più loro massimo comun divisore la K, contro della supposizione. Dunque, etc.

Ciò posto, facciamo

$$A + B + C = a, \qquad A + pB + p^2 C = b, \qquad A + p^2 B + p^4 C = c;$$

la massima comune misura fra le a, b, c la stessa sarà, che quella fra le

$$a + b + c, \quad a, \quad b$$

(n° 310); ma essendo

$$a + b + c = 3A,$$

e per quanto si è ora detto, il massimo comun divisore delle quantità A, a, b essendo il numero K, è chiaro che, se i risultati $\frac{a}{K}$, $\frac{b}{K}$ sono amendue multipli del 3, allora il massimo comun divisore delle

$$a + b + c = 3A, \quad a, \quad b$$

diventa $3K$, e rimane il medesimo K se $\frac{a}{K}$, $\frac{b}{K}$ non sono multipli del 3. Dunque, eziandio le quantità a, b, c avranno per massimo comun divisore $3K$, ovvero K, secondo che sono, o no, divisibili per 3 i risultati $\frac{a}{K}$, $\frac{b}{K}$.

314. Se, dato alla p (3°, n° 311) il valore $\sqrt{-1}$ (n° 218), pongasi

$$A + B + C + D = a, \qquad A + pB + p^2 C + p^3 D = b,$$
$$A + p^2 B + p^4 C + p^6 D = c, \qquad A + p^3 B + p^6 C + p^9 D = d,$$

e si domandi in seguito il massimo comun divisore delle quantità a, b, c, d, con un raziocinio perfettamente simile a quello del n° prec. troveremo: esser questo $4K$, se i quoti $\frac{a}{K}$, $\frac{b}{K}$, $\frac{c}{K}$ riescono tutti multipli di 4; essere $2K$, se tali quoti divengono

Digitized by Google

tutti multipli di 2; ed essere finalmente K, se essi medesimi non sono multipli nè del 4, nè del 2. In egual modo, se attribuiscasi alla p il valore di una delle radici quinte della unità diversa dall'unità medesima, e se supponiamo

$$A + B + C + D + E = a,$$
$$A + pB + p^2C + p^3D + p^4E = b,$$
$$A + p^2B + p^4C + p^6D + p^8E = c,$$
$$A + p^3B + p^6C + p^9D + p^{12}E = d,$$
$$A + p^4B + p^8C + p^{12}D + p^{16}E = e,$$

troveremo che il massimo comun divisore delle quantità a, b, c, d, e sarà $5K$, oppure K, secondo che i quozienti

$$\frac{a}{K}, \quad \frac{b}{K}, \quad \frac{c}{K}, \quad \frac{d}{K}$$

sono, o no, divisibili esattamente per 5. Così, dando alla p il valore di una di quelle radici seste dell'unità, che elevate alle successive potenze ci somministrano tutte le radici medesime (n° 206), e chiamando a, b, c, d, e, f i risultati

$$A + B + C + D + E + F, \quad A + pB + p^2C + p^3D + p^4E + p^5F, \quad \ldots,$$

vedremo che la loro massima misura comune deve essere $6K$, ovvero $3K$, oppure $2K$, o semplicemente K, secondo che le quantità

$$\frac{a}{K}, \quad \frac{b}{K}, \quad \frac{c}{K}, \quad \frac{d}{K}, \quad \frac{e}{K}$$

riescono multiple del 6, oppure del 3, oppure del 2, o finalmente di niuno di questi numeri. L'istesso diremo dei casi ulteriori.

315. *Mentre la data* (D) *abbia delle radici uguali e contrarie di segno, sarà essa sempre dotata di un fattore razionale, in cui tutte si conterranno simili radici.*

Poniamo, nella supposta (D), $-x$ in luogo di x; le radici dell'equazione che risulta, e che chiamerò (E), altro non essendo che quelle della data prese con segno contrario, ne viene che, se la (D) ha per radici le quantità

$$+\alpha, \quad -\alpha, \quad +\beta, \quad -\beta, \quad +\gamma, \quad -\gamma, \ldots, \pi, \quad \rho, \ldots,$$

la E avrà per radici le

$$-\alpha, \quad +\alpha, \quad -\beta, \quad +\beta, \quad -\gamma, \quad +\gamma, \ldots, \quad -\pi, \quad -\rho, \ldots,$$

e però sì l'una che l'altra di queste equazioni avranno un comun divisore, il quale sarà

$$(x-\alpha)(x+\alpha)(x-\beta)(x+\beta)(x-\gamma)(x+\gamma)\cdots = (x^2-\alpha^2)(x^2-\beta^2)(x^2-\gamma^2)\ldots.$$

Dunque, se col noto metodo cercherò fra i primi membri delle (D), (E) la massima loro comune misura, essa uguaglierà il prodotto

$$(x^2-\alpha^2)(x^2-\beta^2)(x^2-\gamma^2)\ldots;$$

ma, per essere le (D), (E) razionali, questa loro massima comune misura non può che essere razionale. Dunque, etc.

Digitized by Google

316. *Supposta la* (D) *come nel* n° *prec., determinare il suo fattore*

$$(x^2 - \alpha^2)(x^2 - \beta^2)(x^2 - \gamma^2) \ldots .$$

Avremo pel n° prec. la soluzione di questo problema, trovando attualmente il massimo comun divisore fra i primi membri delle (D), (E). Affine però di facilitare l'operazione, chiamata M la somma di tutti i termini che nella (D) hanno per esponente dei numeri pari, compreso il termine cognito, Nx la somma di tutti i termini di esponente dispari, ne verrà

$$(D) = M + Nx,$$

ed è facile a vedersi che sarà

$$(E) = M - Nx.$$

Ciò posto, facciamo la somma e la sottrazione di queste due quantità, e supponiamo

$$(x^2 - \alpha^2)(x^2 - \beta^2)(x^2 - \gamma^2) \cdots = K;$$

i risultati $2M$, $2Nx$ essendo entrambi divisibili per 2, e non essendo divisibile per 2 la quantità K, pel n° 312 essi due risultati $2M$, $2Nx$ avranno il massimo comun divisore $2K$, e quindi K lo sarà dei due M, Nx. Ciò dunque essendo, se nella data (D) raccoglierò da una parte tutti i termini di esponente pari, e dall'altra quelli tutti di esponente dispari, e se fra queste due somme troverò il più grande comun divisore, altro esso non sarà che il fattor domandato.

Sia per esempio

$$(D) = x^7 + 3x^6 - 3x^5 - 9x^4 + 4x + 12 = 0.$$

Avendosi

$$M = 3x^6 - 9x^4 + 12, \qquad Nx = x^7 - 3x^5 + 4x,$$

cerco il massimo divisor comune fra tali due quantità, e trovando esser questo

$$x^6 - 3x^4 + 4,$$

sarà esso il fattore in cui tutte contengonsi le radici della (D) uguali fra loro e contrarie di segno.

317. *Se la data* (D) *contenga un fattore*

$$K = (x^3 - \alpha^3)(x^3 - \beta^3)(x^3 - \gamma^3) \ldots ,$$

sarà questo sempre razionale e determinabile con un metodo più semplice dell'accennato nei n^i 301, 302.

Chiamata, nella (D), M la somma di tutti i termini ne' quali la x ha per esponenti dei numeri multipli di 3, compreso il termine cognito; chiamato Nx l'aggregato di quei termini, ne' quali divisi per x l'incognita monta ad un grado multiplo di 3; e chiamata Px^2 la somma di tutti i termini, ne' quali la x è dotata di esponente multiplo di 3, mentre vengan divisi per x^2, riduciamo così la nostra equazione all'espressione

$$M + Nx + Px^2 = 0,$$

e sia quindi

$$M+Nx+Px^2=(x^3-\alpha^3)(x^3-\beta^3)(x^3-\gamma^3)\ldots(x-\pi)(x-\rho)\cdots=K(x-\pi)(x-\rho)\ldots .$$

Ciò fatto, pongansi successivamente in luogo della x le quantità px, p^2x, essendo p,

Digitized by Google

p^2, 1 le tre radici cubiche della unità: per simile sostituzione restando affatto le stesse le quantità M, N, P, K, la precedente

$$M + Nx + Px^2 = K(x - \pi)(x - \rho) \ldots$$

si cambierà nelle

$$M + pNx + p^2Px^2 = K(px - \pi)(px - \rho) \ldots,$$
$$M + p^2Nx + p^4Px^2 = K(p^2x - \pi)(p^2x - \rho) \ldots,$$

e fra tutti e tre questi risultati vedesi che esisterà come massimo comun divisore la quantità K. Ora sommiamo insieme per tre volte i tre primi membri

$$M + Nx + Px^2, \qquad M + pNx + p^2Px^2, \qquad M + p^2Nx + p^4Px^2,$$

prendendoli prima semplicemente come si trovano, poscia moltiplicando il secondo per p^2 e il terzo per p^4, e finalmente moltiplicando il secondo per p e il terzo per p^2; e otterremo con ciò i tre risultati $3M$, $3Nx$, $3Px^2$. Ma essendo essi moltiplicati per 3, e non essendo per 3 divisibile K, il loro massimo comun divisore viene ad essere $3K$ (n° 313); dunque K lo sarà dei tre M, Nx, Px^2. Ora, queste tre quantità M, Nx, Px^2 sono razionali: tale dunque sarà anche K, e sarà esso determinabile col metodo di trovare il massimo comun divisore, metodo assai più semplice degli accennati nei n^i 301, 302.

318. Supposte in generale

$$p, \quad p^2, \quad p^3, \quad p^4, \ldots, p^{n-1}$$

tutte le radici n^{esime} della unità (n^i 199, 206), sia

$$K = (x^n - \alpha^n)(x^n - \beta^n)(x^n - \gamma^n) \ldots,$$

e sia la data

$$(D) = (x^n - \alpha^n)(x^n - \beta^n)(x^n - \gamma^n) \ldots (x - \pi)(x - \rho) \cdots = K(x - \pi)(x - \rho) \cdots = 0.$$

Ridotta questa alla forma

$$M + Nx + Px^2 + Qx^3 + \cdots + Tx^{n-1} = 0,$$

col supporre che M rappresenti la somma di tutti i termini, nei quali la x sale ad un grado multiplo di n compreso il termine cognito; che Nx esprima la somma di tutti i termini che hanno l'esponente multiplo di n, mentre vengan divisi per x; che Px^2 sia l'aggregato di que' termini, che divisi per x^2 restano di esponente multiplo di n, e così di seguito; si scrivano successivamente in luogo della x le quantità

$$px, \quad p^2x, \quad p^3x, \ldots, p^{n-1}x.$$

Restando perciò le medesime le quantità

$$K, \quad M, \quad N, \quad P, \quad Q, \ldots, T,$$

otterremo

$$\begin{aligned}
&M + Nx + Px^2 + Qx^3 + \cdots + Tx^{n-1} = K(x - \pi)(x - \rho) \ldots,\\
&M + pNx + p^2Px^2 + p^3Qx^3 + \cdots + p^{n-1}Tx^{n-1} = K(px - \pi)(px - \rho) \ldots,\\
&M + p^2Nx + p^4Px^2 + p^6Qx^3 + \cdots + p^{2n-2}Tx^{n-1} = K(p^2x - \pi)(p^2x - \rho) \ldots,\\
&M + p^3Nx + p^6Px^2 + p^9Qx^3 + \cdots + p^{3n-3}Tx^{n-1} = K(p^3x - \pi)(p^3x - \rho) \ldots,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,
\end{aligned}$$

Digitized by Google

i quali tutti avranno il massimo comun divisore K. Sommiamoli ora per un numero n di volte, col prenderli primieramente nello stato in cui si trovano; moltiplicando poscia il secondo risultato per p^{n-1}, il terzo per p^{2n-2}, il quarto per p^{3n-3}, etc.; in terzo luogo moltiplicando il risultato secondo per p^{n-2}, il terzo per p^{2n-4}, il quarto per p^{3n-6}, etc.; moltiplicando in quarto luogo questi risultati successivi per p^{n-3}, p^{2n-6}, p^{3n-9}, etc.; e così in progresso. Coll'operare in tal modo è chiaro che ne verranno i nuovi n risultati nM, nNx, nPx^2, nQx^3, ..., nTx^{n-1}, i quali, essendo tutti divisibili per n, avranno per loro massima comune misura la quantità nK (n° 314); e però K sarà massimo comun divisore delle quantità M, Nx, Px^2, Qx^3, ..., Tx^{n-1}. Ma queste tutte sono razionali; dunque anche K sarà razionale, e sarà sempre determinabile col metodo di trovare il massimo comun divisore fra più quantità date: onde qualunque siasi la n, potremo dire che avrà luogo sempre il teorema del n° 317.

319 Col metodo dei n^i 316, 317, 318 vengonsi a determinare in una equazione data i fattori razionali della forma

$$x^{hn} + ax^{(h-1)n} + bx^{(h-2)n} + cx^{(h-3)n} + \cdots.$$

Imperciocchè, supposte di numero h le quantità

$$x^n - \alpha^n, \qquad x^n - \beta^n, \qquad x^n - \gamma^n, \quad \ldots,$$

dovrà essere il prodotto

$$K = (x^n - \alpha^n)(x^n - \beta^n)(x^n - \gamma^n) \cdots = x^{hn} + ax^{(h-1)n} + bx^{(h-2)n} + \cdots.$$

Nel n° 316, ove $n = 2$, resta determinato un fattore della forma

$$x^{2h} + ax^{2(h-1)} + bx^{2(h-2)} + \cdots;$$

e nel n° 317, ove $n = 3$, ne resta determinato un altro della forma

$$x^{3h} + ax^{3(h-1)} + bx^{3(h-2)} + \cdots.$$

Nell'equazione

$$x^{15} - 2x^{12} + 3x^{11} - 6x^8 - 2x^7 + 4x^4 + 3x^3 - 6 = 0,$$

e servendoci del metodo accennato, troveremo il fattore

$$x^{12} + 3x^8 - 2x^4 + 3,$$

in cui sarà $n = 4$, $h = 3$.

Digitized by Google

CAPO XV [32].

RIFLESSIONI GENERALI INTORNO ALLE EQUAZIONI ALGEBRAICHE DETERMINATE RIDUCIBILI AD ALTRE DI GRADO INFERIORE.

320. Abbiamo nel n° 291 accennato che una data equazione, quantunque di grado > 4, può in varii casi particolari ammettere soluzione, quando cioè, per valori o per rapporti particolari fra alcune o tutte le radici, può essa ridursi ad altra di grado < 5, dalle radici della quale possansi poi ricavare le radici della proposta. Ora, affine di scoprire quali siano questi casi, andremo prima considerando nel Capo presente in generale i casi, nei quali una data equazione è capace di abbassamento, indicandone insieme il metodo generale onde ottenerlo. Nel Capo poi che segue, esporremo alcune determinate equazioni, le quali possonsi attualmente abbassare di grado con metodi particolari.

321. Supponiamo pertanto la data (D) tale, che fra un numero λ di sue radici esista un certo qualunque siasi rapporto particolare. Conosciutosi questo o dalla forma della equazione, o dalla natura del problema, o in qualunque altra maniera: se cercheremo di esprimerlo, è chiaro che ci condurrà ad un'equazione fra le supposte λ radici, che potrò rappresentare con la (S)

$$(S) \qquad f(x')(x'')(x''') \ldots (x^{(\lambda)}) = K,$$

essendo K una quantità cognita, oppure zero.

Nel caso, per esempio, del n° 315, supposto $\alpha = x'$, $-\alpha = x''$, le due radici x', x'' hanno un tal rapporto particolare fra loro, che da esso risulta

$$x' + x'' = 0.$$

Nel caso del n° 317, fatto

$$\alpha = x', \qquad p\alpha = x'', \qquad p^2\alpha = x''',$$

ne viene

$$x' + x'' + x''' = 0.$$

322. *Supposta la precedente equazione (S) razionale, se la funzione*

$$f(x')(x'')(x''') \ldots (x^{(\lambda)})$$

cangia sempre di valore a qualunque permutazione fra le sue radici, io dico che, in tale supposizione, le radici

$$x', \quad x'', \quad x''', \ldots, x^{(\lambda)}$$

dovranno tutte essere razionali.

Digitized by Google

A cagione delle condizioni supposte, dipendentemente dal valore K già cognito (n° prec.) potremo determinare pei n^{i} 166, 164, 144 ciascuna delle x', x'', x''', ..., $x^{(\lambda)}$ col mezzo di tante equazioni tutte di primo grado, e però razionalmente. Ma K, per la ipotesi, è quantità razionale; dunque anche le nostre λ radici saranno tutte razionali. C. D. D.

323. Se le

$$x', \quad x'', \quad x''', \ldots, x^{(\lambda)}$$

sono commensurabili, tale sarà pur anche il prodotto

$$(x - x')(x - x'')(x - x''') \ldots (x - x^{(\lambda)}),$$

che porremo nella forma

$$(I) \qquad x^{\lambda} + a x^{\lambda-1} + b x^{\lambda-2} + c x^{\lambda-3} + \cdots;$$

e quindi la (D) avrà nella nostra ipotesi un fattore razionale del grado λ.

Ma un simile fattore, allorchè esiste, è sempre determinabile (n° 302); e, se per esso già ritrovato dividasi il primo membro della (D), viene questa a ridursi al grado $m - \lambda$.

Dunque, nella ipotesi del n° prec., sarà la (D) un'equazione sempre riducibile a grado inferiore.

Nell'equazione

$$x^5 - 3x^4 - 4x^3 + 12x^2 + 3x - 9 = 0$$

supposta ad esempio nel n° 297, avendosi

$$\frac{x' - x'''}{x''} = \frac{2}{3},$$

si sono ritrovati i tre fattori razionali

$$x - 1, \qquad x - 3, \qquad x + 1,$$

e però tale equazione divisa pel prodotto

$$(x - 1)(x - 3)(x + 1)$$

riducesi alla

$$x^2 - 3 = 0.$$

324. *Se la nostra equazione di relazione (S) sia tale, che resti la medesima pel cangiamento reciproco di due qualunque delle radici, per esempio di x' in x'', e varii alle altre permutazioni, cosicchè divenga della forma*

$$f(x', x'')(x''') \ldots (x^{(\lambda)}) = K,$$

in allora la determinazione delle

$$x''', \quad x^{IV}, \ldots, x^{(\lambda)}$$

dipenderà, come nel caso precedente, da altrettante equazioni razionali tutte del primo grado; ma la determinazione delle x', x'' dipenderà da un'equazione razionale del grado secondo (n° 147), onde la (D), oltre i fattori razionali di primo grado

$$x - x''', \qquad x - x^{IV}, \ldots, x - x^{(\lambda)},$$

Digitized by Google

un altro ne conterrà,

$$x^2 + ax + b,$$

razionale e del grado secondo (cit. n° 147).

Abbiasi per esempio la

$$x^6 - 4x^5 - x^4 + 13x^3 + 15x^2 - 4x - 10 = 0,$$

in cui d'altronde si sappia essere

$$x' + x'' - x''' = 7.$$

Poichè questa equazione di relazione è della forma

$$f(x', x'')(x''') = 7,$$

la data dovrà aver due fattori razionali, uno del primo e l'altro del secondo grado; e difatti, cercati questi coi metodi dei n^i 296, 299, li troveremo essere i due

$$x + 1, \qquad x^2 - 6x + 10,$$

dal primo dei quali ricavasi

$$x''' = -1,$$

dal secondo

$$x' = 3 + \sqrt{-1}, \qquad x'' = 3 - \sqrt{-1};$$

e però

$$x' + x'' - x''' = 7.$$

325. 1° Sia la (S) della forma

$$f(x', x'', x''')(x^{IV}) \ldots (x^{(\lambda)}) = K,$$

cosicchè mantenga lo stesso valore al cangiarsi fra loro delle x', x'', x'''. Dipendendo in questo caso la determinazione delle

$$x', \quad x'', \quad x'''$$

da un'equazione razionale della forma

$$x^3 + ax^2 + bx + c = 0$$

(n° 147), la (D) conterrà i fattori razionali di primo grado

$$x - x^{IV}, \quad x - x^{V}, \ldots, x - x^{(\lambda)},$$

ed un altro ne conterrà di terzo.

2° Se

$$f(x', x'', x''', x^{IV})(x^{V}) \ldots (x^{(\lambda)}) = K$$

sia l'equazione di relazione, la (D), oltre dei soliti fattori di primo, sarà dotata di un altro fattore razionale di quarto grado; e così in progresso.

3° Che se finalmente abbiamo la (S) della forma

$$f(x', x'', x''', x^{IV}, \ldots, x^{(\lambda)}) = K,$$

le

$$x', \quad x'', \quad x''', \ldots, x^{(\lambda)}$$

saranno tutte radici di una sola equazione razionale

$$x^\lambda + ax^{\lambda-1} + bx^{\lambda-2} + \cdots = 0;$$

e però la (D) avrà un solo fattore commensurabile del grado λ.

Digitized by Google

326. Poichè in tutti questi casi il fattore (I) risulta razionale, replicato quanto si disse nel n° 323, vedesi che per esso la (*D*) sarà sempre abbassabile di grado. Merita però qualche riflessione il caso di $\lambda = m$: imperciocchè, se questo succeda, la

$$x^{\lambda} + ax^{\lambda-1} + bx^{\lambda-2} + \cdots = 0$$

venendo ad aver per radici tutte le radici della data, non potrà che essere identica affatto con essa; e perciò la divisione del n° 323 non potrà produrci l'abbassamento accennato, risultando

$$\frac{x^m + Ax^{m-1} + Bx^{m-2} + \cdots}{x^{\lambda} + ax^{\lambda-1} + bx^{\lambda-2} + \cdots} = 1.$$

Ora, nel caso del n° 324 e nel 1°, 2° del n° 325 non solo è razionale la quantità (I), ma essa stessa è dotata di fattori parimenti razionali; dunque, ritenuto $\lambda = m$, se la (*D*) non è riducibile per mezzo del fattore (I), lo sarà ciò nonostante per mezzo dei fattori razionali di esso (I); onde, se l'equazione di relazione sia

$$f(x')(x'')(x''') \ldots (x^{(m)}) = K,$$

oppure

$$f(x', x'')(x''')(x^{IV})(x^{V}) \ldots (x^{(m)}) = K,$$

ovvero

$$f(x', x'', x''')(^{IV})(x^{V}) \ldots (x^{(m)}) = K,$$

$$f(x', x'', x''', x^{IV}) \ldots (x^{(m)}) = K,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

la supposta (*D*) potrà anche allora abbassarsi di grado.

Lo stesso non può dirsi nel caso terzo del n° 325; imperciocchè in allora la quantità (I) non ha dipendentemente dalla supposta equazione di relazione fattore alcuno razionale. Dunque se, essendo $\lambda = m$, l'equazione di relazione divenga

$$f(x', x'', x''', x^{IV}, x^{V}, \ldots, x^{(m)}) = K,$$

la (*D*) non potrà giammai per suo mezzo ridursi a grado inferiore. Da ciò è che le proprietà generali dei coefficienti esposte nel Cap. 2° per sè nulla giovano ad abbassare di grado l'equazione proposta.

327. Supponiamo la (*S*) quale si suppose nel n° 322, e tale, inoltre, che non cambi di valore per la sostituzione in luogo della x' di un'altra radice diversa dalle

$$x', \quad x'', \quad x''', \ldots, x^{(\lambda)},$$

che chiameremo $x^{(\lambda+1)}$. In questa ipotesi, potremo bensì determinare tutte le radici x'', x''', $\ldots$, $x^{(\lambda)}$ col mezzo di tante equazioni razionali di primo grado, ma la determinazione della x' vedesi, pel n° 147, che dipenderà da un'equazione razionale del grado secondo. Così, se la funzione supposta conservi il proprio valore non solo per la sostituzione invece della x' della $x^{(\lambda+1)}$, ma anche per quella delle radici

$$x^{(2\lambda+1)}, \quad x^{(3\lambda+1)}, \ldots, x^{(\rho\lambda+1)},$$

le

$$x', \quad x^{(\lambda+1)}, \quad x^{(2\lambda+1)}, \quad x^{(3\lambda+1)}, \ldots, x^{(\rho\lambda+1)}$$

andranno necessariamente collegate insieme in un'equazione razionale di tanto grado quante sono le x', $x^{(\lambda+1)}$, $\ldots$, cioè del grado $\rho + 1$.

Digitized by Google

328. Quello che è stato detto della x', dicesi egualmente delle x'', x''', ..., $x^{(\lambda)}$. Pertanto, *se il valore della*

$$f(x')(x'')(x''') \dots (x^{(\lambda)})$$

si conserva il medesimo, permutando tutte le

$$x', \quad x'', \quad x''', \dots, x^{(\lambda)}$$

nelle corrispondenti

$$x^{(\lambda+1)}, \quad x^{(\lambda+2)}, \quad x^{(\lambda+3)}, \dots, x^{(2\lambda)};$$

tali radici dipenderanno da λ *equazioni razionali di secondo grado, nelle quali a due a due si conterranno le*

$$x', \quad x^{(\lambda+1)}; \qquad x'', \quad x^{(\lambda+2)}; \qquad x''', \quad x^{(\lambda+3)}; \dots; \qquad x^{(\lambda)}, \quad x^{(2\lambda)}.$$

Egualmente, *se la nostra funzione resti costantemente* $= K$, *sostituendo in luogo della* x' *ciascuna delle*

$$x^{(\lambda+1)}, \quad x^{(2\lambda+1)}, \quad x^{(3\lambda+1)}, \dots, x^{(\rho\lambda+1)};$$

in luogo della x'' *ciascuna delle*

$$x^{(\lambda+2)}, \quad x^{(2\lambda+2)}, \quad x^{(3\lambda+2)}, \dots, x^{(\rho\lambda+2)};$$

in luogo della x''' *ciascuna delle*

$$x^{(\lambda+3)}, \quad x^{(2\lambda+3)}, \quad x^{(3\lambda+3)}, \dots, x^{(\rho\lambda+3)},$$

e così di seguito; la determinazione di queste radici dipenderà da λ *equazioni razionali ciascuna del grado* $\rho + 1$ (n° 147).

329. Sia ora la solita funzione della forma

$$f(x', x'')(x''')(x^{IV}) \dots (x^{(\lambda)}),$$

e conservi essa il primo valore K pel cangiamento di tutte le

$$x', \quad x'', \quad x''', \dots, x^{(\lambda)}$$

nelle corrispondenti

$$x^{(\lambda+1)}, \quad x^{(\lambda+2)}, \quad x^{(\lambda+3)}, \quad x^{(\lambda+4)}, \dots, x^{(2\lambda)}$$

(n° prec.). Si applicherà a questo caso relativamente alle

$$x''', \quad x^{IV}, \dots, x^{(\lambda)}$$

quanto è stato detto nel n° prec., e però le radici

$$x''', \quad x^{(\lambda+3)}; \qquad x^{IV}, \quad x^{(\lambda+4)}; \dots; \qquad x^{(\lambda)}, \quad x^{(2\lambda)}$$

si uniranno a due a due in $\lambda - 2$ equazioni razionali del secondo grado; ma applicandosi alle due radici x', x'' quanto abbiamo detto nel n° 324, vedesi che queste dipenderanno da un'equazione del grado secondo, i coefficienti della quale saranno uguali alle quantità

$$-(x' + x''), \quad x'x''.$$

Ora, conservando la

$$f(x', x'')(x''')(x^{IV}) \dots (x^{(\lambda)}) = K$$

il proprio valore pel cangiamento di x' in $x^{(\lambda+1)}$, e per quello di x'' in $x^{(\lambda+2)}$, se vorremo determinare l'una o l'altra di queste funzioni $-(x' + x'')$, $x'x''$, e in generale una funzione qualunque della forma $f(x', x'')$ mediante la quantità K, è chiaro che

Digitized by Google

dovremo necessariamente cadere in un'equazione generale del secondo grado, le cui due radici saranno

$$f(x', x''), \qquad f(x^{(\lambda+1)}, x^{(\lambda+2)})$$

(n° 147). Se

$$x^2 + ax + b = 0$$

sia l'equazione che ha le radici x', x'', il coefficiente, per esempio, a dipenderà da un'equazione

$$a^2 + \alpha a + \beta = 0,$$

in cui α, β saranno razionali; onde, chiamate a', a'' le radici di quest'ultima equazione, e b', b'' i valori corrispondenti della b, avremo le due equazioni

$$x^2 + a'x + b' = 0, \qquad x^2 + a''x + b'' = 0,$$

la prima delle quali conterrà le radici x', x'', e la seconda le $x^{(\lambda+1)}$, $x^{(\lambda+2)}$.

330. Se la funzione data sia della forma

$$f(x', x'', x''')(x^{IV})(x^{V}) \ldots (x^{(\lambda)}) = K,$$

ritenuta la stessa supposizione del n° prec., pel n° 147 le x', x'', x''' saranno necessariamente radici di un'equazione

$$x^3 + ax^2 + bx + c = 0,$$

in cui ciascuno dei coefficienti a, b, c essendo funzione della forma $f(x', x'', x''')$, dipenderà da un'equazione di secondo grado razionale, di cui

$$f(x', x'', x'''), \qquad f(x^{(\lambda+1)}, x^{(\lambda+2)}, x^{(\lambda+3)})$$

saranno le radici. Così, se la detta funzione non cangi valore per la permutazione fra loro delle x', x'', x''', x^{IV}, oppure delle x', x'', x''', x^{IV}, x^{V}, oppure etc.; la determinazione di queste radici dipenderà corrispondentemente da equazioni del quarto, del quinto, etc. grado, i coefficienti delle quali saranno radici di equazioni razionali del grado secondo.

331. Supponiamo che la

$$f(x', x'')(x''')(x^{IV})(x^{V}) \ldots (x^{(\lambda)})$$

mantenga il proprio valore cangiando le

$$x', \quad x'', \quad x''', \quad x^{IV}, \ldots$$

sì nelle

$$x^{(\lambda+1)}, \quad x^{(\lambda+2)}, \quad x^{(\lambda+3)}, \quad x^{(\lambda+4)}, \ldots,$$

come nelle

$$x^{(2\lambda+1)}, \quad x^{(2\lambda+2)}, \quad x^{(2\lambda+3)}, \quad x^{(2\lambda+4)}, \ldots;$$

applicando a questo caso quanto è stato detto precedentemente, apparisce che le x', x'' saranno radici di un'equazione

$$x^2 + ax + b = 0,$$

di cui i coefficienti a, b dipenderanno da equazioni razionali del terzo grado. Se il valore di detta funzione resti pure lo stesso pel cambiamento delle

$$x', \quad x'', \quad x''', \quad x^{IV}, \ldots$$

nelle corrispondenti

$$x^{(3\lambda+1)}, \quad x^{(3\lambda+2)}, \quad x^{(3\lambda+3)}, \quad x^{(3\lambda+4)}, \ldots;$$

Digitized by Google

nelle

$$x^{(4\lambda+1)},\quad x^{(4\lambda+2)},\quad x^{(4\lambda+3)},\quad x^{(4\lambda+4)},\ \ldots;$$

finalmente nelle

$$x^{(\mu\lambda+1)},\quad x^{(\mu\lambda+2)},\quad x^{(\mu\lambda+3)},\quad x^{(\mu\lambda+4)},\ \ldots;$$

i coefficienti a, b dipenderanno da equazioni razionali del grado $\mu+1$. Che se la funzione supposta abbia la forma

$$f(x',\ x'',\ x''')(x^{iv})(x^{v})\ \ldots\ (x^{(\lambda)}),$$

ovvero la $f(x',\ x'',\ x''',\ x^{iv})(x^{v})\ \ldots\ (x^{(\lambda)})$, e in generale la forma

$$f(x',\ x'',\ x''',\ x^{iv},\ \ldots,\ x^{(\eta)})(x^{(\eta+1)})(x^{(\eta+2)})\ \ldots\ (x^{(\lambda)});$$

la determinazione delle

$$x',\quad x'',\quad x''',\quad x^{iv},\ \ldots$$

dipenderà dalla

$$x^3+ax^2+bx+c=0,$$

oppure dalla

$$x^4+ax^3+bx^2+d=0,$$

e in generale dalla

(II) $$x^{\eta}+ax^{\eta-1}+bx^{\eta-2}+cx^{\eta-3}+\cdots=0,$$

equazioni tutte nelle quali ciascuno dei coefficienti sarà determinabile per un'equazione razionale del grado $\mu+1$.

332. Dalla considerazione degli esposti casi vedesi che nel primo del n° 327 la (D) avrà λ fattori razionali, uno del secondo, e gli altri tutti del primo grado; e nel caso secondo dello stesso numero, tra λ fattori razionali uno ve ne sarà del grado $\rho+1$. Nella ipotesi del n° 328, i λ fattori razionali della (D) saranno tutti o del secondo grado, o del grado $\rho+1$.

Facciamo nel n° 329 il prodotto dei due fattori

$$x^2+a'x+b',\qquad x^2+a''x+b'';$$

i coefficienti del risultato

$$x^4+(a'+a'')x^3+(b'+b''+a'a'')x^2+(a'b''+a''b')x+b'b'',$$

essendo della forma

$$f(x',\ x'',\ x^{(\lambda+1)},\ x^{(\lambda+2)}),$$

saranno tutti determinabili razionalmente dal valore K; e però, divenendo esso risultato razionale, la (D) nella supposizione del n° 329 avrà $\lambda-1$ fattori commensurabili, uno del quarto, e gli altri del grado secondo. Nella stessa maniera si vede che, nella ipotesi del n° 330, la (D) sarà dotata di un fattore razionale del sesto, o dell'ottavo, o del decimo, etc. grado; e nella ipotesi del n° 331 essa (D) conterrà un fattore commensurabile, il cui grado verrà espresso da uno dei numeri

$$2.3,\quad 2(\mu+1),\qquad 3(\mu+1),\qquad 4(\mu+1),\ \ldots,$$

e in generale dal numero $\eta(\mu+1)$.

Dunque, replicandosi qui pure quanto si è accennato nei n^{i} 323, 326, ne viene che la (D), anche nelle supposizioni dei n^{i} 327, 328, 329, 330, 331 potrà con la divisione de' fattori razionali abbassarsi di grado.

Digitized by Google

333. Conviene qui pure, come nel n° 326, eccettuare il caso in cui abbiasi

$$\eta(\mu + 1) = m;$$

imperciocchè in questa supposizione il fattore razionale uguagliando il grado della (D), e contenendo le sue medesime radici, ne uguaglierà perfettamente il suo primo membro, e quindi dalla divisione non potrà succedere abbassamento veruno. Ciò non ostante, poichè ciascun coefficiente della (II) (n° 331), per esempio il coefficiente a, dipende da un'equazione del grado $\mu + 1$, cioè dalla

$$(III) \qquad a^{\mu+1} + \alpha a^{\mu} + \beta a^{\mu-1} + \gamma a^{\mu-2} + \cdots = 0,$$

i cui coefficienti α, β, γ, ..., come si è accennato nel n° 332, sono tutti determinabili razionalmente dal valor K, e poichè a cagione di $\eta(\mu+1)=m$, e di $\eta > 1$, abbiamo $\mu + 1 < m$ (n° 331); ne segue che la (D), quantunque non sia in questo caso abbassabile immediatamente di grado con la divisione, pure sarà sempre riducibile ad un'altra equazione (III) di grado al suo inferiore. Se questa equazione si sappia risolvere, conosciuti i valori delle radici a', a'', a''', ... potremo da essi pel n° 144 determinare i valori corrispondenti di ciascuno dei coefficienti b, c, ..., e chiamati questi b', b'', b''', ..., c', c'', c''', ..., etc. conosceremo i fattori

$$x^{\lambda} + a' x^{\lambda-1} + b' x^{\lambda-2} + c' x^{\lambda-3} + \cdots,$$
$$x^{\lambda} + a'' x^{\lambda-1} + b'' x^{\lambda-2} + c'' x^{\lambda-3} + \cdots,$$
$$x^{\lambda} + a''' x^{\lambda-1} + b''' x^{\lambda-2} + c''' x^{\lambda-3} + \cdots;$$

onde la (D) verrà in tal modo spezzata in tante equazioni di un grado λ inferiore al suo proprio.

334. Se la nostra

$$f(x')(x'')(x''') \ldots (x^{(\lambda)})$$

restasse la medesima per altre permutazioni diverse dalle considerate finora, come se si volesse questa funzione tale, per esempio, che

$$f(x')(x'')(x''') \ldots (x^{(\lambda)}) = f(x'')(x''')(x') \ldots (x^{(\lambda)}),$$

è facile a vedersi che, con dei raziocini simili ai precedenti, verremo a delle simili conseguenze. Resterebbe ora a considerarsi il caso della (S) irrazionale; ma noi faremo ciò nel Capo seguente, dopo avere esposte alcune equazioni particolari capaci di essere abbassate a grado inferiore.

Digitized by Google

CAPO XVI.

DI ALCUNE EQUAZIONI PARTICOLARI RIDUCIBILI AD ALTRE DI GRADO INFERIORE, E DEL CASO DELL'EQUAZIONE DI RELAZIONE (*S*) IRRAZIONALE.

335. Mentre viene proposto un problema, non rare volte accade che esista qualche relazione particolare fra le radici della equazione a cui esso conduce; e in questo caso, conosciuta simile relazione, o per la natura del problema, o per la forma della equazione, potremo sempre ridur questa a grado minore, servendoci o dei suoi fattori razionali, mentre essi esistano, o della soluzione del problema del n° 142. Sonovi però dei casi, nei quali possiamo eseguire tal riduzione con metodi particolari, senza ricorrere al lungo calcolo del suddetto problema; e andremo presentemente a riconoscerne alcuni.

336. Abbiasi l'equazione

$$(T)\quad x^{2n}+Acx^{2n-1}+Bc^2x^{2n-2}+Cc^3x^{2n-3}+\cdots+Cc^{2n-3}x^3+Bc^{2n-2}x^2+Ac^{2n-1}x+c^{2n}=0.$$

Conservando questa la stessa forma mentre sostituiscasi in luogo della x la quantità $\frac{c^2}{x}$, chiamata x' una delle sue radici, sarà pur anche radice la quantità $\frac{c^2}{x'}$, e però, essendo secondo il solito

$$x',\quad x'',\quad x''',\quad x^{IV},\quad \ldots,\quad x^{(2n)}$$

le radici tutte della data, avremo una di queste, per esempio la

$$x''=\frac{c^2}{x'},$$

e però

$$x'x''=c^2.$$

Applicando alle altre radici x''', x^{IV}, ..., $x^{(2n)}$ il discorso ora fatto riguardo alle x', x'', vedremo facilmente che esse tutte vanno ad unirsi a due a due in tante equazioni

$$x'''x^{IV}=c^2,\qquad x^{V}x^{VI}=c^2,\quad \ldots,$$

e per conseguenza che il valore della nostra funzione $x'x''$ resterà lo stesso, non solo pel cangiamento di x' in x'', ma per quello eziandio simultaneo di amendue le x', x'' nelle x''', x^{IV}, o nelle x^{V}, x^{VI}, ... Dunque, pel n° 333, la (T) sarà risolubile nei $\frac{2n}{2}=n$ fattori del secondo grado

$$x^2+a'x+b'=0,\quad x^2+a''x+b''=0,\quad x^2+a'''x+b'''=0,\quad x^2+a^{IV}x+b^{IV}=0,\ \ldots,$$

Digitized by Google

in cui le quantità

$$a', \quad a'', \quad a''', \quad a^{IV}, \ldots$$

saranno radici della

$$a^n + \alpha a^{n-1} + \beta a^{n-2} + \gamma a^{n-3} + \cdots = 0,$$

equazione del grado n, i coefficienti della quale sono determinabili razionalmente mediante il problema del n° 144, noi però affine di ottenerla, piuttosto che del citato problema, faremo uso più semplicemente del metodo che siamo ora per esporre, pel quale converrà premettere la proposizione seguente.

337. Supposto

$$x + \frac{c^2}{x} = y,$$

e supposto r un numero intero e positivo qualunque, avremo

$$\text{(I)} \quad \begin{cases} x^r + \dfrac{c^{2r}}{x^r} = y^r - r c^2 y^{r-2} + \dfrac{r(r-3)}{2} c^4 y^{r-4} \\ - \dfrac{r(r-4)(r-5)}{2.3} c^6 y^{r-6} + \dfrac{r(r-5)(r-6)(r-7)}{2.3.4} c^8 y^{r-8} - \ldots . \end{cases}$$

Elevisi la

$$y = x + \frac{c^2}{x}$$

successivamente a tutte le potenze

$$r, \quad r-2, \quad r-4, \quad r-6, \quad \ldots$$

fino inclusivamente ad $r - r$, se r è pari, e ad $r - (r-1)$, se r è dispari: avremo così tanti risultati, dai quali, congiungendo il primo con l'ultimo termine, il secondo col penultimo, il terzo con l'antepenultimo, etc., risulterà

$$y^r = \left(x^r + \frac{c^{2r}}{x^r}\right) + r c^2 \left(x^{r-2} + \frac{c^{2r-4}}{x^{r-2}}\right) + \frac{r(r-1)}{2} c^4 \left(x^{r-4} + \frac{c^{2r-8}}{x^{r-4}}\right) + \frac{r(r-1)(r-2)}{2.3} c^6 \left(x^{r-6} + \frac{c^{2r-12}}{x^{r-6}}\right) + \cdots$$

$$y^{r-2} = \left(x^{r-2} + \frac{c^{2r-4}}{x^{r-2}}\right) + (r-2) c^2 \left(x^{r-4} + \frac{c^{2r-8}}{x^{r-4}}\right) + \frac{(r-2)(r-3)}{2} c^4 \left(x^{r-6} + \frac{c^{2r-12}}{x^{r-6}}\right) + \cdots$$

$$y^{r-4} = \left(x^{r-4} + \frac{c^{2r-8}}{x^{r-4}}\right) + (r-4) c^2 \left(x^{r-6} + \frac{c^{2r-12}}{x^{r-6}}\right) + \cdots$$

$$y^{r-6} = \left(x^{r-6} + \frac{c^{2r-12}}{x^{r-6}}\right) + \cdots$$

. . . . . .

Si sommino insieme tutte queste equazioni, dopo avere moltiplicata la seconda per una

Digitized by Google

indeterminata A, la terza per una B, la quarta per una C, etc., e avremo

$$y^r + Ay^{r-2} + By^{r-4} + Cy^{r-6} + Dy^{r-8} + \cdots$$
$$= x^r + \frac{c^{2r}}{x^r} + (rc^2 + A)\left(x^{r-2} + \frac{c^{2r-4}}{x^{r-2}}\right)$$
$$+ \left[\frac{r(r-1)}{2}c^4 + (r-2)Ac^2 + B\right]\left(x^{r-4} + \frac{c^{2r-8}}{x^{r-4}}\right)$$
$$+ \left[\frac{r(r-1)(r-2)}{2.3}c^6 + \frac{(r-2)(r-3)}{2}Ac^4 + (r-4)Bc^2 + C\right]\left(x^{r-6} + \frac{c^{2r-12}}{x^{r-6}}\right)$$
$$+ \left[\frac{r(r-1)(r-2)(r-3)}{2.3.4}c^8 + \frac{(r-2)(r-3)(r-4)}{2.3}Ac^6 + \frac{(r-4)(r-5)}{2}Bc^4\right.$$
$$\left. + (r-6)Cc^2 + D\right]\left(x^{r-8} + \frac{c^{2r-16}}{x^{r-8}}\right) + \cdots.$$

Cerchiamo ora di determinare i coefficienti

$$A,\quad B,\quad C,\quad D,\quad \ldots$$

in maniera che nel secondo membro di questa equazione non rimanga che la quantità

$$x^r + \frac{c^{2r}}{x^r};$$

non avremo perciò che a supporre uguali allo zero tutti i coefficienti

$$rc^2 + A,$$
$$\frac{r(r-1)}{2}c^4 + (r-2)Ac^2 + B,$$
$$\frac{r(r-1)(r-2)}{2.3}c^6 + \frac{(r-2)(r-3)}{2}Ac^4 + (r-4)Bc^2 + C, \ldots;$$

e ciò fatto otterremo

$$A = -rc^2,\quad B = \frac{r(r-3)}{2}c^4,\quad C = -\frac{r(r-4)(r-5)}{2.3}c^6,\quad D = \frac{r(r-5)(r-6)(r-7)}{2.3.4}c^8, \ldots;$$

sostituisco questi valori nell'ultima equazione precedente, e risultandone quindi la (I), ne segue che, etc.

Se venga supposto

$$y = x - \frac{c^2}{x},$$

sostituita nella (I) la $-c^2$, in luogo della c^2, ne verrà l'equazione

$$\text{(II)}\quad \begin{cases} x^r + \dfrac{(-c^2)^r}{x^r} = y^r + rc^2y^{r-2} + \dfrac{r(r-3)}{2}c^4y^{r-4} \\ + \dfrac{r(r-4)(r-5)}{2.3}c^6y^{r-6} + \dfrac{r(r-5)(r-6)(r-7)}{2.3.4}c^8y^{r-8} + \cdots. \end{cases}$$

338. Ciò posto, sommiamo nella (T) il primo con l'ultimo termine, il secondo col penultimo, il terzo con l'antepenultimo, e così in progresso, e dividiamo il tutto per x^n; essa (T) diverrà perciò della forma

$$\left(x^n + \frac{c^{2n}}{x^n}\right) + Ac\left(x^{n-1} + \frac{c^{2n-2}}{x^{n-1}}\right) + Bc^2\left(x^{n-2} + \frac{c^{2n-4}}{x^{n-2}}\right) + Cc^3\left(x^{n-3} + \frac{c^{2n-6}}{x^{n-3}}\right) + \cdots = 0.$$

Digitized by Google

Supponiamo ora

$$x + \frac{c^2}{x} = y,$$

e facciamo nella (I) l'esponente r successivamente

$$= n, \quad n-1, \quad n-2, \quad n-3, \quad \ldots;$$

risultando così

$$\left(x^n + \frac{c^{2n}}{x^n}\right) = y^n - nc^2y^{n-2} + \frac{n(n-3)}{2}c^4y^{n-4} - \frac{n(n-4)(n-5)}{2.3}c^6y^{n-6} + \frac{n(n-5)(n-6)(n-7)}{2.3.4}c^8y^{n-8} - \ldots,$$

$$Ac\left(x^{n-1} + \frac{c^{2n-2}}{x^{n-1}}\right) = Acy^{n-1} - (n-1)Ac^3y^{n-3} + \frac{(n-1)(n-4)}{2}Ac^5y^{n-5} - \frac{(n-1)(n-5)(n-6)}{2.3}Ac^7y^{n-7} + \ldots,$$

$$Bc^2\left(x^{n-2} + \frac{c^{2n-4}}{x^{n-2}}\right) = Bc^2y^{n-2} - (n-2)Bc^4y^{n-4} + \frac{(n-2)(n-5)}{2}Bc^6y^{n-6} - \frac{(n-2)(n-6)(n-7)}{2.3}Bc^8y^{n-8} + \ldots,$$

$$Cc^3\left(x^{n-3} + \frac{c^{2n-6}}{x^{n-3}}\right) = Cc^3y^{n-3} - (n-3)Cc^5y^{n-5} + \frac{(n-3)(n-6)}{2}Cc^7y^{n-7} - \ldots,$$

$$Dc^4\left(x^{n-4} + \frac{c^{2n-8}}{x^{n-4}}\right) = Dc^4y^{n-4} - (n-4)Dc^6y^{n-6} + \frac{(n-4)(n-7)}{2}Dc^8y^{n-8} - \ldots,$$

$$Ec^5\left(x^{n-5} + \frac{c^{2n-10}}{x^{n-5}}\right) = Ec^5y^{n-5} - (n-5)Ec^7y^{n-7} + \ldots,$$

$$Fc^6\left(x^{n-6} + \frac{c^{2n-12}}{x^{n-6}}\right) = Fc^6y^{n-6} - (n-6)Fc^8y^{n-8} + \ldots,$$

$$Gc^7\left(x^{n-7} + \frac{c^{2n-14}}{x^{n-7}}\right) = Gc^7y^{n-7} - \ldots,$$

$$Hc^8\left(x^{n-8} + \frac{c^{2n-16}}{x^{n-8}}\right) = Hc^8y^{n-8} - \ldots,$$

. . . . . .

vedesi che, col sommare tutte queste equazioni, la data (T) verrà trasformata nell'altra

$$\text{(III)} \quad \begin{cases} y^n + Acy^{n-1} + (B-n)c^2y^{n-2} + [C-(n-1)A]c^3y^{n-3} \\ + \left[D-(n-2)B + \frac{n(n-3)}{2}\right]c^4y^{n-4} + \left[E-(n-3)C + \frac{(n-1)(n-4)}{2}A\right]c^5y^{n-5} \\ + \left[F-(n-4)D + \frac{(n-2)(n-5)}{2}B - \frac{n(n-4)(n-5)}{2.3}\right]c^6y^{n-6} + \ldots = 0, \end{cases}$$

equazione di un grado minore della metà da quello della proposta. Ponendo successi-

Digitized by Google

vamente le radici y', y'', y''', ... della (III) nella supposta

$$x + \frac{c^2}{x} = y,$$

ossia nella

$$x^2 - yx + c^2 = 0,$$

otterremo un numero di equazioni di secondo grado, dalla soluzione delle quali si avranno le $2n$ radici della (T).

È facile il vedere che la nostra y uguaglia la quantità a dei n^{i} 333, 331 presa negativamente, e che la (III) altro non è che la $a^n + \alpha a^{n-1} + \beta a^{n-2} + \cdots = 0$, prese però le radici col segno contrario.

339. *Le equazioni algebraiche che, come la* (T), *sono dotate della proprietà di non cangiare di forma per la sostituzione di* $\frac{c^2}{x}$ *in luogo della* x, *diconsi convertibili, o reciproche. Venga ora richiesto di determinarne le formole generali.*

340. 1° Supponiamo perciò, che la

$$x^{2n} + Acx^{2n-1} + Bc^2x^{2n-2} + Cc^3x^{2n-3} + \cdots + Hc^{n-1}x^{n+1} + Ic^nx^n + Kc^{n+1}x^{n-1} + \cdots$$
$$\cdots + Rc^{2n-3}x^3 + Sc^{2n-2}x^2 + Tc^{2n-1}x + Vc^{2n} = 0$$

rappresenti un'equazione convertibile qualunque di grado pari: se essa deve conservarsi la medesima per la sostituzione di $\frac{c^2}{x}$ invece della x, la nuova

$$x^{2n} + \frac{T}{V}cx^{2n-1} + \frac{S}{V}c^2x^{2n-2} + \frac{R}{V}c^3x^{2n-3} + \cdots$$
$$\cdots + \frac{K}{V}c^{n-1}x^{n+1} + \frac{I}{V}c^nx^n + \frac{H}{V}c^{n+1}x^{n-1} + \cdots$$
$$\cdots + \frac{C}{V}c^{2n-3}x^3 + \frac{B}{V}c^{2n-2}x^2 + \frac{A}{V}c^{2n-1}x + \frac{c^{2n}}{V} = 0,$$

che ne risulta, dovrà essere identica con la supposta, e quindi avremo

$$\frac{T}{V} = A, \quad \frac{S}{V} = B, \quad \frac{R}{V} = C, \ \ldots, \quad \frac{K}{V} = H, \quad \frac{I}{V} = I, \quad \frac{H}{V} = K, \ \ldots$$
$$\frac{C}{V} = R, \quad \frac{B}{V} = S, \quad \frac{A}{V} = T, \quad \frac{1}{V} = V.$$

Dall'ultima di queste equazioni ricavo

$$V = \pm 1,$$

e però

$$T = \pm A, \quad S = \pm B, \quad R = \pm C, \ \ldots, \quad K = \pm H,$$

ed

$$I = I, \text{ se } V = 1; \quad I = 0, \text{ se } V = -1;$$

sostituendo adunque tali valori, l'equazione supposta si dividerà nelle due

$$(T) \quad \begin{cases} x^{2n} + Acx^{2n-1} + Bc^2x^{2n-2} + Cc^3x^{2n-3} + \cdots + Hc^{n-1}x^{n+1} + Ic^nx^n \\ + Hc^{n+1}x^{n-1} + \cdots + Cc^{2n-3}x^3 + Bc^{2n-2}x^2 + Ac^{2n-1}x + c^{2n} = 0, \end{cases}$$

$$(U) \quad \begin{cases} x^{2n} + Acx^{2n-1} + Bc^2x^{2n-2} + Cc^3x^{2n-3} + \cdots + Hc^{n-1}x^{n+1} \\ - Hc^{n+1}x^{n-1} - \cdots - Cc^{2n-3}x^3 - Bc^{2n-2}x^2 - Ac^{2n-1}x - c^{2n} = 0, \end{cases}$$

le quali saranno due formole generali di tutte le equazioni convertibili di grado pari.

Digitized by Google

2° Sia la equazione generale di grado dispari

$$x^{2p+1} + Acx^{2p} + Bc^2x^{2p-1} + Cc^3x^{2p-2} + \cdots$$
$$\cdots + Hc^px^{p+1} + Kc^{p+1}x^p + \cdots + Rc^{2p-2}x^3 + Sc^{2p-1}x^2 + Tc^{2p}x + Vc^{2p+1} = 0.$$

Volendo in questa determinare i coefficienti, onde renderla convertibile, pongo $\frac{c^2}{x}$ invece della x, rinnovo il discorso e il calcolo precedente, e ne verranno le due equazioni

$$(V) \quad \begin{cases} x^{2p+1} + Acx^{2p} + Bc^2x^{2p-1} + Cc^3x^{2p-2} + \cdots + Hc^px^{p+1} \\ + Hc^{p+1}x^p + \cdots + Cc^{2p-2}x^3 + Bc^{2p-1}x^2 + Ac^{2p}x + c^{2p+1} = 0, \end{cases}$$

$$(Z) \quad \begin{cases} x^{2p+1} + Acx^{2p} + Bc^2x^{2p-1} + Cc^3x^{2p-2} + \cdots + Hc^px^{p+1} \\ - Hc^{p+1}x^p - \cdots - Cc^{2p-2}x^3 - Bc^{2p-1}x^2 - Ac^{2p}x - c^{2p+1} = 0, \end{cases}$$

le quali esprimeranno le formole generali delle equazioni reciproche di grado dispari.

341. Veduto nel n° 338 come riducasi ad altra di grado inferiore la equazione (T), sia richiesto di ciò pure eseguire rapporto alle altre (U), (V), (Z).

Ridotte esse alla forma

$$(x^{2n} - c^{2n}) + Acx(x^{2n-2} - c^{2n-2}) + Bc^2x^2(x^{2n-4} - c^{2n-4})$$
$$+ Cc^3x^3(x^{2n-6} - c^{2n-6}) + \cdots + Hc^{n-1}x^{n-1}(x^2 - c^2) = 0,$$

$$(x^{2p+1} + c^{2p+1}) + Acx(x^{2p-1} + c^{2p-1}) + Bc^2x^2(x^{2p-3} + c^{2p-3})$$
$$+ Cc^3x^3(x^{2p-5} + c^{2p-5}) + \cdots + Hc^px^p(x + c) = 0,$$

$$(x^{2p+1} - c^{2p+1}) + Acx(x^{2p-1} - c^{2p-1}) + Bc^2x^2(x^{2p-3} - c^{2p-3})$$
$$+ Cc^3x^3(x^{2p-5} - c^{2p-5}) + \cdots + Hc^px^p(x - c) = 0,$$

poichè tutti i binomi della prima di queste equazioni così espresse sono divisibili esattamente per $x^2 - c^2$, tutti i binomi della seconda sono divisibili per $x + c$, e quelli della terza per $x - c$, eseguisco simili divisioni, e ne verranno i risultati

$$x^{2n-2} + Acx^{2n-3} + (1 + B)c^2x^{2n-4} + (A + C)c^3x^{2n-5} + \cdots + Hc^{n-1}x^{n-1} + \cdots$$
$$\cdots + (A + C)c^{2n-5}x^3 + (1 + B)c^{2n-4}x^2 + Ac^{2n-3}x + c^{2n-2} = 0,$$

$$x^{2p} + (A - 1)cx^{2p-1} + (B - A + 1)c^2x^{2p-2} + \cdots$$
$$\cdots + (B - A + 1)c^{2p-2}x^2 + (A - 1)c^{2p-1}x + c^{2p} = 0,$$

$$x^{2p} + (A + 1)cx^{2p-1} + (B + A + 1)c^2x^{2p-2} + \cdots$$
$$\cdots + (B + A + 1)c^{2p-2}x^2 + (A + 1)c^{2p-1}x + c^{2p} = 0;$$

ma queste non sono che tre equazioni reciproche della forma istessa della (T); dunque saranno riducibili col metodo medesimo del n° 338 ad altre di un grado minore della metà; e tutte per conseguenza le equazioni convertibili sono capaci di un simile abbassamento.

342. *L'equazione* $x^m - 1 = 0$ *essendo del genere delle convertibili, quali sono le* (U), (Z), *potrà ridursi ad altra del grado* $\frac{m-2}{2}$ *se* m *è pari, o del grado* $\frac{m-1}{2}$ *se* m *è dispari.*

343. *Ridurre a grado inferiore l'equazione*

$$(IV) \qquad x^{mn} + Ax^{(m-1)n} + Bx^{(m-2)n} + Cx^{(m-3)n} + \cdots = 0.$$

Digitized by Google

Suppongo $x^n = u$; sostituisco, e ne verrà la trasformata

$$u^m + Au^{m-1} + Bu^{m-2} + Cu^{m-3} + \cdots = 0,$$

il cui grado è $< mn$. Ponendo successivamente i valori u', u'', u''', ..., $u^{(m)}$ nella $x^n = u$, dalla soluzione di questa tutte otterremo le radici della proposta.

344. Sciogliere l'equazione

$$y^m - mey^{m-1} + \frac{m(m-3)}{2}e^2y^{m-2} - \frac{m(m-4)(m-5)}{2.3}e^3y^{m-3}$$
$$+ \frac{m(m-5)(m-6)(m-7)}{2.3.4}e^4y^{m-4} - \cdots = V.$$

Supposto

$$e = c^2 \qquad \text{ed} \qquad y = x + \frac{c^2}{x},$$

la data, pel n° 337, si cangerà nella

$$x^m + \frac{c^{2m}}{x^m} = V,$$

ossia

$$x^{2m} - Vx^m + c^{2m} = 0.$$

Ora, la forma di questa equazione è simile a quella della (IV), e fatto però $x^m = u$, è riducibile alla

$$u^2 - Vu + c^{2m} = 0.$$

Dunque, rappresentando α una delle radici m^{esime} della unità, poichè abbiamo

$$u = \frac{V}{2} \pm \sqrt{\frac{V^2}{4} - c^{2m}},$$

sarà

$$x = \alpha \sqrt[m]{\frac{V}{2} \pm \sqrt{\frac{V^2}{4} - c^{2m}}},$$

e però

$$y = x + \frac{c^2}{x} = \alpha \sqrt[m]{\frac{V}{2} \pm \sqrt{\frac{V^2}{4} - c^{2m}}} + \frac{c^2}{\alpha \sqrt[m]{\frac{V}{2} \pm \sqrt{\frac{V^2}{4} - c^{2m}}}}$$

$$= \alpha \sqrt[m]{\frac{V}{2} \pm \sqrt{\frac{V^2}{4} + c^{2m}}} + \alpha^{m-1} \sqrt[m]{\frac{V}{2} \mp \sqrt{\frac{V^2}{4} - c^{2m}}}.$$

Conoscendo le radici della $z^m - 1 = 0$, tutti conosceremo i valori della y, e per la somiglianza del precedente valore con la radice della equazione generale del terzo grado determinata nel n° 213 si dà ad esso il nome di *Formola Cardanica.*

345. *Prendiamo ora a considerare il caso della*

(*S*) (n° 321) $$f(x')(x'')(x''') \ldots (x^{(\lambda)}) = K$$

irrazionale.

Se sia irrazionale soltanto la quantità cognita K, e non la forma della supposta

Digitized by Google

funzione, è chiaro che potremo sempre, come si è accennato nei n^i 322, 324, 325, 327, 328, 329, 330, 331, mediante il problema del n° 242, da essa K determinare, quantunque irrazionalmente, ciascuna delle

$$x', \quad x'', \quad x''', \ldots, x^{(\lambda)},$$

oppure ciascuno dei coefficienti della

$$a^{\mu+1} + \alpha a^{\mu} + \beta a^{\mu-1} + \gamma a^{\mu-2} + \cdots = 0,$$

e ciò per mezzo di tante equazioni del primo, o del secondo, o del terzo, etc. o del λ^{esimo} grado. Dunque in questo caso potremo sempre, o con la divisione, come nel n° 323, o con la riduzione ad altra equazione, come nel n° 333, render la data

$$(D) \qquad x^m + Ax^{m-1} + Bx^{m-2} + \cdots + V = 0$$

di grado inferiore.

346. Sia in secondo luogo incommensurabile la forma della funzione. Posto in tale ipotesi

$$f(x')(x'')(x''') \ldots (x^{(\lambda)}) = y,$$

libero questa equazione dagli irrazionali, e pel n° 121 la riduco così alla

$$(V) \qquad y^p + Gy^{p-1} + Hy^{p-2} + Iy^{p-3} + \cdots = 0.$$

In ciascuno dei coefficienti G, H, I, ... non ponno evidentemente entrare altre radici della data, che le

$$x', \quad x'', \quad x''', \ldots, x^{(\lambda)};$$

ciascuno d'essi adunque uguaglierà una funzione razionale delle stesse x', x'', x''', ..., $x^{(\lambda)}$, cosicchè avremo

$$(VI) \qquad \begin{cases} G = F'(x')(x'')(x''') \ldots (x^{(\lambda)}), \\ H = F''(x')(x'')(x''') \ldots (x^{(\lambda)}), \\ I = F'''(x')(x'')(x''') \ldots (x^{(\lambda)}), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

Ora, abbiasi ciascuna delle funzioni (VI) quale si suppose la (S) nel n° 322; in tale ipotesi, se vorremo esprimere per G il valore della x', lo potremo eseguire razionalmente mediante la (M) (n° 144, pag. 99), servendoci della prima delle equazioni (VI), e ne verrà x' uguale ad una funzione della G razionale: nella maniera medesima venendo richiesto di esprimere la x' per H, dalla seconda delle equazioni (VI) otterremo x' uguale ad una funzione razionale della H; dalla terza ricaveremo egualmente x' uguale ad una funzione della I, e così in progresso. Supponiamo eseguite simili determinazioni rapporto a tutti i p coefficienti della (V), e le corrispondenti equazioni siano le

$$(VII) \qquad x' = \varphi'(G), \quad x' = \varphi''(H), \quad x' = \varphi'''(I), \quad \ldots$$

Poichè a cagione della equazione (S) la quantità K è una delle radici della (V), poniamo essa in luogo della y, e ne venga perciò il risultato

$$(VIII) \qquad K^p + GK^{p-1} + HK^{p-2} + IK^{p-3} + \cdots = 0.$$

Avendosi ora nelle (VII), (VIII) un numero $p + 1$ di equazioni contenenti un numero p

Digitized by Google

di quantità G, H, I, ... vedesi che potremo da esse eliminar queste tutte, e in simile guisa giungeremo ad una equazione finale priva affatto delle G, H, I, ... non contenente che la x' e quantità cognite, e la quale potremo per conseguenza supporre della forma

$$x'^r + g x'^{r-1} + h x'^{r-2} + i x'^{r-3} + \cdots = 0,$$

ossia

$$x^r + g x^{r-1} + h x^{r-2} + i x^{r-3} + \cdots = 0, \tag{IX}$$

di cui sia radice la x'.

Le due equazioni adunque (D), (IX) avranno la radice comune x'; e quindi, se fra i loro primi due membri cercheremo il massimo comun divisore, dovrà questo contenere il binomio $x - x'$.

347. Nel modo medesimo come abbiamo espressa col mezzo dei coefficienti

$$G, \quad H, \quad I, \quad \ldots$$

la radice x', potremo col loro mezzo esprimere ancora ciascuna delle altre x'', x''', ..., $x^{(\lambda)}$ e, ciò eseguendo, avremo tante equazioni della forma

$$\text{(X)} \qquad \begin{cases} x'' = \varphi'(G), & x'' = \varphi''(H), & x'' = \varphi'''(I), \ldots \\ x''' = \varphi'(G), & x''' = \varphi''(H), & x''' = \varphi'''(I), \ldots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ x^{(\lambda)} = \varphi'(G), & x^{(\lambda)} = \varphi''(H), & x^{(\lambda)} = \varphi'''(I), \ldots; \end{cases}$$

onde combinando successivamente prima quelle della prima fila, poscia quelle della seconda, e così di seguito con la medesima equazione (VIII), come nel n° prec., ci risulteranno tante equazioni finali

$$\text{(XI)} \qquad \begin{cases} x^s + g' x^{s-1} + h' x^{s-2} + i' x^{s-3} + \cdots = 0, \\ x^t + g'' x^{t-1} + h'' x^{t-2} + i'' x^{t-3} + \cdots = 0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ x^u + g^{(\lambda-1)} x^{u-1} + h^{(\lambda-1)} x^{u-2} + i^{(\lambda-1)} x^{u-3} + \cdots = 0, \end{cases}$$

la prima delle quali avrà per radice la x'', la seconda avrà la x''', etc., e l'ultima $x^{(\lambda)}$; e perciò, se determineremo il massimo divisor comune fra il primo membro di ciascuna di esse e quello della (D), nei varii risultati si conterranno i fattori

$$x - x'', \quad x - x''', \quad \ldots, \quad x - x^{(\lambda)}.$$

348. Supponiamo che il coefficiente G risulti

$$= F(x', x'')(x''')(x^{IV}) \ldots (x^{(\lambda)}).$$

Volendo in questa ipotesi da G determinare la x', pel n° 324 cadremo in una equazione $x^2 + a_1 x + b_1 = 0$, di cui x', x'' saranno le radici, e i cui coefficienti a_1, b_1 saranno funzioni razionali della G.

Che, se anche

$$H = F''(x', x'')(x''')(x^{IV}) \ldots (x^{(\lambda)}), \quad I = F'''(x', x'')(x''')(x^{IV}) \ldots (x^{(\lambda)}), \ldots,$$

troveremo in egual modo, corrispondentemente a ciascuno di questi coefficienti, tante equazioni

$$\text{(XII)} \quad x^2 + a_1 x + b_1 = 0, \quad x^2 + a_2 x + b_2 = 0, \quad x^2 + a_3 x + b_3 = 0, \ldots,$$

Digitized by Google

nelle quali saranno radici le sole x', x'', e nelle quali i coefficienti a_1, b_1 saranno funzioni razionali della G, i coefficienti a_2, b_2 funzioni razionali della H, gli altri a_3, b_3 della I, e così di seguito. Ciò posto, combinando le equazioni (XII) con la (VIII), si eliminino da esse, come nel n° 346, i coefficienti G, H, I, ... e giungeremo così ad un'equazione finale (IX) priva di tutte queste quantità G, H, I, ..., e di cui saranno radici amendue le x', x''. Se dunque cercheremo il comun divisore massimo fra il primo membro della (D) e quello della (IX) ultimamente risultato, questo dovrà contenere il prodotto $(x - x')(x - x'')$. Se sia

$$\text{(XIII)} \qquad \begin{cases} G = F'\ (x', x'', x''')(x^{IV}) \ldots (x^{(\lambda)}), \\ H = F''\ (x', x'', x''')(x^{IV}) \ldots (x^{(\lambda)}), \\ I = F'''(x', x'', x''')(x^{IV}) \ldots (x^{(\lambda)}), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \end{cases}$$

ovvero

$$\begin{aligned} G &= F'\ (x', x'', x''', x^{IV}) \ldots (x^{(\lambda)}), \\ H &= F''\ (x', x'', x''', x^{IV}) \ldots (x^{(\lambda)}), \\ I &= F'''(x', x'', x''', x^{IV}) \ldots (x^{(\lambda)}), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \end{aligned}$$

oppure etc.; trovate, come nel caso precedente, dalle equazioni della prima fila corrispondentemente ai varii coefficienti tante equazioni

$$\text{(XIV)} \qquad \begin{cases} x^3 + a_1 x^2 + b_1 x + c_1 = 0, \\ x^3 + a_2 x^2 + b_2 x + c_2 = 0, \\ x^3 + a_3 x^2 + b_3 x + c_3 = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \end{cases}$$

da quelle della seconda le altre

$$\begin{aligned} x^4 + a_1 x^3 + b_1 x^2 + c_1 x + d_1 &= 0, \\ x^4 + a_2 x^3 + b_2 x^2 + c_2 x + d_2 &= 0, \\ x^4 + a_3 x^3 + b_3 x^2 + c_3 x + d_3 &= 0, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \end{aligned}$$

se combineremo simili equazioni con la (VIII), eliminati, come precedentemente, i coefficienti G, H, I, ..., otterremo in egual modo un'equazione finale (IX), tra le cui radici esisteranno le quantità x', x'', x''', oppure le x', x'', x''', x^{IV}, oppure, etc. secondo che hanno avuto luogo le prime, o le seconde, etc. delle (XIII) equazioni, e quindi secondo che con la (VIII) sonosi combinate le prime, o le seconde, etc. delle equazioni (XIV). In questa supposizione adunque, il massimo comun divisore tra la (D) e la corrispondente (IX) ascenderà al terzo, o al quarto, etc. grado.

349. Nella maniera medesima si ritrova che, se ciascuno dei coefficienti (VI), essendo della forma del n° 322, non cangia di valore per la permutazione di x' in $x^{(\lambda+1)}$ (n° 327), o per quella di x' in ciascuna delle due radici $x^{(\lambda+1)}$, $x^{(2\lambda+1)}$, o in ciascuna delle tre

$$x^{(\lambda+1)},\quad x^{(2\lambda+1)},\quad x^{(3\lambda+1)}, \ldots,$$

Digitized by Google

la corrispondente (IX) e la (*D*) avranno rispettivamente il divisore comune

$$(x - x')(x - x^{(\lambda+1)}),$$

ovvero l'altro

$$(x - x')(x - x^{(\lambda+1)})(x - x^{(2\lambda+1)}),$$

o il terzo

$$(x - x')(x - x^{(\lambda+1)})(x - x^{(2\lambda+1)})(x - x^{(3\lambda+1)}), \ldots$$

350. Ciò che si è detto della radice x', è chiaro che dicesi egualmente delle altre x'', x''', ..., $x^{(\lambda)}$; onde, se rapporto ad esse si verifichi in ciascuno dei coefficienti (VI) qualcuna delle supposizioni fatte della (*S*) nei n^{i} 324, 325, 327; istituito il solito calcolo, verranno così ad ottenersi tante equazioni finali simili alle (XI), ciascuna delle quali avrà con la *D* altrettanti fattori comuni o del secondo, o del terzo, o del quarto, etc. grado.

351. Supponiamo, come nel n° 329, che ciascuno dei coefficienti *G*, *H*, *I*, ... sia una funzione della forma

$$F(x', x'')(x''')(x^{iv}) \ldots (x^{(\lambda)}),$$

la quale inoltre non cambi di valore per la permutazione di x' in $x^{(\lambda+1)}$, e per quella di x'' in $x^{(\lambda+2)}$; vedremo qui pure, siccome nel cit. n° 329, che volendosi determinare da ciascuno dei coefficienti le radici x', x'', cadremo in tante equazioni delle forme

$$x^2 + ax + b = 0,$$

nelle quali ciascun coefficiente, per esempio a, sarà radice di un'equazione razionale

$$a^2 + \alpha a + \beta = 0,$$

e vedremo pur anche, come nel n° 332, che chiamati a', a'' i due valori della a; b', b'' i due corrispondenti della b, potremo ottenere tante equazioni di quarto grado

$$x^4 + (a' + a'')x^3 + (b' + b'' + a'a'')x^2 + (a'b'' + a''b')x + b'b'' = 0,$$

le cui radici saranno le

$$x', \quad x'', \quad x^{(\lambda+1)}, \quad x^{(\lambda+2)},$$

e i coefficienti saranno funzioni razionali delle rispettive quantità *G*, *H*, *I*, ... Dunque, se col mezzo di tutte queste equazioni di quarto grado già ottenute, e col mezzo della (VIII) faremo la solita eliminazione dei coefficienti *G*, *H*, *I*, ..., giungeremo, siccome in passato, ad una equazione finale avente con la (*D*) il comune divisore di quarto grado

$$(x - x')(x - x'')(x - x^{(\lambda+1)})(x - x^{(\lambda+2)}).$$

Se ciascuna delle quantità *G*, *H*, *I*, etc. uguagli una funzione delle radici simile a qualcheduna delle supposte nei n^{i} 330, 331, l'equazione finale in allora, come può facilmente dedursi dai n^{i} 330-332, avrà con la (*D*) un fattore comune del grado sesto, o dell'ottavo, o del decimo, etc., oppure del grado

$$2.3, \quad 2(\mu + 1), \quad 3(\mu + 1), \quad 4(\mu + 1), \ldots,$$

e in generale del grado

$$n(\mu + 1)$$

(n° 332).

Digitized by Google

352. Da quanto si è detto fin qui, vedesi adunque che, *anche nella ipotesi della* (*S*) *irrazionale, potrà sempre la* (*D*) *abbassarsi di grado*. Imperciocchè, determinati attualmente i comuni massimi divisori tra le equazioni finali (IX), (XI) e la (*D*), verremo in tale maniera, nella supposizione del n° 346, a determinare λ fattori della (*D*) di primo grado (n^i 346, 347), e nei casi dei n^i 348, 349, 350, 351 ne verremo a determinare od uno, o più, di grado superiore al primo; fattori, pei quali essa (*D*) potrà sempre dividersi attualmente.

353. Conviene aggiungere a tutto questo alcune riflessioni:

1° Affinchè l'equazione finale ottenuta nei n^i 348, 349, 350, 351 abbia con la (*D*) un fattore comune, quale si è colà determinato; non è difficile il vedere che i coefficienti *G*, *H*, *I*, etc. dovranno tutti, niuno eccettuato, essere quali li abbiamo supposti nei citati n^i.

2° Può qui pure succedere, che nella ipotesi del n° 351 risulti, come nel n° 333,

$$n(\mu + 1) = m,$$

e però, che il comune divisore fra la equazione finale e la (*D*) uguagli il primo membro della stessa (*D*): in allora l'equazione data non sarà capace di abbassamento con la divisione. Ciò non ostante potremo ancora quivi, come si disse nel citato n° 333, abbassare di grado essa data, riducendola ad un'altra

$$a^{\mu+1} + \alpha a^{\mu} + \beta a^{\mu-1} + \gamma a^{\mu-2} + \cdots = 0,$$

in cui $\mu + 1 < m$ (n^i 331, 351). Difatti, ricordandoci altro non essere la a che il coefficiente secondo della

$$x^n + a x^{n-1} + b x^{n-2} + \cdots = 0$$

(n^i 331, 351), ed essere perciò

$$= -(x' + x'' + x''' + \cdots + x^n),$$

cerchiamo di esprimere il suo valore mediante ciascuno dei coefficienti *G*, *H*, *I*, etc. Dal n° 333 vedesi che per questo otterremo le p equazioni

$$\text{(XV)} \qquad \begin{cases} a^{\mu+1} + \alpha' \; a^{\mu} + \beta' \; a^{\mu-1} + \gamma' \; a^{\mu-2} + \cdots = 0, \\ a^{\mu+1} + \alpha'' \; a^{\mu} + \beta'' \; a^{\mu-1} + \gamma'' \; a^{\mu-2} + \cdots = 0, \\ a^{\mu+1} + \alpha''' a^{\mu} + \beta''' a^{\mu-1} + \gamma''' a^{\mu-2} + \cdots = 0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots, \end{cases}$$

nelle quali i coefficienti α', β', γ', etc. risulteranno tante funzioni razionali della *G*; i coefficienti α'', β'', γ'', etc. tante funzioni razionali della *H*; gli altri α''', β''', γ''', etc. della *I*, etc. Combinando queste equazioni (XV) già ricavate con la (VIII), si eliminino al solito le quantità *G*, *H*, *I*, etc. affine di giungere ad una equazione finale

$$\text{(XVI)} \qquad a^r + g a^{r-1} + h a^{r-2} + i a^{r-3} + \cdots = 0,$$

i cui coefficienti g, h, i, etc. siano cogniti, e di cui sia fattore un prodotto

$$(a - a')(a - a'')(a - a''') \ldots (a - a^{(\mu+1)}),$$

rappresentando a', a'', a''', ..., $a^{(\mu+1)}$ i diversi valori della a (n^i 329, 351).

Digitized by Google

Ciò fatto, cerchiamo di determinare, pel n° 105, immediatamente dalla (*D*) una trasformata, di cui sia radice la funzione

$$-(x' + x'' + x''' + \cdots + x^{(n)}).$$

Chiamata a l'incognita di una simile trasformata, sia essa la

(XVII) $$a^t + q a^{t-1} + r a^{t-2} + \cdots = 0;$$

è evidente che fra le sue radici esisteranno tutte le precedenti

$$a', \quad a'', \quad a''', \ldots, \quad a^{(\mu+1)}.$$

Dunque, se fra i primi membri delle due (XVI), (XVII) troveremo il massimo comun divisore, altro questo non sarà che il prodotto

$$(a - a')(a - a'')(a - a''') \ldots (a - a^{(\mu+1)}),$$

il quale, in seguito effettuato ed uguagliato allo zero, ci darà un'equazione della forma

(XVIII) $$a^{(\mu+1)} + \alpha a^{\mu} + \beta a^{\mu-1} + \gamma a^{\mu-2} + \cdots = 0,$$

in cui $\mu + 1 < m$. Dunque, etc.

3° Finalmente osservo, che il valor della K (n° 346) può essere razionale, e non esserlo: se esso sia razionale, divenendo perciò razionale l'equazione (VIII), ed essendo già tali anche le (VII), (X), (XII), (XIV), (XV), dovranno evidentemente diventare commensurabili ancora le equazioni finali (IX), (XI), (XVI), e tali per conseguenza saranno pure i fattori ultimi accennati nei n^i 346, 347, 348, 349, 350, 351, e tale sarà la precedente equazione (XVIII). Dunque, ogni qualvolta K sia commensurabile, quantunque sia incommensurabile la $f(x')(x'')(x''') \ldots (x^{(\lambda)})$, la determinazione degli espressi fattori della (*D*) potrà sempre aversi dalla (*D*) medesima, e la (XVIII) potrà aversi dalla sola (XVII) semplicemente col mezzo del Capo XIV senza servirci del laborioso calcolo indicato nei n^i 346, 347, 348, 349, 350, 351, e nel 2° del presente. Che, se K sia incommensurabile, diventando perciò irrazionale la (VIII), risulteranno irrazionali ancora le equazioni finali (IX), (XI), (XVI), e però i fattori della (*D*) e della (XVII); onde in questo caso tali fattori non si potranno già determinare mediante il Capo XIV, ma converrà ricorrere al calcolo accennato dei sovra espressi n^i 346, etc.

Digitized by Google

CAPO XVII.

DELLA DETERMINAZIONE DELLE RADICI REALI PER APPROSSIMAZIONE NELLE EQUAZIONI NUMERICHE.

354. Per la impossibilità di ottenere la soluzione generale delle equazioni di grado superiore al quarto, i matematici sonosi rivolti a cercare il valore delle radici per approssimazione. Fra i varii metodi a tal fine proposti, noi esporremo i due che seguono: il primo riguardante le radici reali per le equazioni numeriche, e l'altro per le algebraiche. Prima però di accingerci a questo, egli è necessario il premettere qualche nozione intorno alle frazioni continue.

Nozioni intorno alle frazioni continue.

355. Una frazione, quale si è la

$$p + \cfrac{a}{q + \cfrac{b}{r + \cfrac{c}{s + \cdots}}},$$

in cui il primo denominatore è formato in parte dell'intero q e in parte del rotto $\cfrac{b}{r + \cdots}$, il denominatore secondo è formato dell'intero r e del rotto $\cfrac{c}{s + \cdots}$, e così di seguito, dicesi *frazione continua.*

356. Le frazioni continue, nelle quali ciascun termine è positivo e ciascun numeratore è $= 1$, quelle sono che apportano maggiore vantaggio e che a noi presentemente riescono necessarie; e quelle, per conseguenza, di cui faremo in adesso parola.

357. *Data una qualunque quantità non intera X, ridurla in frazione continua.*

Determino il numero intero più grande che si contiene in X, e chiamato questo p, è chiaro che avremo $X - p < 1$, e perciò $\cfrac{1}{X - p} > 1$.

Supponiamo $\cfrac{1}{X - p} = X'$; poichè $X' > 1$, cerco il massimo numero intero che sta entro X', e denominatolo q, sarà $X' - q < 1$, e quindi $\cfrac{1}{X' - q} > 1$. Facciasi $\cfrac{1}{X' - q} = X''$, e giacchè $X'' > 1$, si chiami r il numero intero più grande che con-

Digitized by Google

tienesi in X'', onde risulti $X'' - r < 1$, e supposto $\frac{1}{X'' - r} = X'''$, abbiasi $X''' > 1$. Sia s il numero intero più grande che sta in X''', e sia $\frac{1}{X''' - s} = X^{IV}$; risultando qui pure $X^{IV} > 1$, potremo proseguire innanzi il discorso medesimo.

Ciò fatto, dalle supposte equazioni

$$\frac{1}{X - p} = X', \quad \frac{1}{X' - q} = X'', \quad \frac{1}{X'' - r} = X''', \quad \frac{1}{X''' - s} = X^{IV}, \quad \ldots$$

ricavo i valori

$$X = p + \frac{1}{X'}, \quad X' = q + \frac{1}{X''}, \quad X'' = r + \frac{1}{X'''}, \quad X''' = s + \frac{1}{X^{IV}}, \quad \ldots;$$

li sostituisco nei luoghi corrispondenti, e ne verrà $X =$ alla frazione continua

$$\text{(I)} \qquad \left\{ p + \cfrac{1}{q + \cfrac{1}{r + \cfrac{1}{s + \cdots}}} \right. .$$

358. Se sia $X =$ ad un rotto razionale $\frac{M}{N}$, divido M per N; e chiamati p il quoto, α l'avanzo, avremo

$$X = \frac{M}{N} = p + \frac{\alpha}{N};$$

onde, essendo

$$X - p = \frac{\alpha}{N},$$

è evidente che sarà $\frac{N}{\alpha} > 1$ ed $\frac{N}{\alpha} = X'$ (n° prec.).

Divido N per α, denomino q il quoto, β il residuo; risulterà quindi

$$X' = \frac{N}{\alpha} = q + \frac{\beta}{\alpha}, \quad X' - q = \frac{\beta}{\alpha},$$

e però $\frac{\alpha}{\beta} > 1$, $\frac{\alpha}{\beta} = X''$.

Proseguo col dividere α per β, col chiamare r il quoto, γ l'avanzo, e avendosi con ciò

$$X'' = \frac{\alpha}{\beta} = r + \frac{\gamma}{\beta},$$

ne verrà

$$\frac{\beta}{\gamma} > 1, \quad \frac{\beta}{\gamma} = X''';$$

onde potrò nel modo medesimo seguitare l'operazione. Pongo ora in luogo delle quantità

$$\frac{\alpha}{N}, \qquad \frac{\beta}{\alpha}, \qquad \frac{\gamma}{\beta}, \quad \ldots$$

i rispettivi valori

$$\frac{1}{q + \frac{\beta}{\alpha}}, \quad \frac{1}{r + \frac{\gamma}{\beta}}, \quad \frac{1}{s + \frac{\delta}{\gamma}}, \quad \ldots$$

Digitized by Google

e ci risulterà

$$\frac{M}{N} = p + \cfrac{1}{q + \cfrac{1}{r + \cfrac{1}{s + \cdots}}}.$$

L'operazione ora accennata, affine di gettare in frazione continua il rotto $\frac{M}{N}$, vedesi altro non essere che quella stessa di cui ci serviamo per determinare il massimo comun divisore fra le quantità M, N; e i numeri p, q, r, s, ... altro non sono che i successivi quozienti. Ora sappiamo dall'algebra che questa operazione, essendo M, N due numeri interi, è sempre finita. Dunque: *una frazione razionale potrà sempre svolgersi in una continua di un numero finito di termini;* il che non può dirsi delle altre quantità non intere X (n° prec.).

359. *Gettare in frazione continua il rotto* $\frac{69}{7545}$, *e il decimale* 3, 1415926.

Opero in (II),

(II)

$$\begin{array}{l|l|l}
7545 & 69 & 0 \\
 & 0 & \\
\hline
69 & 7545 & 109 \\
 & 69 & \\
\hline
 & 645 & \\
 & 621 & \\
\hline
 & 24 & 69 \mid 2 \\
 & & 48 \\
\hline
 & & 21 \mid 24 \mid 1 \\
 & & 21 \\
\hline
 & & 3 \mid 21 \mid 7 \\
 & & 21 \\
\hline
 & & *
\end{array}.$$

Riguardo al primo rotto, come se cercassi il massimo comun divisore fra i due numeri 69, 7545; e riguardo al decimale, considerando questo come un rotto $\frac{31415926}{10000000}$, opero su di esso nella maniera medesima, e per tal modo otterremo

$$\frac{69}{7545} = 0 + \cfrac{1}{109 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{7}}}}, \quad 3,\ 1415926 = 3 + \cfrac{1}{7 + \cfrac{1}{15 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{243 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{9 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{4}}}}}}}}}}.$$

Nel primo di questi risultati, a cagione di $69 < 7545$, deve essere $p = 0$, ossia deve mancare la parte intera; e ciò sempre succederà nelle frazioni vere.

Digitized by Google

360. Dalla precedente frazione X (n° 357) prendiamo le quantità successive

$$\text{(III)}\quad \left\{ p,\ p+\frac{1}{q},\ p+\frac{1}{q+\frac{1}{r}},\ p+\frac{1}{q+\frac{1}{r+\frac{1}{s}}},\ p+\frac{1}{q+\frac{1}{r+\frac{1}{s+\frac{1}{t}}}},\ \cdots \right.$$

e coi principii dell'aritmetica ridotte queste alle frazioni ordinarie

$$\text{(IV)}\quad \left\{ \frac{p}{1},\ \frac{pq+1}{q},\ \frac{pqr+r+p}{qr+1},\ \frac{pqrs+rs+ps+pq+1}{qrs+s+q},\right.$$
$$\left. \frac{pqrst+rst+pst+pqt+t+pqr+r+p}{qrst+st+qt+qr+1},\ \cdots \right.$$

chiamiamo successivamente A, B, C, D, E, ... i loro numeratori, ed A', B', C', D', E', ... i denominatori corrispondenti, onde tali frazioni vengano rappresentate dalle

$$\text{(V)}\qquad \frac{A}{A'},\ \frac{B}{B'},\ \frac{C}{C'},\ \frac{D}{D'},\ \frac{E}{E'},\ \cdots.$$

Ciò fatto, dalla forma delle (IV) è evidente che avremo

$$\text{(VI)}\quad \begin{cases} A=p, & B=qA+1, & C=rB+A, & D=sC+B, & E=tD+C, & \cdots \\ A'=1, & B'=qA', & C'=rB'+A', & D'=sC'+B', & E'=tD'+C', & \cdots. \end{cases}$$

361. In conseguenza di questa proprietà, potremo assai semplicemente ridurre una data frazione continua finita X a frazione ordinaria.

Scritte perciò in (VII)

$$\text{(VII)}\quad \left\{ \begin{matrix} p, & q, & r, & s, & t, & \cdots \\ \frac{p}{1}, & \frac{pq+1}{q}, & \frac{pqr+r+p}{qr+1}, & \frac{pqrs+\cdots+1}{qrs+s+q}, & \frac{pqrst+\cdots+p}{qrst+\cdots+1}, & \cdots \end{matrix} \right.$$

le quantità p, q, r, s, t, ... in una prima riga, e posta in una seconda in primo luogo la p con al di sotto l'unità, si moltiplichi si la p che la unità per q, e al prodotto pq aumentato di 1 *sottoscrivasi nel secondo luogo la q. In seguito si moltiplichino per r il numeratore e il denominatore della frazione risultata* $\frac{pq+1}{q}$, *si aumentino corrispondentemente del numeratore e del denominatore della* $\frac{p}{1}$, *e ne verrà così la terza delle frazioni* (IV), *che colloco nel terzo luogo. Moltiplico poscia per s il dividendo e il divisore di questa terza frazione, aumento questi prodotti del dividendo e del divisore della frazione seconda, e risultando in tal modo la quarta delle frazioni* (IV), *la pongo nel quarto luogo. Proseguo a moltiplicare per t il numeratore e il denominatore della frazione quarta, sommo coi risultati il dividendo e il divisore della frazione terza, e risultandoci da ciò la quinta delle frazioni* (IV), *la scrivo nel quinto luogo; e in tale maniera seguitando sem-*

Digitized by Google

pre ad operare finchè si giunga all'ultima lettera contenuta in X, vedesi dalle (V), (VI) *che otterremo tutti i successivi valori* (IV) *delle* (III), *e però anche il valore domandato della X.*

362. Vogliasi per esempio ridurre la seconda delle frazioni continue esposte nel n° 359. Opero in (VIII)

$$\text{(VIII)} \quad \begin{cases} 3, & 7, & 15, & 1, & 243, & 1, & 1, & 9, & 1, & 1, & 4 \\ \frac{3}{1}, & \frac{22}{7}, & \frac{333}{106}, & \frac{355}{113}, & \frac{86598}{27565}, & \frac{86953}{27678}, & \frac{173551}{55243}, & \frac{1648912}{524865}, & \frac{1822463}{580108}, & \frac{3471375}{1104973}, & \frac{15707963}{5000000} \end{cases}$$

giusta il metodo precedente, e l'ultimo dei risultati sarà appunto il valore richiesto; poichè, moltiplicato il suo numeratore ed il denominatore per lo stesso numero 2, ne viene $\frac{15707963}{5000000} = \frac{31415926}{10000000} = 3,1415926$.

363. Poichè le quantità $p, q, r, s, t, \ldots$ voglionsi tutte positive (n° 356), dai valori delle quantità $A, B, C, \ldots$; $A', B', C', \ldots$ espressi in (VI) vedesi che dovrà essere

$$A < B, \quad B < C, \quad C < D, \quad D < E, \quad \ldots$$

$$A' = \text{oppure} < B', \quad B' < C', \quad C' < D', \quad D' < E', \quad \ldots.$$

Dai valori medesimi (VI), vedesi ancora che dovrà essere

$$BA' - B'A = 1, \quad CB' - C'B = -1, \quad DC' - D'C = 1, \quad ED' - E'D = -1, \ldots.$$

364. *Le frazioni* (V) *saranno sempre tali, che*

$$\frac{A}{A'} < X, \quad \frac{B}{B'} > X, \quad \frac{C}{C'} < X, \quad \frac{D}{D'} > X, \quad \frac{E}{E'} < X, \quad \ldots.$$

Ciò si deduce agevolmente dal paragonare le parti fratte dei valori (III) con la parte rotta della X.

365. *Le frazioni sono tutte ridotte ai minimi termini.*

Se ciò non fosse, e si volesse che per esempio nella $\frac{C}{C'}$ le quantità C, C' avessero un comune divisore $K > 1$, per lo stesso numero K dovrebbe essere divisibile anche la quantità $DC' - D'C$; ma, a cagione di $DC' - D'C = 1$ (n° 363), questo è impossibile. Dunque, etc.

Quindi si vede il perchè riducendo la seconda delle frazioni continue del n° 359 non ritorna la $\frac{31415926}{10000000}$, da cui essa è nata; ma bensì la $\frac{15707963}{5000000}$ (n° 362), non essendo quest'ultima che la frazione prima ridotta ai minimi termini.

366. *Le differenze tra le frazioni* (V) *vanno sempre impiccolendosi.*

Digitized by Google

Sottraendo tali frazioni consecutivamente l'una dall'altra, pel n° 365 ci risulta

$$\frac{B}{B'} - \frac{A}{A'} = \frac{1}{A'B'},$$
$$\frac{C}{C'} - \frac{B}{B'} = -\frac{1}{B'C'},$$
$$\frac{D}{D'} - \frac{C}{C'} = \frac{1}{C'D'},$$
$$\frac{E}{E'} - \frac{D}{D'} = -\frac{1}{D'E'},$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Ma, pel citato n° 363, abbiamo $A'B' < B'C'$, $B'C' < C'D'$, $C'D' < D'E'$, ...; dunque sarà

$$\frac{1}{A'B'} > \frac{1}{B'C'}, \quad \frac{1}{B'C'} > \frac{1}{C'D'}, \quad \frac{1}{C'D'} > \frac{1}{D'E'}, \quad \ldots,$$

e però, etc.

367. *La differenza tra la X ed una qualunque delle frazioni* (V) *è sempre minore della unità divisa pel quadrato del denominatore spettante alla frazione supposta.*

Essendo $\frac{B}{B'} - \frac{A}{A'} = \frac{1}{A'B'}$, dal n° 364 è chiaro che sarà $X - \frac{A}{A'} < \frac{1}{A'B'}$; ma, a cagione di $A' =$ oppure $< B'$ (n° 363), abbiamo $\frac{1}{A'B'} =$ oppure $< \frac{1}{A'^2}$; dunque sarà ancora $X - \frac{A}{A'} < \frac{1}{A'^2}$. Nella maniera medesima troveremo $\frac{B}{B'} - X < \frac{1}{B'^2}$, $X - \frac{C}{C'} < \frac{1}{C'^2}$, $\frac{D}{D'} - X < \frac{1}{D'^2}$, ... Dunque, etc.

Perciò la differenza tra il numero 3,1415926 e la seconda, o la quarta, etc. delle frazioni (VIII) sarà corrispondentemente $< \frac{1}{7^2}$, $< \frac{1}{113^2}$, ..., ossia $< \frac{1}{49}$, $< \frac{1}{12769}$, ... Ora esso numero 3,1415926 altro non ci esprime che assai prossimamente il rapporto della circonferenza al diametro: vedesi adunque quanto le frazioni $\frac{22}{7}$, $\frac{355}{113}$, ... si accostano ad un simile rapporto.

368. Dai n^{i} 363, 367 apparisce che *le frazioni* (V) *vanno sempre più accostandosi al valore della X.*

369. Nelle solite frazioni (V), *la differenza fra due di esse qualsivogliono consecutive è piccola in maniera, che fra di loro non può esistere alcun'altra frazione il cui denominatore non sia più grande dei denominatori delle due frazioni supposte.*

Prendiamo a considerare, per esempio, le due $\frac{C}{C'}$, $\frac{D}{D'}$, ed esprima $\frac{m}{n}$ una qualunque delle frazioni collocate fra di esse. Dovrà essere

$$\frac{D}{D'} - \frac{C}{C'} > \frac{m}{n} - \frac{C}{C'},$$

Digitized by Google

ossia

$$\frac{1}{C'D'} > \frac{mC' - nC}{C'n}$$

(n° 366); ma, qualunque valore intero abbiansi le m, n, è chiaro che non può giammai essere

$$\frac{mC' - nC}{C'n} < \frac{1}{C'n};$$

dunque sarà ancora

$$\frac{1}{C'D'} > \frac{1}{C'n}$$

e per conseguenza

$$C'n > C'D',$$

e dividendo per C', avremo $n > D'$; ma, a cagione di $D' > C'$ (n° 363), abbiamo ancora $n > C'$. Dunque, etc.

370. Pei n^{i} 364, 369 è chiaro potersi asserire che *ciascuna delle frazioni* (V) *si accosta al valore della X quanto è mai possibile, cioè per modo che nessun'altra frazione avente un divisore non maggiore del divisore della frazione supposta potrà mai egualmente, o più di essa, accostarsi alla X.*

Nel n° 362 la quarta, per esempio, delle frazioni (VIII) si avvicina tanto al valore 3, 1415926, ch'egli è impossibile trovare alcun altro rotto ad esso più prossimo il cui denominatore non sia > 113.

371. Prendansi nelle frazioni (V) separatamente i termini che si alternano, e formine con questi le due serie

$$\text{(IX)} \qquad \begin{cases} \frac{A}{A'}, & \frac{C}{C'}, & \frac{E}{E'}, & \cdots, \\ \frac{B}{B'}, & \frac{D}{D'}, & \frac{F}{F'}, & \cdots. \end{cases}$$

La prima di tali serie sarà pel n° 364 crescente verso X, decrescente la seconda, e dai valori (VI) è facile a vedersi che avremo

$$\frac{C}{C'} - \frac{A}{A'} = \frac{r}{A'C'}, \qquad \frac{E}{E'} - \frac{C}{C'} = \frac{t}{C'E'}, \quad \cdots,$$

$$\frac{B}{B'} - \frac{D}{D'} = \frac{s}{B'D'}, \qquad \frac{D}{D'} - \frac{F}{F'} = \frac{u}{D'F'}, \quad \cdots.$$

372. In conseguenza di ciò, se fosse $r = 1$, col raziocinio istesso del n° 369 vedremmo non poter esistere tra le $\frac{A}{A'}$, $\frac{C}{C'}$ alcun altro rotto, il cui denominatore non sia $> A'$ e $> C'$; ma, se $r > 1$, allora tra esse $\frac{A}{A'}$, $\frac{C}{C'}$ potranno aver luogo $r - 1$ di simili rotti, e tali saranno quei che risultano ponendo nel valore di $\frac{C}{C'}$ ricavato dai valori (VI), cioè in $\frac{rB + A}{rB' + A'}$, successivamente in luogo del numero r i numeri

Digitized by Google

1, 2, 3, ..., $r-1$; onde i risultati

$$(X) \qquad \frac{B+A}{B'+A'}, \quad \frac{2B+A}{2B'+A'}, \quad \frac{3B+A}{3B'+A'}, \quad \ldots, \quad \frac{(r-1)B+A}{(r-1)B'+A'}$$

non saranno che altrettante frazioni esistenti tra le $\frac{A}{A'}$, $\frac{C}{C'}$, i denominatori delle quali saranno tutti $< C'$.

Difatti, presa una qualunque di queste frazioni (X), e chiamata

$$\frac{\mu B+A}{\mu B'+A'},$$

essendo $\mu < r$, avremo primieramente il denominatore $\mu B'+A' < rB'+A'$, e però $< C'$, poichè $C' = rB'+A'$ (n° 360). Inoltre, avendosi

$$\frac{\mu B+A}{\mu B'+A'} - \frac{A}{A'} = \frac{\mu}{A'(\mu B'+A')}$$

(n° 363) e

$$\frac{C}{C'} - \frac{\mu B+A}{\mu B'+A'} = \frac{r-\mu}{C'(\mu B'+A')}$$

(n^i 360, 363), sarà

$$\frac{\mu B+A}{\mu B'+A'} > \frac{A}{A'} \quad \text{e} \quad < \frac{C}{C'};$$

e per conseguenza la nostra

$$\frac{\mu B+A}{\mu B'+A'},$$

e quindi tutte le frazioni (X), nel mentre che hanno un denominatore $< C'$, sono tutte contenute fra le $\frac{A}{A'}$, $\frac{C}{C'}$.

373. *Fra due qualunque delle frazioni* (X) *consecutive non può esistere alcun'altra frazione il cui denominatore non sia maggiore dei denominatori di tali frazioni.*

Poichè

$$\frac{\mu B+A}{\mu B'+A'} - \frac{(\mu-1)B+A}{(\mu-1)B'+A'} = \frac{1}{(\mu B'+A')[(\mu-1)B'+A']},$$

la dimostrazione è la stessa che quella del n° 369.

Avendosi

$$\frac{\mu B+A}{\mu B'+A'} - \frac{B}{B'} = \frac{-1}{B'(\mu B'+A')},$$

nella maniera medesima del n° 369 si ritrova che fra ciascuna delle (X) e la $\frac{B}{B'}$ non ha luogo alcuna frazione $\frac{m}{n}$ in cui non sia $n > B'$ e $> \mu B'+A'$.

374. Ciò che abbiamo dimostrato nei n^i 372, 373 delle $r-1$ frazioni (X) intermedie tra le $\frac{A}{A'}$, $\frac{C}{C'}$, dicesi egualmente delle altre $t-1$ che, come nel n° 372, si dimostrano esistenti fra le $\frac{C}{C'}$, $\frac{E}{E'}$, delle altre $s-1$, le quali hanno luogo fra le $\frac{B}{B'}$, $\frac{D}{D'}$, delle altre $u-1$ che ritrovansi tra le $\frac{D}{D'}$, $\frac{F}{F'}$, e così di seguito.

Digitized by Google

375. Affine di distinguere le frazioni (IX) dalle altre accennate nei n^{i} 372, 374, chiameremo le prime *principali, intermedie* le seconde, e scrivendole tutte in (XI) secondo il loro valore, ne verranno due serie, l'una di quantità tutte minori e crescenti, la seconda di quantità tutte maggiori e decrescenti verso la X. Tutte queste quantità poi pel n° 373 si dimostrano, come nei n^{i} 369, 370, approssimantisi al valore della X quanto è mai possibile

$$
\text{(XI)}\quad
\begin{cases}
\dfrac{A}{A'},\ \dfrac{B+A}{B'+A'},\ \dfrac{2B+A}{2B'+A'},\ \dfrac{3B+A}{3B'+A'},\ \cdots,\ \dfrac{(r-1)B+A}{(r-1)B'+A'},\\
\dfrac{C}{C'},\ \dfrac{D+C}{D'+C'},\ \dfrac{2D+C}{2D'+C'},\ \dfrac{3D+C}{3D'+C'},\ \cdots,\ \dfrac{(t-1)D+C}{(t-1)D'+C'},\\
\dfrac{E}{E'},\ \cdots,\\
\qquad \dfrac{A+1}{A'},\ \dfrac{2A+1}{2A'},\ \dfrac{3A+1}{3A'},\ \cdots,\ \dfrac{(q-1)A+1}{(q-1)A'},\\
\dfrac{B}{B'},\ \dfrac{C+B}{C'+B'},\ \dfrac{2C+B}{2C'+B'},\ \dfrac{3C+B}{3C'+B'},\ \cdots,\ \dfrac{(s-1)C+B}{(s-1)C'+B'},\\
\dfrac{D}{D'},\ \dfrac{E+D}{E'+D'},\ \dfrac{2E+D}{2E'+D'},\ \dfrac{3E+D}{3E'+D'},\ \cdots,\ \dfrac{(u-1)E+D}{(u-1)E'+D'},\\
\dfrac{F}{F'},\ \cdots.
\end{cases}
$$

376. *Data una quantità qualunque non intera X, trovare tutte le frazioni le quali si avvicinano alla X quanto si può mai, cioè per modo, che fra tali frazioni e la X non abbia luogo alcun altro rotto più prossimo il cui denominatore non sia maggiore del denominatore di esse.*

Riduco pel n° 357 la X in frazione continua; quindi determino pel n° 360 le frazioni (V), ed esse tutte pel n° 370 scioglieranno il problema. Formo in seguito le due serie (IX), determino pei n^{i} 372, 374 tutte le frazioni intermedie, e le due serie (XI) così trovate ci daranno la soluzione totale; e di fatti, se esistesse qualche altra frazione differente dalle (XI) capace di sciogliere il problema, questa dovrebbe evidentemente trovarsi in mezzo alla prima o alla seconda delle due serie (XI); ma ciò è impossibile. Dunque, etc.

377. Se sia $X = 3,1415926$, eseguite, siccome nei n^{i} 359, 362, 372, 374, le operazioni accennate nel n° prec., otterremo le due serie

$$
\begin{aligned}
&\frac{3}{1},\ \frac{25}{8},\ \frac{47}{15},\ \frac{69}{22},\ \frac{91}{29},\ \frac{113}{36},\ \frac{135}{43},\ \frac{157}{50},\ \frac{179}{57},\\
&\frac{201}{64},\ \frac{223}{71},\ \frac{245}{78},\ \frac{267}{85},\ \frac{289}{92},\ \frac{311}{99},\ \frac{333}{106},\ \cdots;\\
&\frac{4}{1},\ \frac{7}{2},\ \frac{10}{3},\ \frac{13}{4},\ \frac{16}{5},\ \frac{19}{6},\ \frac{22}{7},\ \cdots,\ \frac{355}{113},\ \cdots,
\end{aligned}
$$

Digitized by Google

la prima delle quali ci esprimerà i numeri tutti minori e prossimi quanto è possibile al 3, 1415926, l'altra i maggiori; e sì l'una, per conseguenza, che la seconda si avvicineranno vieppiù ad esprimere esattamente il rapporto della circonferenza al diametro.

Ciò basti delle frazioni continue.

Determinazione per approssimazione delle radici.

378. *Trovare un numero più grande di tutte le radici reali della*

$$(C) \qquad Fx^m + Gx^{m-1} + Hx^{m-2} + Ix^{m-3} + \cdots = 0,$$

essendo il coefficiente F positivo.

Supposto

$$x = y + r,$$

trasformo pel n° 80 la (C) nell'altra

$$(XII) \qquad \begin{cases} (Fr^m + Gr^{m-1} + Hr^{m-2} + Ir^{m-3} + \cdots) \\ + [mFr^{m-1} + (m-1)Gr^{m-2} + (m-2)Hr^{m-3} + \cdots]y \\ + \left[\frac{m(m-1)}{2}Fr^{m-2} + \frac{(m-1)(m-2)}{2}Gr^{m-3} + \cdots\right]y^2 \\ + \left[\frac{m(m-1)(m-2)}{2.3}Fr^{m-3} + \cdots\right]y^3 + \cdots = 0. \end{cases}$$

Ora, se la r ha un valore tale che renda positivi tutti i coefficienti della trasformata, tal trasformata dovrà avere tutte le sue radici reali negative; e però essendo negativi tutti i valori reali della y, qualunque delle radici reali della (C) pongasi in luogo della x ci darà sempre $x - r < 0$, e perciò avremo $r > x$.

Scioglieremo dunque il problema, sostituendo nella (XII) *invece della r un numero capace di rendere positivi tutti i suoi coefficienti,* e questo numero a cagione del coefficiente F positivo, è facile a vedersi che si determinerà collocando successivamente i numeri 0, 1, 2, 3, ... in luogo della r.

Sia, per esempio, $9x^4 - 24x^3 + 16x^2 - 24x + 7 = 0$ l'equazione data; fatto $x = y + r$, avendosi

$$(9r^4 - 24r^3 + 16r^2 - 24r + 7) + (36r^3 - 72r^2 + 32r - 24)y$$
$$+ (54r^2 - 72r + 16)y^2 + (36r - 24)y^3 + 9y^4 = 0$$

suppongo successivamente $r = 0, 1, 2, \ldots$. Ora, allorchè faccio $r = 3$, la trasformata diviene

$$9y^4 + 84y^3 + 286y^2 + 396y + 160 = 0,$$

equazione in cui tutti i coefficienti sono positivi. Dunque il 3 sarà un numero maggiore di tutte le radici reali della data, e vedesi di fatti esser ciò vero, poichè $\frac{1}{3}$, $\frac{7}{3}$ sono le sue radici reali.

Digitized by Google

379. *Determinare un numero minore di tutte le differenze fra le radici reali e disuguali della* (*C*).

Tolte pel n° 306 dalla (*C*) le radici uguali, se pur ve ne hanno, determino, pel n° 86, dall'equazione che risulta, l'equazione delle differenze, e supposto che tale equazione delle differenze ci venga rappresentata dalla

$$y^h + ay^{h-1} + by^{h-2} + \cdots + ty + u = 0,$$

faccio

$$y = \frac{1}{z},$$

onde avere la trasformata

$$uz^h + tz^{h-1} + sz^{h-2} + \cdots + az + 1 = 0$$

(n° 82).

Determino ora pel n° prec. un numero maggiore di tutte le radici reali di quest'ultima equazione, e chiamato esso K, giacchè abbiamo $K > z$, sarà

$$\frac{1}{K} < \frac{1}{z}, \quad \text{e però} \quad \frac{1}{K} < y.$$

Ma la y non fa che rappresentarci il quadrato della differenza fra due quali si vogliano delle radici reali e disuguali della (*C*) (n° 86); dunque, essendo $\frac{1}{K}$ minore di un simile quadrato, la quantità $\frac{1}{\sqrt{K}}$ quella sarà, che somministra la soluzione del problema.

Sia per esempio

$$x^3 - 5x - 4 = 0$$

l'equazione data. Non avendo questa radici uguali, trovo immediatamente la sua equazione delle differenze; e determinata così la

$$y^3 - 30y^2 + 225y - 68 = 0,$$

suppongo

$$y = \frac{1}{z},$$

onde avere la

$$68z^3 - 225z^2 + 30z - 1 = 0.$$

Cerco presentemente in quest'ultima equazione un numero maggiore di tutte le sue radici reali, e supposto perciò pel n° 378 $z = u + r$, la trasformo nella

$$(68r^3 - 225r^2 + 30r - 1) + (204r^2 - 450r + 30)u + (204r - 225)u^2 + 68u^3 = 0,$$

e poichè collocando quivi successivamente in luogo della r i numeri 0, 1, 2, 3, ..., trovo che alla sostituzione del 4, essa trasformata diviene

$$871 + 1494u + 591u^2 + 68u^3 = 0$$

con tutti i suoi termini positivi, dirò che il 4 è un numero maggiore di tutti i valori reali della z, e quindi che $\frac{1}{\sqrt{4}} = \frac{1}{2}$ è un numero minore di tutte le differenze fra le radici reali della $x^3 - 5x - 4 = 0$.

380. *Chiamate*

$$\alpha, \quad \beta, \quad \gamma, \quad \ldots$$

Digitized by Google

le radici reali, e

$$\mu, \quad \nu, \quad \pi, \quad \rho, \quad \ldots$$

le radici immaginarie della

$$(D) \qquad x^m + Ax^{m-1} + Bx^{m-2} + \cdots + V = 0 \text{ (n° 292)};$$

se porremo in essa (D) in luogo della x due numeri p, q, tali che

$$p > \alpha, \quad q < \alpha,$$

e tali che la differenza tra loro sia minore della differenza tra α ed un'altra qualunque delle β, γ, ..., ne verranno sempre due risultati di segno fra loro contrarii.

Supponiamo $\alpha > \beta$, cosicchè

$$\alpha - \beta > 0.$$

Poichè, per la ipotesi,

$$p - q < \alpha - \beta,$$

trasportando avremo

$$\beta - \alpha < q - p,$$

e sommando queste due quantità con le altre $\alpha < p$, otterremo

$$\beta + \alpha - \alpha < q + p - p, \quad \beta < q, \quad \text{e però} \quad q - \beta > 0.$$

Ma, a cagione di $p > \alpha$ e di $\alpha > \beta$, abbiamo ancora $p > \beta$, e quindi $p - \beta > 0$. Dunque in questo caso i due binomi $p - \beta$, $q - \beta$ saranno amendue positivi.

Che se $\alpha < \beta$, avendosi allora

$$\beta - \alpha > 0 \quad \text{e} \quad p - q < \beta - \alpha,$$

sommando queste quantità con le altre $q < \alpha$, ne verrà $p < \beta$, e perciò $p - \beta < 0$; ma, a cagione di $q < \alpha$, anche $q - \alpha < 0$; dunque in questa seconda ipotesi $p - \beta$, $q - \beta$ saranno quantità amendue negative, e per conseguenza in qualunque supposizione i due binomi $p - \beta$, $q - \beta$ saranno sempre del medesimo segno. Ora lo stesso si dimostra rapporto ai due $p - \gamma$, $q - \gamma$, ai due $p - \delta$, $q - \delta$, ..., e di più i due prodotti

$$(p - \mu)(p - \nu)(p - \pi)(p - \rho) \ldots$$
$$(q - \mu)(q - \nu)(q - \pi)(q - \rho) \ldots$$

sono entrambi reali e positivi (n° 59). Dunque gli altri due prodotti

$$(p - \beta)(p - \gamma)(p - \delta) \ldots (p - \mu)(p - \nu)(p - \pi) \ldots$$
$$(q - \beta)(q - \gamma)(q - \delta) \ldots (q - \mu)(q - \nu)(q - \pi) \ldots$$

saranno amendue dello stesso segno, e però a cagione di $p - \alpha > 0$, $q - \alpha < 0$, i terzi

$$(p - \alpha)(p - \beta)(p - \gamma)(p - \delta) \ldots (p - \mu)(p - \nu)(p - \pi) \ldots$$
$$(q - \alpha)(q - \beta)(q - \gamma)(q - \delta) \ldots (q - \mu)(q - \nu)(q - \pi) \ldots$$

saranno di segno contrario.

Ma questi ultimi due prodotti non sono, se non se ciò che diventa il primo membro della (D) per la sostituzione delle quantità p, q in luogo della x. Dunque, etc.

381. *Se la differenza tra le due quantità p, q sia minore della differenza fra due*

Digitized by Google

qualunque delle radici della (D), *come se* $p - q = \frac{1}{\sqrt{K}}$ (n° 379), *e se collocando in* (D) *in luogo della* x *tali quantità, ne vengano due risultati di segno contrario; io dico che tra esse* p, q *esisterà sempre una sola delle radici reali della data.*

Che fra le p, q esista nella nostra supposizione almeno una radice reale della (D), questo il sappiamo dal n° 51; che poi non ne esista che una sola, ciò si dimostra facilmente; poichè, se ne esistessero due, per esempio le due α, β, allora la differenza fra queste α, β sarebbe evidentemente minore della differenza tra le p, q, contro della supposizione. Dunque, etc.

382. *Determinare i numeri interi prossimamente inferiori a tutte le radici reali della* (D).

Comincio dal togliere nella (D) le radici uguali (n° 306), determino poscia pel n° 379 la quantità $\frac{1}{\sqrt{K}}$ minore di tutte le differenze tra le sue radici reali e disuguali, e, se $\sqrt{K}$ non è numero intero, pongo in suo luogo il numero ad esso prossimamente maggiore, che chiamo n, onde, invece di $\frac{1}{\sqrt{K}}$, avere il rotto razionale $\frac{1}{n} < \frac{1}{\sqrt{K}}$; e trovo finalmente pel n° 378 il numero r maggiore di tutte le radici della (D). Ciò fatto, colloco successivamente nel primo membro della (D), in luogo della x, i numeri

$$\text{(XIII)} \qquad 0, \ \frac{1}{n}, \ \frac{2}{n}, \ \frac{3}{n}, \ \frac{4}{n}, \ \ldots,$$

e ciò fino ad un numero $\frac{h}{n} =$ ovvero prossimamente $> r$; osservo i risultati che alternansi nel segno, e poichè, pei n^{i} 380, 381, fra i diversi termini della nostra serie (XIII) capaci di produrre simili risultati alternantisi nel segno, tutte si contengono ad una ad una le radici reali e positive della (D), tutti prendo i numeri interi che sono prossimamente inferiori a questi termini, e tali numeri saranno tutti gl'interi inferiormente più vicini alle domandate radici reali positive. Passando in seguito alla ricerca dei numeri interi prossimamente inferiori alle radici negative, colloco, nella (D), $-x$ in luogo della x; cerco, come precedentemente, nella equazione che risulta, gl'interi prossimamente maggiori a tutte le sue radici reali positive, e tali numeri cangiati di segno saranno i prossimamente minori alle radici reali negative della data.

Vogliansi i numeri interi prossimamente inferiori alle radici reali della

$$x^3 - 5x - 4 = 0.$$

Poichè quivi non esistono radici uguali, poichè abbiamo $\sqrt{K} = 2$ (n° 379), e perciò razionale, e poichè pel n° 378 il 3 è il numero maggiore di tutte le radici della data, onde ne viene $h = 6$, colloco in luogo della x le quantità

$$0, \ \frac{1}{2}, \ 1, \ \frac{3}{2}, \ 2, \ \frac{5}{2}, \ 3.$$

Avendosi quindi i risultati

$$-4, \ -\frac{51}{8}, \ -8, \ -\frac{65}{8}, \ -6, \ -\frac{7}{8}, \ 8,$$

Digitized by Google

osservo che fra questi esistono i soli due $-\frac{7}{8}$, 8, i quali si alternano nel segno. Dunque la data non avrà che una sola radice reale positiva, e questa esistendo tra i numeri $\frac{5}{2}$, 3, dai quali essi risultati sono prodotti, il numero 2 sarà l'intero a tal radice prossimamente inferiore.

Affine ora di determinare i numeri prossimamente minori alle radici reali negative, ponendo $-x$ in luogo della x, riduciamo la data alla

$$x^3 - 5x + 4 = 0.$$

Trovandosi pel n° 378 essere 2 il numero maggiore di tutte le radici di quest'ultima equazione, sostituiscansi in essa successivamente i numeri

$$0, \quad \frac{1}{2}, \quad 1, \quad \frac{3}{2}, \quad 2,$$

e vengansi così a determinare i risultati

$$4, \quad \frac{13}{8}, \quad 0, \quad -\frac{1}{8}, \quad 2.$$

Poichè il terzo di questi è zero, e fra i due $-\frac{1}{8}$, 2 si ha un'alternazione di segno, ne segue che il terzo numero sostituito, cioè il numero 1, sarà una radice della

$$x^3 - 5x + 4 = 0,$$

ed un'altra ne esisterà fra i due $\frac{3}{2}$, 2, della quale per conseguenza l'intero prossimamente maggiore sarà il secondo di essi, cioè il 2. Ciò dunque determinato, — 1 sarà una radice negativa della data $x^3 - 5x - 4 = 0$, e la terza delle sue radici avrà per intero prossimamente inferiore il numero — 2.

383. Vedesi facilmente che *le sostituzioni da farsi delle quantità* (XIII) *nella* (*D*) *non sono giammai in numero* $> nr + 1$, *e però che un tal numero è sempre limitato.* Vedesi inoltre che il calcolo di queste sostituzioni potrà facilitarsi se, invece di eseguirle come nel n° prec., poniamo primieramente in luogo della x la quantità $\frac{x}{n}$, ossia se moltiplichiamo nella (*D*) il secondo termine per n, il terzo per n^2, il quarto per n^3, e così di seguito; e poscia, trascurato il comun divisore n^m, poichè non si cerca che l'alternazione dei segni, se nella quantità che risulta collochiamo successivamente invece della x i numeri 0, 1, 2, 3, 4, ... Finalmente il nostro calcolo potrà agevolarsi ancora di più coll'ajuto delle serie, e ciò vedremo nell'esempio che segue.

384. Determinare gl'interi prossimamente inferiori alle radici della

$$x^3 - 28x + 56 = 0.$$

Essendo $\frac{1}{2}$ un numero minore di tutte le differenze fra le radici reali e disuguali della data, dovremo, per isciogliere il problema, sostituire in luogo della x i numeri successivi

$$0, \quad \frac{1}{2}, \quad 1, \quad \frac{3}{2}, \quad \ldots,$$

Digitized by Google

ovvero pel n° prec., moltiplicato il — 28 per 4, e il 56 per 8, dovremo sostituire nel risultato

(XIV) $$x^3 - 112x + 448$$

invece della x i numeri 0, 1, 2, 3, 4, ...

Ora per vieppiù facilitare il calcolo, osservo che *la quantità* (XIV) *altro non è che il termine generale di una serie a differenze terze costanti;* dunque, se cercherò le differenze 1e, le 2e, e le 3e, e se col mezzo di queste determinerò i termini successivi di detta serie, tali termini saranno appunto i risultati diversi che verrebbero dalle sostituzioni sovraccennate. Suppongo pertanto successivamente $x =$ ai quattro numeri 0, 1, 2, 3, sostituisco in (XIV), e avutine i risultati

(XV) $$448, \quad 337, \quad 232, \quad 139,$$

determino da questi le differenze prime

$$-111, \quad -105, \quad -93,$$

le seconde

$$+6, \quad +12,$$

e la terza $+6$; scrivo poscia in (XVI)

(XVI)
$$\begin{cases} +6, & +6, & +6, & +6, & +6, & +6, & +6, & +6, & +6, & \cdots \\ +6, & +12, & +18, & +24, & +30, & +36, & +42, & +48, & +54, & \cdots \\ -111, & -105, & -93, & -75, & -51, & -21, & +15, & +57, & +105, & \cdots \\ +448, & +337, & +232, & +139, & +64, & +13, & -8, & +7, & +64, & \cdots. \end{cases}$$

in una prima linea la differenza 3ª costante $+6$, replicandola quante volte si vuole; colloco sotto del primo $+6$ in una colonna verticale la prima delle differenze 2e, cioè il $+6$, la prima delle differenze 1e, cioè il -111, e il primo dei risultati (XV), cioè il 448. Ciò fatto, formo nella seconda riga la serie delle differenze 2e, e la formo sommando ciascun suo termine precedente con il numero ad esso immediatamente superiore; formo col metodo istesso nella terza riga la serie delle differenze 1e; e replicando nella quarta l'operazione medesima, otterremo finalmente i termini successivi della serie principale, ossia i risultati che verrebbero dalla (XIV), facendo successivamente $x = 0$, 1, 2, 3, 4, ... Poichè la 3ª differenza 6 è positiva, e positivi sono tutti i termini della ottava colonna, vedesi che i termini i quali si otterrebbero oltre questa, sarebbero tutti positivi, e perciò sarà inutile protrarre innanzi le serie. Ora nella quarta riga abbiamo due alternazioni di segno, e queste tra il sesto risultato $+13$ e il settimo -8, tra il settimo -8 e l'ottavo $+7$. Dunque, dalla sostituzione dei numeri 5, 6, 7 nella (XIV), ossia dei numeri $\frac{5}{2}$, 3, $\frac{7}{2}$ nel primo membro della data $x^3 - 28x + 56 = 0$ ottenendosi tre risultati prossimi alternantisi nel segno, ne viene che essa data avrà due radici reali positive, e una di queste esistente fra i numeri $\frac{5}{2}$, 3, e l'altra fra i due 3, $\frac{7}{2}$; onde 2, 3 saranno gli interi ad esse prossimamente inferiori.

Per trovare l'intero più prossimo all'altra radice reale negativa, porrei $-x$ in luogo della x, e opererei sulla

$$x^3 - 28x - 56 = 0,$$

come precedentemente (n° 382).

Digitized by Google

385. Dopo la determinazione dei primi quattro risultati (XV), affine di trovare gli altri non impiegandosi nella operazione precedente che delle semplici addizioni, vedesi quanto esso possa facilitare il calcolo. Che se l'equazione data sia la (*D*); rappresentando il suo primo membro il termine generale di una serie a differenze m^{esime} costanti; supposto successivamente $x = 0, 1, 2, 3, 4, \ldots, m$, e trovati dalla (*D*) gli $m + 1$ risultati corrispondenti; da questi determinerei le differenze 1e, le 2e, le 3e, etc. fino alla m^{esima}; poscia, come nel n° prec., formerei tutte le serie delle differenze m^{esime}, delle $(m-1)^{esime}$, delle $(m-2)^{esime}$, etc. e l'ultima di tali serie quella sarà, che ci somministra tutti i risultati, che verrebbero col sostituire nella (*D*) i numeri successivi 0, 1, 2, 3, 4, ... Allorchè poi giungeremo ad una colonna di numeri tutti positivi, potremo qui pure, come si è detto di sopra, arrestarci, poichè inutili diverrebbero tutti gli altri termini successivi.

386. *Determinare per approssimazione il valore delle radici reali della* (*D*).

Tolte dalla (*D*) le radici uguali, e chiamata α una delle sue radici reali, trovo pel n° 382 l'intero prossimamente inferiore ad essa α, e denominatolo p suppongo

$$x = p + \frac{1}{y},$$

sostituisco nella (*D*), e mi verrà pel n° 81 una trasformata della forma

(XVII) $$A' y^m + B' y^{m-1} + C' y^{m-2} + \cdots = 0.$$

Poichè α è reale, e poichè

$$p < \alpha, \qquad p + 1 > \alpha$$

(n° 382), è chiaro, dalla

$$x = p + \frac{1}{y},$$

che per lo meno anche una radice della (XVII) dovrà essere reale e maggiore della unità. Cerco in essa (XVII) l'intero prossimamente inferiore a tal radice reale, lo chiamo q, e fatto

$$y = q + \frac{1}{u},$$

sostituisco nella (XVII), onde ne venga

(XVIII) $$A'' u^m + B'' u^{m-1} + C'' u^{m-2} + \cdots = 0.$$

Avendo qui pure la u almeno un valore reale e > 1, determino, come sopra, l'intero inferiormente più vicino ad esso, lo denomino r, e sostituisco nella (XVIII), invece della u, la quantità

$$r + \frac{1}{z};$$

mi verrà ancor quivi un'equazione

(XIX) $$A''' z^m + B''' z^{m-1} + C''' z^{m-2} + \cdots = 0,$$

in cui esistendo almeno una radice reale e > 1, cerco l'intero prossimamente ad esso minore, lo chiamo s, e proseguo ad operare sempre nella maniera medesima.

Digitized by Google

Ciò fatto, sostituisco successivamente nelle equazioni

$$x = p + \frac{1}{y}, \quad y = q + \frac{1}{u}, \quad u = r + \frac{1}{z}, \quad \ldots$$

in luogo delle

$$x, \quad y, \quad u, \quad z, \quad \ldots$$

i valori corrispondenti, e ci risulterà prossimamente

$$\text{(XX)} \qquad \alpha = p + \cfrac{1}{q + \cfrac{1}{r + \cfrac{1}{s + \cdots}}}$$

valore da ridursi in fine, pel n° 361, a frazione ordinaria.

387. Se α è razionale, la frazione continua (XX) dovrà essere finita, e quindi uno dei numeri p, q, r, s, ... dovrà essere radice esatta della equazione che gli corrisponde. Ma se α è irrazionale, la (XX) andrà all'infinito, e nessuna delle equazioni (XVII), (XVIII), (XIX), etc. avrà per radice esatta un numero intero.

388. Tra i due valori p, $p + 1$ od esiste la sola radice α, o ne esistono due, tre, etc. diverse. Nel primo di questi casi io dico che la (XVII) non potrà avere che una sola radice reale positiva maggiore della unità. Imperciocchè, se ne avesse per esempio due, e tali fossero le y', y'', sostituite queste nella

$$x = p + \frac{1}{y}$$

(n° 386), ne verrebbero i risultati

$$p + \frac{1}{y'}, \quad p + \frac{1}{y''}$$

esprimenti amendue un valore reale della x; e per conseguenza tra i due numeri p, $p + 1$ non esisterebbe già una sola radice reale della (D), ma ne esisterebbero due, contro la supposizione.

389. Quindi ne segue che, per determinare il numero q, basterà in quest'ultimo caso sostituire soltanto nel primo membro della (XVII) i numeri 1, 2, 3, 4, ... fino a quelli che ci dànno consecutivamente due risultati di segno contrario. Lo stesso si dice rapporto alle equazioni (XVIII), (XIX), etc.

390. Che se fra p, $p + 1$ hanno luogo le due radici reali α, β, allora la (XVII) avrà due radici reali positive e maggiori della unità y', y'', e per determinare gl'interi q', q'' ad esse inferiormente più prossimi converrà ricorrere al metodo dei n^{i} 382, 384. Ora q', q'' o sono due numeri fra loro disuguali, o no: se lo sono, le due supposizioni $y = q' + \frac{1}{u}$, $y = q'' + \frac{1}{u}$ condurranno a due equazioni (XVIII) diverse, ciascuna delle quali avrà una sola radice reale positiva e maggiore della unità (n° 388), e su ciascuna di esse potrà per conseguenza agevolarsi il calcolo, come nel n° prec. Ma se $q' = q''$, l'ipotesi allora di $y = q' + \frac{1}{u}$ dandoci una sola equazione (XVIII),

Digitized by Google

quest'ultima equazione avrà due radici reali positive, e quindi la determinazione dei due numeri r', r'' non potrà ricevere quell'abbreviamento di calcolo del n° prec. Simile abbreviamento però comincierà sempre ad aver luogo, e si proseguirà sempre, ogniqualvolta gl'interi r', r'', s', s'', ... risultano disuguali.

Lo stesso si dice se fra le p, $p+1$ esistono tre, quattro, o più radici reali della (D).

391. *Sciogliere per approssimazione l'equazione*

(XXI) $$x^3 - 2x - 5 = 0.$$

Determinato pel n° 379 essere l'unità il numero minore di tutte le differenze tra le radici reali della data, cerco pei n^i 382, 384 gl'interi prossimamente inferiori alle sue radici reali positive. Trovando che la (XXI) non ha che una sola radice reale positiva, e che l'intero a questa inferiormente più prossimo si è il 2, suppongo

$$x = 2 + \frac{1}{y},$$

sostituisco, e ridotta così la (XXI) alla

$$y^3 - 10y^2 - 6y - 1 = 0,$$

cerco l'intero inferiormente più vicino al valore reale positivo della y (n° 389). Trovo essere questo il 10: faccio dunque

$$y'' = 10 + \frac{1}{u},$$

e avuta la trasformata

$$61u^3 - 94u^2 - 20u - 1 = 0,$$

determino l'intero prossimamente inferiore alla sua radice reale positiva. Trovandosi tal intero $= 1$, suppongo nuovamente

$$u = 1 + \frac{1}{z},$$

onde scoprire nel modo istesso l'intero minore, e più prossimo al valore reale positivo della z, e proseguire poscia il calcolo medesimo quanto a me piace. Ora, da simili operazioni troviamo che la serie di tali numeri interi è la seguente

$$2,\ 10,\ 1,\ 1,\ 2,\ 1,\ 3,\ 1,\ 1,\ 12,\ \ldots.$$

Dunque la radice reale positiva della (XXI) sarà prossimamente

$$= 2 + \cfrac{1}{10 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{12 + \ldots}}}}}}}}};$$

Digitized by Google

e da questa frazione continua determinate pel n° 361 le successive frazioni ordinarie, avremo i rotti

$$\text{(XXII)}\quad \frac{2}{1},\ \frac{21}{10},\ \frac{23}{11},\ \frac{44}{21},\ \frac{111}{53},\ \frac{155}{74},\ \frac{576}{275},\ \frac{731}{349},\ \frac{1307}{624},\ \frac{16415}{7837},\ \ldots,$$

i quali vieppiù si accostano al vero valore della nostra radice (n° 368).

Il rotto $\frac{16415}{7837}$ differirà dal valore vero di essa radice meno della quantità

$$\frac{1}{(7837)^2} = \frac{1}{61418569} < 0,\ 000000163$$

(n° 367).

392. Nella maniera medesima cercheremo prossimamente il valore delle radici reali negative della (XXI) (n° 382). Giacchè poi ciascuna delle frazioni (XXII) s'accosta al vero valore della nostra radice quanto è mai possibile (n° 370), si vede che il nostro metodo di approssimazione è preferibile agli altri tutti.

Digitized by Google

CAPO XVIII.

DELLA SOLUZIONE PER SERIE DELLE EQUAZIONI INDETERMINATE.

393. *Data una serie finita*

(I) $$m'\alpha + n',\quad m''\alpha + n'',\quad m'''\alpha + n''',\quad m^{IV}\alpha + n^{IV},\quad \ldots,$$

ove le quantità

$$m',\quad m'',\quad m''',\quad m^{IV},\quad \ldots$$

formino una serie decrescente, le altre

$$n',\quad n'',\quad n''',\quad n^{IV},\quad \ldots$$

abbiano un valore qualunque, e la α sia un numero incognito, si domanda di determinare questa α per modo che due o più termini della data serie siano fra loro uguali e maggiori degli altri.

Affine di sciogliere questo problema, paragono il primo termine

$$m'\alpha + n'$$

con ciascuno degli altri, e ricavatine i valori

$$\alpha = \frac{n'' - n'}{m' - m''},\quad = \frac{n''' - n'}{m' - m'''},\quad = \frac{n^{IV} - n'}{m' - m^{IV}},\quad = \cdots,$$

chiamo questi

$$\alpha_1,\quad \alpha_2,\quad \alpha_3,\quad \ldots,$$

e supposto poscia il primo termine

$$m'\alpha + n' = \pi,$$

riduco la nostra serie alla forma

(II) $$\pi,\quad \pi+(m''-m')(\alpha-\alpha_1),\quad \pi+(m'''-m')(\alpha-\alpha_2),\quad \pi+(m^{IV}-m')(\alpha-\alpha_3),\quad \ldots.$$

Ciò fatto, supponiamo $\alpha =$ alla più grande delle quantità $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots$, e collochiamo questo valore nella serie (I): è chiaro, dalla serie ridotta (II), che il termine corrispondente a questa quantità più grande diverrà $= \pi$; gli altri tutti poi diverranno $< \pi$: imperciocchè, a cagione di α avente per la ipotesi il valore massimo, e di $m' > m''$, m''', m^{IV}, ..., le quantità

$$(m'' - m')(\alpha - \alpha_1),\quad (m''' - m')(\alpha - \alpha_2),\quad (m^{IV} - m')(\alpha - \alpha_3),\quad \ldots$$

sono tutte negative.

Digitized by Google

Scioglieremo dunque il problema attribuendo ad x *il massimo dei valori*

$$\alpha_1, \quad \alpha_2, \quad \alpha_3, \quad \ldots .$$

Che se due o più delle

$$\alpha_1, \quad \alpha_2, \quad \alpha_3, \quad \ldots$$

sono uguali fra loro e maggiori delle altre, si otterranno altrettanti termini uguali al primo π *e maggiori degli altri.*

394. Sia per esempio

$$9x - 1, \quad 7x + 2, \quad 3x - 4, \quad 2x + 5$$

la serie data. Paragonando questa con la (I), poichè abbiamo

$$m' = 9, \quad m'' = 7, \quad m''' = 3, \quad m^{IV} = 2,$$

$$n' = -1, \quad n'' = 2, \quad n''' = -4, \quad n^{IV} = 5,$$

sarà

$$\alpha_1 = \frac{n'' - n'}{m' - m''} = \frac{3}{2}, \quad \alpha_2 = \frac{n''' - n'}{m' - m'''} = -\frac{3}{6}, \quad \alpha_3 = \frac{n^{IV} - n'}{m' - m^{IV}} = \frac{6}{7}.$$

Ora, essendo $\alpha_1 = \frac{3}{2}$ il massimo de' risultati α_1, α_2, α_3, suppongo $x = \frac{3}{2}$, e metto questo valore nella serie proposta: risultando essa perciò,

$$\frac{25}{2}, \quad \frac{25}{2}, \quad \frac{1}{2}, \quad \frac{16}{2},$$

sciolto avremo il problema, poichè, col supporre $x = \frac{3}{2}$, abbiamo ridotta la serie ad avere i primi due termini uguali e maggiori degli altri.

Se la serie data sia la

$$6x - 13, \quad 5x - 10, \quad 4x + 7, \quad 3x - 14, \quad 2x + 27,$$

trovandosi

$$\alpha_1 = 3, \quad \alpha_2 = 10, \quad \alpha_3 = -\frac{1}{3}, \quad \alpha_4 = 10,$$

col fare $x = 10$, risulteranno fra loro uguali e maggiori degli altri, il primo, il terzo, e il quinto termine, come infatti si vede nei risultati 47, 40, 47, 16, 47.

395. *L'incognita* x*, oltre il valore precedente, altri aver ne potrebbe capaci di sciogliere il nostro problema: cerchiamo ora di determinarli.*

Attribuendo nella (II) ad x un valore più grande di tutte le quantità α_1, α_2, α_3, ..., i termini della serie diverranno tutti $< \pi$, e per conseguenza non potrà esistere alcun numero maggiore di ciascuna delle α_1, α_2, α_3, ..., il quale renda due o più termini della (I) uguali fra loro e maggiori degli altri. Se dunque esistono altri valori della x atti a sciogliere il nostro problema, questi dovranno essere tutti minori della massima delle quantità α_1, α_2, α_3, ...

Sia per esempio α_6 questa massima quantità, o, se due o più delle α_1, α_2, α_3, ... sono maggiori delle altre e $= \alpha_6$, sia α_6 l'ultima fra queste, e sia

$$\pi + (m^{VII} - m')(x - \alpha_6)$$

il termine ad essa corrispondente. Ciò presupposto, se si attribuiscano ad x dei valori $< \alpha_6$, a cagione della serie

$$m'' - m', \quad m''' - m', \quad m^{IV} - m', \quad \ldots,$$

Digitized by Google

sempre decrescente, è facile a vedersi che tutti i termini i quali precedono il termine

$$\pi + (m^{\text{VII}} - m')(\alpha - \alpha_6)$$

risultano minori di esso. Dunque potremo trascurarli, e tener conto solamente di quei che lo seguono.

Ora il termine

$$\pi + (m^{\text{VII}} - m')(\alpha - \alpha_6)$$

nella (I) altro non è che

$$m^{\text{VII}}\alpha + n^{\text{VII}},$$

e quei che seguono sono

$$m^{\text{VIII}}\alpha + n^{\text{VIII}}, \quad m^{\text{IX}}\alpha + n^{\text{IX}}, \quad \ldots :$$

dovendosi adunque, per le ulteriori soluzioni del problema, considerare soltanto questi termini, replicherò prima su di essi quanto si è operato nel n° 393, e avrò così una seconda soluzione. Per avere poi tutte le altre, ripeterò sempre, su i termini che restano successivamente, le operazioni medesime sino alla fine della serie.

396. Pertanto, la soluzione completa del presente problema (n° 393) riducesi al metodo seguente: *Si uguaglia successivamente il primo termine della serie con ciascuno dei susseguenti; e, fra i valori che acquista* α, *il maggiore sciorrà il problema. Quindi, partendo dall'ultimo dei termini che divengono massimi, uguagliasi questo a ciascuno di quelli che seguono, e tra i valori che acquista perciò* α, *il più grande scioglierà nuovamente il problema. Cominciando in seguito dall'ultimo di questi termini che divengono in secondo luogo uguali fra loro e maggiori degli altri, uguaglio questo con gli ulteriori, e ritengo il valore più grande che da ciò ottienesi per* α, *poichè questo pure soddisfa al problema, e così di seguito.*

Abbiasi per esempio la serie

$$7\alpha - 5, \quad 6\alpha + 2, \quad 5\alpha + 9, \quad 3\alpha - 6, \quad 2\alpha, \quad \alpha + 4, \quad 0.$$

Dal paragone del primo con gli altri termini si ricavano pel valore di α i numeri

$$7, \quad 7, \quad -\frac{1}{4}, \quad 1, \quad \frac{9}{6}, \quad \frac{5}{7},$$

e fra questi il 7, risultato dal paragonare il primo col secondo e col terzo termine, è il più grande. Proseguo adunque, trascurati i primi termini, a paragonare il terzo $5\alpha + 9$ con gli ulteriori; e per α ottenendosi i numeri

$$-\frac{15}{2}, \quad -3, \quad -\frac{5}{4}, \quad -\frac{9}{5},$$

il penultimo $-\frac{5}{4}$ è maggiore degli altri: paragono pertanto il penultimo termine $\alpha + 4$ con l'ultimo, e per α finalmente ci risulta il solo valore -4. Dunque α, per la soluzione del nostro problema, potrà avere tre valori diversi, cioè i tre

$$7, \quad -\frac{5}{4}, \quad -4,$$

e ne verranno quindi tre soluzioni, come in realtà si vede dai risultati che seguono,

Digitized by Google

provenienti dalle sostituzioni successive dei numeri trovati in luogo della α

1°	44,	44,	44,	15,	14,	11,	0;
2°	$-\frac{55}{4}$,	$-\frac{22}{4}$,	$\frac{11}{4}$,	$-\frac{39}{4}$,	$-\frac{10}{4}$,	$\frac{11}{4}$,	0;
3°	— 33,	— 22,	— 11,	— 18,	— 8,	0,	0.

397. Se al contrario nella data serie (I) si volesse *determinare la α per modo che due o più dei termini di essa divenissero uguali fra loro e minori degli altri, converrebbe operare affatto come nei* n^{i} *prec., attribuendo però ad α i più piccoli fra i valori che vengono per essa successivamente determinati.*

Nella serie dell'esempio precedente vedesi che, fra i primi risultati, $-\frac{1}{4}$ è il più piccolo, e che questo corrisponde al quarto termine $3\alpha - 6$. Paragono adunque questo quarto termine con i seguenti, e fra i numeri che ne vengono, 6, 5, 2, l'ultimo 2 essendo il minore, il nostro problema avrà due soluzioni, mentre cioè si faccia $\alpha = -\frac{1}{4}$, oppure $= 2$, diventando la serie nel caso

1°	$-\frac{27}{4}$,	$\frac{2}{4}$,	$\frac{31}{4}$,	$-\frac{27}{4}$,	$-\frac{2}{4}$,	$\frac{15}{4}$,	0;

e nel

2°	9,	14,	19,	0,	4,	6,	0.

398. Che se, finalmente, nella (I) le quantità

$$m', \quad m'', \quad m''', \quad m^{IV}, \quad \ldots$$

formano una serie crescente per modo che $m' < m'' < m''' < m^{IV} < \cdots$, da quanto si è detto è facile a vedersi che in allora fra i successivi valori della α i più piccoli quelli sono che sciolgono il problema del n° 393, e i più grandi l'altro del n° 397.

399. Suppongo già noto che *le quantità infinitamente piccole svaniscono rapporto alle finite, che le infinitesime, le finite, e le infinite di grado inferiore scompariscono rapporto alle infinite di grado superiore, e che finalmente le infinitamente piccole di grado superiore svaniscono riguardo alle infinitesime di grado inferiore.* Il carattere ∞ ci rappresenti l'infinito.

400. *Si domanda quale divenga un'equazione algebraica indeterminata*

$$Z = f(x)(y) = 0$$

nella supposizione di x infinita.

Qualunque siasi la supposta $f(x)(y) = 0$, è facile a vedersi che si può sempre ridurre alla forma

$$(Y) \qquad \left.\begin{array}{l} (A' x^{n'} + B' x^{p'} + C' x^{q'} + \cdots)y^{m'} \\ + (A'' x^{n''} + B'' x^{p''} + C'' x^{q''} + \cdots)y^{m''} \\ + (A''' x^{n'''} + B''' x^{p'''} + C''' x^{q'''} + \cdots)y^{m'''} \\ + (A^{IV} x^{n^{IV}} + B^{IV} x^{p^{IV}} + C^{IV} x^{q^{IV}} + \cdots)y^{m^{IV}} \\ + \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{array}\right\} = 0,$$

Digitized by Google

in cui gli esponenti

$$\begin{array}{llll} m', & m'', & m''', & m^{IV}, \ \ldots \\ n', & p', & q', & \ldots \\ n'', & p'', & q'', & \ldots \\ n''', & p''', & q''', & \ldots \\ n^{IV}, & p^{IV}, & q^{IV}, & \ldots \end{array}$$

sian tutti positivi e formino tante serie decrescenti.

Ciò dunque eseguito, facciamo x infinita. A tale supposizione dovendo pel n° prec. rapporto ad $A' x^{n'}$ svanire i termini $B' x^{p'}$, $C' x^{q'}$, ...; rapporto ad $A'' x^{n''}$ svanire i termini $B'' x^{p''}$, $C'' x^{q''}$, ...; e così di seguito, la (Y) si cangierà nella

$$\text{(III)} \qquad A' x^{n'} y^{m'} + A'' x^{n''} y^{m''} + A''' x^{n'''} y^{m'''} + A^{IV} x^{n^{IV}} y^{m^{IV}} + \cdots = 0.$$

Sia $y = L x^{\alpha}$, essendo L, α due quantità da determinarsi; sostituendo, otterremo

$$\text{(IV)} \quad A' L^{m'} x^{m'\alpha+n'} + A'' L^{m''} x^{m''\alpha+n''} + A''' L^{m'''} x^{m'''\alpha+n'''} + A^{IV} L^{m^{IV}} x^{m^{IV}\alpha+n^{IV}} + \cdots = 0.$$

Ora anche nelle due equazioni (III), (IV) non devono restare che i termini i quali contengono gl'infiniti dello stesso massimo grado (n° prec.): converrà dunque determinare quali essi siano.

Rifletto primieramente, che nella (III) non potrà giammai succedere che rimanga un solo termine, per esempio il primo $A' x^{n'} y^{m'}$; imperciocchè, se ciò fosse, l'equazione si ridurrebbe ad $A' x^{n'} y^{m'} = 0$, e quindi, prescindendo dai segni, il suo massimo termine (n° prec.) sarebbe zero, il che evidentemente è un assurdo. Dovendone dunque rimanere in essa più di uno, ne dovrà rimanere più d'uno anche nella (IV); e quelli è chiaro che rimarranno, nei quali gli esponenti della x sono uguali fra loro e maggiori degli altri.

Rifletto in secondo luogo che, in conseguenza della supposizione di $y = L x^{\alpha}$, due sono le indeterminate nuove introdotte nella (IV), cioè le due L, α; e che alle condizioni della y soddisfacendo la prima di esse, la seconda può sembrare determinabile ad arbitrio; ma entrando questa seconda nella formazione degli esponenti

$$m'\alpha + n', \quad m''\alpha + n'', \quad m'''\alpha + n''', \quad m^{IV}\alpha + n^{IV}, \quad \ldots,$$

e per quanto abbiamo ora detto, due per lo meno di questi dovendo essere uguali fra loro e maggiori degli altri, non potrà essa α già avere un valore qualunque, ma dovrà avere quello soltanto, il quale soddisfa a quest'ultima condizione.

Cerco pertanto pei n^{i} 393, 395 *quel valore della* α, *il quale è capace di rendere due o più termini della serie*

$$m'\alpha + n', \quad m''\alpha + n'', \quad m'''\alpha + n''', \quad \ldots$$

fra loro uguali e più grandi degli altri, e questo ci condurrà alla soluzione del nostro problema. Imperciocchè, chiamato α' un simil valore, e supposto che per mezzo di esso gli esponenti, per esempio

$$m'\alpha + n', \quad m'''\alpha + n''', \quad m^{VII}\alpha + n^{VII},$$

Digitized by Google

quei siano, che divengono uguali fra loro e maggiori degli altri; sostituendo, la (IV) diventerà

$$A' L^{m'} x^{m'\alpha'+n'} + A''' L^{m'''} x^{m'''\alpha'+n'''} + A^{VII} L^{m^{VII}} x^{m^{VII}\alpha'+n^{VII}} = 0;$$

ma anche la $y = Lx^{\alpha}$ diviene $y = Lx^{\alpha'}$. Dunque, se porrò in quest'ultima equazione in luogo di Lx^{α} la indeterminata y, essa cangiandosi nella

$$A' x^{n'} y^{m'} + A''' x^{n'''} y^{m'''} + A^{VII} x^{n^{VII}} y^{m^{VII}}$$

avremo così ottenuta un'equazione fra le x, y, in cui tutti i termini sono infiniti dello stesso grado, e quella per conseguenza a cui per la ipotesi di $x = \infty$ riducesi la data $Z = 0$.

401. I valori della α esser ponno più di uno (n° 395); dunque, replicando su ciascuno di essi quanto si è ora detto rapporto ad α, vedesi che saranno eziandio più di una le equazioni che per la fatta supposizione nascono da $Z = 0$; e tante queste saranno, quanti sono i valori accennati della α.

Sia per esempio

$$x^2 y^4 + a x y^4 - 5 x^3 y^3 + 3 a^2 x y^3 + a x^4 y - 3 a x^5 - 5 a^2 b^4 = 0$$

l'equazione data. Per determinare quale essa diventi per la supposizione di $x = \infty$, la scrivo primieramente come qui sotto

$$(x^2 + a x) y^4 + (-5 x^3 + 3 a^2 x) y^3 + a x^4 y - 3 a x^5 - 5 a^2 b^4 = 0$$

e svanendo in essa i termini

$$a x, \quad 3 a^2 x, \quad -5 a^2 b^4$$

rapporto ai corrispondenti

$$x^2, \quad -5 x^3, \quad -3 a x^5,$$

la riduco quindi alla

$$x^2 y^4 - 5 x^3 y^3 + a x^4 y - 3 a x^5 = 0.$$

Suppongo

$$y = L x^{\alpha},$$

sostituisco, e ottenuta la

$$L^4 x^{4\alpha+2} - 5 L^3 x^{3\alpha+3} + a L x^{\alpha+4} - 3 a x^5 = 0,$$

cerco pei n^{i} 393, 395 quei valori della α, i quali sono atti a rendere uguali fra loro e maggiori degli altri due o più degli esponenti

$$4\alpha + 2, \quad 3\alpha + 3, \quad \alpha + 4, \quad 5.$$

Ora trovo essere due questi valori, e aversi perciò

$$\alpha' = 1, \quad \alpha'' = \tfrac{2}{3};$$

sostituendo pertanto e cancellando i termini di grado inferiore, dalla precedente otterrò le due equazioni

$$L^4 x^6 - 5 L^3 x^6 = 0, \quad -5 L^3 x^5 - 3 a x^5 = 0;$$

ma dalla

$$y = L x^{\alpha}$$

ottengo ancora in corrispondenza

$$y = Lx, \quad y = L x^{\frac{2}{3}};$$

Digitized by Google

dunque sostituendo nelle rispettive equazioni, ricaveremo

$$x^2y^4 - 5x^3y^3 = 0, \quad -5x^3y^3 - 3ax^5 = 0,$$

ossia

$$y - 5x = 0, \quad 5y^3 + 3ax^2 = 0;$$

e queste saranno le equazioni a cui convertesi la data per la supposizione di $x = \infty$.

402. *Si domanda quali termini della* $Z = 0$ *divengono infiniti dello stesso grado sotto un determinato valore della* α.

Supponiamo che si ritrovi

$$\alpha = \frac{l}{k},$$

e sia questa frazione già ridotta alla sua espressione più semplice: ciò posto, i termini che si domandano io dico essere quelli, i quali formano la serie

$$\text{(V)} \qquad a'x^gy^h + b'x^{g+l}y^{h-k} + c'x^{g+2l}y^{h-2k} + d'x^{g+3l}y^{h-3k} + \cdots;$$

e qualunque altro in essa non compreso dovrà nella nostra ipotesi diventare un infinito di grado diverso. Imperciocchè, sostituendo nella (V) invece della y il valore $Lx^{\frac{l}{k}}$, tal serie diviene

$$(a'L^h + b'L^{h-k} + c'L^{h-2k} + d'L^{h-3k} + \cdots)x^{\frac{hl}{k}+g},$$

e in questo risultato tutti i termini sono evidentemente dello stesso grado $\frac{hl}{k} + g$.

Ci esprima Px^qy^p un altro termine della $Z = 0$ non contenuto nella serie (V).

Poichè, per la ipotesi di $y = Lx^{\frac{l}{k}}$, esso diventa $PL^px^{\frac{lp}{k}+q}$, se fosse un infinito del grado istesso dei precedenti, dovrebbe risultare

$$\frac{hl}{k} + g = \frac{pl}{k} + q,$$

e quindi, avendosi

$$\frac{q-g}{h-p} = \frac{l}{k},$$

le due quantità $q - g$, $h - p$ dovrebbero essere equimultiple delle due l, k, e perciò avrebbesi

$$q - g = nl, \quad h - p = nk,$$

rappresentando n un numero intero qualunque. Ora, da queste due equazioni ricavo

$$q = g + nl, \quad p = h - nk.$$

Dunque, risultando con la sostituzione

$$Px^qy^p = Px^{g+nl}y^{h-nk},$$

verrebbe questo termine ad essere compreso nella serie precedente; ma ciò è contro la supposizione. Dunque, etc.

403. *Determinare nella nostra ipotesi il valore del coefficiente* L.

Supposto $\alpha = \frac{l}{k}$, e quindi pei n^i prec. convertitasi la $Z = 0$ nella (V) $= 0$,

Digitized by Google

pongo in quest'ultima equazione $Lx^{\frac{1}{k}}$ in luogo della y. Diventando essa perciò

$$(a' L^h + b' L^{h-k} + c' L^{h-2k} + d' L^{h-3k} + \cdots) x^{\frac{hl}{k}+g} = 0,$$

la divido per $x^{\frac{hl}{k}+g}$, e avrò così la

$$a' L^h + b' L^{h-k} + c' L^{h-2k} + d' L^{h-3k} + \cdots = 0, \tag{VI}$$

equazione in L da cui potrò avere evidentemente la soluzione del problema. Poichè h è il grado di quest'ultima equazione, h saranno i valori della L.

Nell'esempio del n° 401, allorchè $\alpha = 1$, dalla

$$y - 5x = 0$$

si ricava

$$L - 5 = 0,$$

e però $L = 5$; e mentre $\alpha = \frac{2}{3}$, dalla

$$5y^3 + 3ax^2 = 0$$

si ottiene

$$5L^3 + 3a = 0,$$

e quindi

$$L = -\mu \sqrt[3]{\frac{3a}{5}},$$

rappresentando μ una qualunque delle tre radici cubiche della unità.

404. *Sciogliere il problema del* n° 400 *nella supposizione di x infinitamente piccola.*

Ridotta, come nel n° accennato, la $Z = 0$ alla (Y), ove gli esponenti m', m'', m''', m^{IV}, ... formino bensì una serie decrescente, ma gli altri

$$\begin{array}{llll} n', & p', & q', & \ldots \\ n'', & p'', & q'', & \ldots \\ n''', & p''', & q''', & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{array}$$

formino tante serie crescenti, suppongo x infinitesimo; essa $Z = 0$ pel n° 399 si cangierà nella (III), e fatto $y = Lx^{\alpha}$, otterrò la (IV). Anche in questo caso, quantunque nelle (III), (IV) vadano a svanire altri termini, pure ne dovrà sempre rimanere più di uno; imperciocchè, supposto $x = \frac{1}{z}$ e sostituito nella $Z = 0$ e nella (III), queste diventano due equazioni fra le y, z, venendo la seconda ad essere derivata dalla prima per la ipotesi di $z = \infty$. Ora, mentre $z = \infty$, l'ultima equazione risultante deve sempre contenere più di un termine (n° 400), dunque la supposizione di z infinita equivalendo perfettamente all'altra di x infinitesima, anche in quest'ultima supposizione dovrà nella equazione che risulta, e però nella nostra (III), sussistere più di un termine. Ciò dunque essendo, pel n° 397 cerco quei valori della α i quali sono atti a rendere due o più termini della serie (I) uguali fra loro e minori degli altri, e questi, sostituiti opportunamente, ci condurranno, come nel cit. n° 400 e nel n° 401, alla soluzione del problema.

Digitized by Google

Se la $Z=0$ altro non sia che l'equazione proposta ad esempio nel n° 401, scritta essa come qui sotto

$$\left.\begin{array}{l}(ax \quad + \quad x^2)y^4 \\ +(3a^2x-5x^3)y^3 \\ +ax^4y \\ -5a^2b^4-3ax^5\end{array}\right\}=0,$$

e per la ipotesi di x infinitesima ridotta in seguito alla

$$axy^4+3a^2xy^3+ax^4y-5a^2b^4=0$$

e quindi alla

$$aL^4x^{4\alpha+1}+3a^2L^3x^{3\alpha+1}+aLx^{\alpha+4}-5a^2b^4=0,$$

determino quei valori di α che sono capaci di fare uguali fra loro, e minori degli altri, due o più termini della serie

$$4\alpha+1,\quad 3\alpha+1,\quad \alpha+4,\quad 0.$$

Ora pel n° 397 ritrovo avere α il solo valore a ciò opportuno $-\frac{1}{4}$. Dunque con la sostituzione avrò

$$aL^4x^0-5a^2b^4=0,$$

e tornando a sostituire in luogo di $Lx^{-\frac{1}{4}}$ la y, ci verrà l'equazione

$$axy^4-5a^2b^4=0,$$

ovvero

$$xy^4-5ab^4=0,$$

e questa sarà la richiesta dal problema.

405. *Nella ipotesi di x infinitamente piccola, si dimostra affatto come nel* n° 402 *che gli infinitesimi dello stesso grado restano tutti compresi nella serie*

$$ax^gy^h+bx^{g+l}y^{h-k}+cx^{g+2l}y^{h-2k}+dx^{g+3l}y^{h-3k}+\cdots;$$

e il problema del n° 403 *viene sciolto qui pure come nello stesso* n° 403.

406. *Determinare quale diventi la funzione* (V) *del* n° 402 *per la supposizione di*

$$y=Lx^\alpha+u,$$

essendo

$$\alpha=\frac{l}{k}.$$

Supposto $Lx^\alpha=r$, pongo nella (V) in luogo della y la quantità $r+u$, e avremo il risultato

$$\begin{aligned}&(ax^gr^h+bx^{g+l}r^{h-k}+cx^{g+2l}r^{h-2k}+dx^{g+3l}r^{h-3k}+ex^{g+4l}r^{h-4k}+\cdots)\\&+[hax^gr^{h-1}+(h-k)bx^{g+l}r^{h-k-1}+(h-2k)cx^{g+2l}r^{h-2k-1}+(h-3k)dx^{g+3l}r^{h-3k-1}+\cdots]u\\&+\left[\frac{h(h-1)}{2}ax^gr^{h-2}+\frac{(h-k)(h-k-1)}{2}bx^{g+l}r^{h-k-2}+\frac{(h-2k)(h-2k-1)}{2}x^{g+2l}r^{h-2k-2}+\cdots\right]u^2\\&+\left[\frac{h(h-1)(h-2)}{2.3}ax^gr^{h-3}+\frac{(h-k)(h-k-1)(h-k-2)}{2.3}bx^{g+l}r^{h-k-3}+\cdots\right]u^3\\&+\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots.\end{aligned}$$

Colloco ora invece di r la quantità Lx^α, e, a cagione di $\alpha=\frac{l}{k}$, vedremo facilmente

Digitized by Google

che la (V) si cangierà così nella

$$(aL^h + bL^{h-k} + cL^{h-2k} + dL^{h-3k} + eL^{h-4k} + \cdots)x^{h\alpha+g}$$
$$+[haL^{h-1} + (h-k)bL^{h-k-1} + (h-2k)cL^{h-2k-1} + (h-3k)dL^{h-3k-1} + \cdots]x^{(h-1)\alpha+g}u$$
$$+\left[\frac{h(h-1)}{2}aL^{h-2} + \frac{(h-k)(h-k-1)}{2}bL^{h-k-2} + \frac{(h-2k)(h-2k-1)}{2}cL^{h-2k-2} + \cdots\right]x^{(h-2)\alpha+g}u^2$$
$$+\left[\frac{h(h-1)(h-2)}{2.3}aL^{h-3} + \frac{(h-k)(h-k-1)(h-k-2)}{2.3}bL^{h-k-3} + \cdots\right]x^{(h-3)\alpha+g}u^3$$
$$+ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

e perciò, chiamati F, G, H, I, ... questi coefficienti, essa (V) diventerà

$$Fx^{h\alpha+g} + Gx^{(h-1)\alpha+g}u + Hx^{(h-2)\alpha+g}u^2 + Ix^{(h-3)\alpha+g}u^3 + \cdots.$$

407. Qualunque siasi la $Z = 0$ (n° 400), e qualunque le due quantità k, l, vedesi facilmente che essa può sempre ridursi alla forma

$$\text{(VII)}\quad \left\{\begin{array}{l} a'x^{g'}y^{h'} + b'x^{g'+l}y^{h'-k} + c'x^{g'+2l}y^{h'-2k} + d'x^{g'+3l}y^{h'-3k} + \cdots \\ +a''x^{g''}y^{h''} + b''x^{g''+l}y^{h''-k} + c''x^{g''+2l}y^{h''-2k} + d''x^{g''+3l}y^{h''-3k} + \cdots \\ +a'''x^{g'''}y^{h'''} + b'''x^{g'''+l}y^{h'''-k} + c'''x^{g'''+2l}y^{h'''-2k} + d'''x^{g'''+3l}y^{h'''-3k} + \cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{array}\right\} = 0.$$

Per tal modo se

$$axy^3 + by^3 - cx^2y^2 + dxy^2 + ax^3y - fx^2y + iy + gxy - fx^4 + bx^2 + d = 0$$

sia l'equazione data, avendosi

$$g' = 1, \quad h' = 3, \quad l = 1, \quad k = 1, \quad g'' = 0, \quad h'' = 3,$$
$$g''' = 1, \quad h''' = 1, \quad g^{IV} = 0, \quad h^{IV} = 1, \quad g^{V} = 0, \quad h^{V} = 0,$$

essa si ridurrà alla forma

$$\left\{\begin{array}{l} axy^3 - cx^2y^2 + ax^3y - fx^4 \\ +by^3 + dxy^2 - fx^2y \\ +gxy + bx^2 \\ +iy \\ +d \end{array}\right\} = 0.$$

Ora se venga richiesto di sostituire nella (VII) in luogo della y la quantità

$$Lx^{\alpha} + u,$$

essendo

$$\alpha = \frac{l}{k},$$

fatta l'operazione del n° 406, è chiaro che otterremo l'equazione

$$\text{(VIII)}\quad \left\{\begin{array}{l} (F'x^{h'\alpha+g'} + F''x^{h''\alpha+g''} + F'''x^{h'''\alpha+g'''} + \cdots) \\ +(G'x^{(h'-1)\alpha+g'} + G''x^{(h''-1)\alpha+g''} + G'''x^{(h'''-1)\alpha+g'''} + \cdots)u \\ +(H'x^{(h'-2)\alpha+g'} + H''x^{(h''-2)\alpha+g''} + H'''x^{(h'''-2)\alpha+g'''} + \cdots)u^2 \\ +(I'x^{(h'-3)\alpha+g'} + I''x^{(h''-3)\alpha+g''} + I'''x^{(h'''-3)\alpha+g'''} + \cdots)u^3 \\ +\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{array}\right\} = 0,$$

Digitized by Google

in cui, apponendo gli apici opportuni, sarà

$$
\text{(IX)}\quad \begin{cases}
F = aL^h + bL^{h-k} + cL^{h-2k} + dL^{h-3k} + eL^{h-4k} + \cdots \\
G = haL^{h-1} + (h-k)bL^{h-k-1} + (h-2k)cL^{h-2k-1} + (h-3k)dL^{h-3k-1} + \cdots \\
H = \dfrac{h(h-1)}{2}aL^{h-2} + \dfrac{(h-k)(h-k-1)}{2}bL^{h-k-2} + \dfrac{(h-2k)(h-2k-1)}{2}cL^{h-2k-2} + \cdots \\
I = \dfrac{h(h-1)(h-2)}{2.3}aL^{h-3} + \dfrac{(h-k)(h-k-1)(h-k-2)}{2.3}bL^{h-k-3} + \cdots \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots
\end{cases}
$$

e, se facciamo

$$h'\alpha + g' = \pi', \quad h''\alpha + g'' = \pi'', \quad h'''\alpha + g''' = \pi''', \quad \ldots,$$

la precedente (VIII) diverrà

$$
\text{(X)}\quad \left\{\begin{array}{l}
\quad (F'x^{\pi'} + F''x^{\pi''} + F'''x^{\pi'''}) \\
+ (G'x^{\pi'-\alpha} + G''x^{\pi''-\alpha} + G'''x^{\pi'''-\alpha} + \cdots)u \\
+ (H'x^{\pi'-2\alpha} + H''x^{\pi''-2\alpha} + H'''x^{\pi'''-2\alpha} + \cdots)u^2 \\
+ (I'x^{\pi'-3\alpha} + I''x^{\pi''-3\alpha} + I'''x^{\pi'''-3\alpha} + \cdots)u^3 \\
+ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots
\end{array}\right\} = 0
$$

ossia, chiamati

$$P_1, \quad Q_1, \quad R_1, \quad S_1, \quad \ldots$$

questi coefficienti della u, diverrà

$$\text{(X)}\qquad P_1 + Q_1 u + R_1 u^2 + S_1 u^3 + \cdots = 0.$$

408. Qualunque esponente della x in P_1, prescindendo dagli apici, vedesi che viene espresso da π; qualunque esponente della x in Q_1 è rappresentato da $\pi - \alpha$; qualunque esponente in R_1, S_1, ... viene rispettivamente espresso da $\pi - 2\alpha$, $\pi - 3\alpha$, ..., e in generale gli esponenti della x in tutti i coefficienti della (X) vengono indicati da $\pi - f_1\alpha$, nascendo essi da tal formola col fare successivamente $f_1 = 0, 1, 2, 3, \ldots$, e col porre in luogo della π i valori π', π'', π''', ...

409. Facciasi nella (X)

$$u = Mx^\beta + z;$$

sostituendo ne verrà la trasformata

$$
\text{(XI)}\quad \left\{\begin{array}{l}
+ (P_1 + Q_1 Mx^\beta + R_1 M^2 x^{2\beta} + S_1 M^3 x^{3\beta} + \cdots) \\
+ (Q_1 + 2R_1 Mx^\beta + 3S_1 M^2 x^{2\beta} + \cdots)z \\
+ (R_1 + 3S_1 Mx^\beta + \cdots)z^2 \\
+ (S_1 + \cdots)z^3 \\
+ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots
\end{array}\right\} = 0,
$$

ovvero, chiamati P_2, Q_2, R_2, S_2, ... questi diversi coefficienti, avremo

$$\text{(XI)}\qquad P_2 + Q_2 z + R_2 z^2 + S_2 z^3 + \cdots = 0.$$

Poichè

$$P_2 = P_1 + MQ_1 x^\beta + M^2 R_1 x^{2\beta} + M^3 S_1 x^{3\beta} + \cdots,$$

Digitized by Google

dal n° 408 è chiaro che l'espressione generale dell'esponente della x in P_2 sarà

$$\pi - f_1\alpha + f_1\beta;$$

e quando $f_1 = 0$, da questa formola nascono gli esponenti della x in P_1; quando $f_1 = 1$, ottengonsi gli esponenti della x in MQ_1x^β; e così in progresso.

Essendo

$$Q_2 = Q_1 + 2MR_1x^\beta + 3M^2S_1x^{2\beta} + \cdots,$$

in egual modo vedremo che in questo coefficiente la x viene generalmente elevata ad un grado

$$\pi - (f_1 + 1)\alpha + f_1\beta.$$

Così in R_2 si troverà essa x innalzata ad un grado

$$\pi - (f_1 + 2)\alpha + f_1\beta,$$

in S_2 ad un grado

$$\pi - (f_1 + 3)\alpha + f_1\beta;$$

e in generale in uno qualunque dei coefficienti della (XI) l'espressione del grado della x sarà

$$\pi - (f_1 + f_2)\alpha + f_1\beta,$$

espressione nella quale dovran porsi successivamente e separatamente in luogo di amendue le lettere f_1, f_2 i numeri 0, 1, 2, 3, ..., e in luogo della π le quantità π', π'', π''', ...

410. Poniamo nuovamente nella (XI)

$$z = Nx^\gamma + t;$$

avremo la trasformata

$$\text{(XII)} \qquad \left\{\begin{array}{l} + (P_2 + Q_2Nx^\gamma + R_2N^2x^{2\gamma} + S_2N^3x^{3\gamma} + \cdots) \\ + (Q_2 + 2R_2Nx^\gamma + 3S_2N^2x^{2\gamma} + \cdots)t \\ + (R_2 + 3S_2Nx^\gamma + \cdots)t^2 \\ + (S_2 + \cdots)t^3 \\ + \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{array}\right\} = 0;$$

ossia, espressi per P_3, Q_3, R_3, S_3, ... i diversi coefficienti, si otterrà

$$\text{(XII)} \qquad P_3 + Q_3t + R_3t^2 + S_3t^3 + \cdots = 0.$$

Cercando qui pure di determinare l'esponente della x in uno qualsivoglia dei coefficienti, con raziocinio simile ai passati n^i 408, 409, non difficilmente vedremo che l'esponente della x in P_3 viene indicato da

$$\pi - (f_1 + f_2)\alpha + f_1\beta + f_2\gamma,$$

che un tale esponente in Q_3 è rappresentato da

$$\pi - (f_1 + f_2 + 1)\alpha + f_1\beta + f_2\gamma,$$

in R_3 da

$$\pi - (f_1 + f_2 + 2)\alpha + f_1\beta + f_2\gamma,$$

in S_3 da

$$\pi - (f_1 + f_2 + 3)\alpha + f_1\beta + f_2\gamma;$$

Digitized by Google

e generalmente in un coefficiente qualunque da

$$\pi - (f_1 + f_2 + f_3)\alpha + f_1\beta + f_2\gamma,$$

attribuendo, come alle lettere f_1, f_2 (n^i 408, 409), così alla f_3 successivamente i valori 0, 1, 2, 3, ...

411. Proseguendo in modo uguale a supporre

$$t = Px^\delta + S,$$

troveremo nell'istessa guisa che nella equazione risultante

$$P_4 + Q_4 S + R_4 S^2 + S_4 S^3 + \cdots = 0 \qquad \text{(XIII)}$$

i coefficienti conterranno la x generalmente ad un grado

$$\pi - (f_1 + f_2 + f_3 + f_4)\alpha + f_1\beta + f_2\gamma + f_3\delta,$$

essendo in P_4 $f_4 = 0$,

in Q_4 $f_4 = 1$,

in R_4 $f_4 = 2$,

in S_4 $f_4 = 3$,

. . . . .

412. Se proseguiamo a fare ulteriori supposizioni simili alle precedenti, ne verranno sempre delle trasformate nuove affatto somiglianti alle passate, in ciascuna delle quali gli esponenti della x potranno sempre in egual maniera determinarsi; e avendo essi un andamento costante, verran tutti rappresentati dalla formola generale

$$\pi - (f_1 + f_2 + f_3 + f_4 + f_5 + \cdots)\alpha + f_1\beta + f_2\gamma + f_3\delta + f_4\varepsilon + \cdots. \qquad \text{(XIV)}$$

413. *Sciogliere per serie l'equazione indeterminata*

$$Z = f(x)(y) = 0.$$

Liberata tale equazione dalle radici uguali (n° 306), supponiamo che sia prossimamente

$$y = Lx^\alpha + Mx^\beta + Nx^\gamma + Px^\delta + Qx^\varepsilon + \cdots, \qquad \text{(XV)}$$

e sia

$$\alpha > \beta, \quad \beta > \gamma, \quad \gamma > \delta, \quad \ldots.$$

Se determineremo opportunamente il valore degli esponenti

$$\alpha, \quad \beta, \quad \gamma, \quad \delta, \quad \varepsilon, \quad \ldots,$$

e quello dei coefficienti

$$L, \quad M, \quad N, \quad P, \quad Q, \quad \ldots,$$

avremo allora sciolto il problema. Poichè, qualunque siasi la x, questi coefficienti ed esponenti devono evidentemente esser sempre gli stessi, se noi li determineremo in un caso particolare della x, nel caso per esempio di x infinita, è chiaro che essi saranno ancora i medesimi in tutte le altre supposizioni, anche mentre la x abbia valori finiti.

Digitized by Google

Fatto pertanto $x = \infty$, e la $Z = 0$ cangiatasi perciò nella (III), e la (XV) nella

$$y = Lx^{\alpha},$$

cerco, siccome nei n^{i} 400, 401, il valore di α, e supposto che si trovi

$$\alpha = \frac{l}{k},$$

e così la (III) si riduca ad una equazione, il cui primo membro abbia la forma della (V), determino col mezzo di essa, come nel n° 403, l'equazione (VI), e quindi il valore della L, che chiamerò L'. Avremo in tal modo il primo termine

$$Lx^{\alpha} = L'x^{\frac{l}{k}},$$

e resteranno nella (XV) a conoscersi i coefficienti e gli esponenti degli altri termini Mx^{β}, Nx^{γ}, Px^{δ}, ...

414. Determinate le quantità k, l, riduco la $Z = 0$ alla (VII) (n° 407), in modo che posto Lx^{α} in luogo della y risulti

$$h'\alpha + g' > h''\alpha + g'', \quad h''\alpha + g'' > h'''\alpha + g''', \quad \ldots,$$

e supposto

(XVI) $$Mx^{\beta} + Nx^{\gamma} + Px^{\delta} + \cdots = u,$$

onde la (XV) divenga

$$y = Lx^{\alpha} + u,$$

colloco questo valore invece della y nella (VII). A cagione di

$$\alpha = \frac{l}{k}$$

essa (VII) per questa sostituzione si cangierà nella (VIII) (n° 407), e però nella (X), ove in luogo di L e di α dovran porsi i valori

$$L', \quad \frac{l}{k},$$

ed ove, a cagione di L' radice della (VI) (n° prec.) e di

$$F' = a'L'^{h'} + b'L'^{h'-k} + c'L'^{h'-2k} + d'L'^{h'-3k} + \cdots$$

(n° 407), dovrà mancare il termine

$$F'x^{h'\alpha+g'} = F'x^{\pi'}.$$

415. Supponiamo per ora che la (VI) non abbia che una sola radice $= L'$. In questa ipotesi non potendo pel n° 305 essere

$$h'a'L'^{h'-1} + (h'-k)b'L'^{h'-k-1} + (h'-2k)c'L'^{h'-2k-1} + (h'-3k)d'L'^{h'-3k-1} + \cdots = 0,$$

vedesi che nella (VIII) e nella (X) dovrà necessariamente sussistere il termine

$$G'x^{(h'-1)\alpha+g'} = G'x^{\pi'-\alpha};$$

non possiamo dire lo stesso degli altri termini, potendo benissimo uno qualunque o più di essi svanire dalle equazioni. Avvertasi però che, mentre non sia esattamente $y = L'x^{\frac{l}{k}}$, non possono tutti mancare in una volta i termini che nella (X) com-

Digitized by Google

pongono il coefficiente P_1: imperciocchè, se ciò fosse, il primo membro di essa (X) risultando divisibile esattamente per u, anche il primo membro della data (VII) sarebbe divisibile esattamente per $y - L' x^{\frac{1}{k}}$, e quindi avremmo $y =$ perfettamente ad $L' x^{\frac{1}{k}}$ (n° 21); il che presentemente supponiamo che non sia.

416. Venendo pertanto alla determinazione delle quantità

$$\beta, \quad M, \quad \gamma, \quad N, \quad \delta, \quad P, \quad \ldots,$$

e primieramente a quella di β, facciamo di nuovo x infinita. A cagione di $\pi' > \pi''$, $\pi'' > \pi'''$, ... (n° 414, 407), restando nella prima fila della (X) il solo termine

$$F'' x^{\pi''}$$

(n° 399), nella seconda il solo

$$G' x^{\pi' - \alpha} u,$$

nella terza il solo

$$H' x^{\pi' - 2\alpha} u^2, \ \ldots,$$

tale equazione diventerà

$$F'' x^{\pi''} + G' x^{\pi' - \alpha} u + H' x^{\pi' - 2\alpha} u^2 + I' x^{\pi' - 3\alpha} u^3 + \cdots = 0;$$

ma, per la fatta supposizione, la (XVI) diviene

$$u = M x^{\beta};$$

dunque sostituendo otterremo

(XVII) $$F'' x^{\pi''} + G' M x^{\pi' - \alpha + \beta} + H' M^2 x^{\pi' - 2\alpha + 2\beta} + I' M^3 x^{\pi' - 3\alpha + 3\beta} + \cdots = 0.$$

Ora, col paragonare secondo il n° 393 gli esponenti di quest'ultima equazione, per β trovansi i risultati

$$\pi'' - \pi' + \alpha, \quad \frac{\pi'' - \pi'}{2} + \alpha, \quad \frac{\pi'' - \pi'}{3} + \alpha, \quad \ldots,$$

dei quali, per essere $\pi' > \pi'' \ldots$, il minore di tutti si è il primo. Dunque, pel n° 398, dovrà essere $\beta = \pi'' - \pi' + \alpha$.

417. Per vedere se β può avere altri valori, paragono il secondo esponente

$$\pi' - \alpha + \beta$$

con gli altri che seguono (n° 395). Ora, o sussiste il termine $H' M^2 x^{\pi' - 2\alpha + 2\beta}$, o no: se sussiste, pel valore più piccolo si trova $\beta = \alpha$; se no, sussistendo per esempio l'altro che segue $H'' M^2 x^{\pi'' - 2\alpha + 2\beta}$, si trova pel valor minimo

$$\beta = \frac{\pi' - \pi''}{2} + \alpha.$$

Dunque β non potrà avere altro valore che il precedente $\pi'' - \pi' + \alpha$, poichè se ne avesse qualche altro, questo dovrebbe essere od $= \alpha$, come nel primo caso, oppure pel n° 414, $> \alpha$, come nel caso secondo, e frattanto deve essere sempre $\beta < \alpha$ (n° 413).

418. Nella ipotesi di x infinita la precedente (XVII) diviene

$$F'' x^{\pi''} + G' M x^{\pi''} = 0$$

Digitized by Google

(n° 399): dunque dividendo per $x^{\pi''}$, avremo

$$F'' + G'M = 0,$$

e però

$$M = -\frac{F''}{G'},$$

onde sarà

$$Mx^{\beta} = -\frac{F''}{G'}x^{\pi''-\pi'+\alpha}.$$

419. Se nelle (VIII), (X) oltre

$$F' = 0$$

(n° 414) fosse ancora

$$F'' = 0, \quad F''' = 0, \quad \ldots,$$

e il primo termine che sussiste fosse per esempio $F^{\nu}x^{\pi^{\nu}}$, in egual modo come nel n° 416, troverebbesi β avere il solo valore

$$\pi^{\nu} - \pi' + \alpha,$$

e troverebbesi

$$M = -\frac{F^{\nu}}{G'}.$$

420. Passiamo alla determinazione delle quantità γ, N nel termine Nx^{γ}, e prendiamo perciò l'equazione (XI). Dati alla M ed alla β i loro valori determinati nei n^{i} prec., nel coefficiente P_2 si elideranno tosto pel n° 418 i due termini

$$F'x^{\pi''} + G'Mx^{\pi'-\alpha+\beta};$$

e gli altri che restano, o si distruggono tutti, cosicchè risulta

$$P_2 = 0,$$

o no. Nel primo di questi casi divenendo la (XI) divisibile esattamente per z, la (X) lo sarà esattamente per $u - Mx^{\beta}$, e avendosi quindi $u = Mx^{\beta}$, dovrà essere esattamente

$$y = Lx^{\alpha} + Mx^{\beta},$$

terminando la serie con questi soli due termini. Che, se non risulta $P_2 = 0$, supponiamo che in esso P_2 il primo termine che sussiste abbia rapporto alla x l'esponente

$$\pi''' - f_1'\alpha + f_1'\beta$$

(n° 409), e chiamiamo questo φ'. In Q_2 essendo $G'x^{\pi'-\alpha}$ il primo termine (n° 415), $\pi' - \alpha$ sarà il primo esponente; e per considerare la cosa in generale, il primo esponente in R_2 sia

$$\pi'' - (f_1'' + 2)\alpha + f_1''\beta,$$

in S_2 sia

$$\pi^{\nu_1} - (f_1''' + 3)\alpha + f_1'''\beta, \ \ldots$$

(cit. n° 409). Ciò posto, facciamo $x = \infty$, e pongasi quindi in luogo della z il valore che risulta Nx^{γ}: dai termini che per questa supposizione e sostituzione rimangono nella (XI), vedesi che otterremo la serie di esponenti

$$\varphi', \quad \pi' - \alpha + \gamma, \quad \pi'' - (f_1'' + 2)\alpha + f_1'\beta + 2\gamma, \quad \pi^{\nu_1} - (f_1''' + 3)\alpha + f_1''\beta + 3\gamma, \quad \ldots.$$

Digitized by Google

Ora da questi pel valore di γ ottengonsi pel n° 393 i risultati

$$\varphi' - \pi' + \alpha, \quad \frac{\varphi' - \pi''}{2} + \frac{f_1''(\alpha - \beta)}{2} + \alpha, \quad \frac{\varphi' - \pi^{VI}}{3} + \frac{f_1'''(\alpha - \beta)}{3} + \alpha, \quad \ldots,$$

e fra essi, a cagione della serie π', π'', π''', ... decrescente e di $\alpha > \beta$ (n^i 414, 413), il minore di tutti è il primo: dunque sarà $\gamma = \varphi' - \pi' + \alpha$. Come poi nel n° 417, si dimostra che γ non può avere che il solo valore $\varphi' - \pi' + \alpha$.

421. Attribuito alla γ il valore ora trovato, nella solita ipotesi di x infinita, la (XI) si ridurrà alla

$$B x^{\varphi'} + G' N x^{\varphi'} = 0,$$

chiamato B il coefficiente del primo termine, che rimane in P_2; e però avendosi

$$B + G' N = 0,$$

sarà

$$N = - \frac{B}{G'},$$

e per conseguenza

$$N x^{\gamma} = - \frac{B}{G'} x^{\varphi' - \pi' + \alpha}.$$

422. Portandoci al termine $P x^{\delta}$, colloco nella (XII) in luogo delle N, γ, i loro valori (n^i 420, 421): nel coefficiente P_3 svaniranno perciò i termini

$$B x^{\varphi'} + G' N x^{\pi' - \alpha + \gamma}$$

(n° 421), e gli altri, come si è detto nei n^i 415, 420, o renderanno $P_3 = 0$, o no. Nel primo di questi casi la (XII) potrà dividersi con esattezza per t, e però anche la (XI) per $z - N x^{\gamma}$, onde avendosi $z = N x^{\gamma}$, sarà esattamente

$$y = L x^{\alpha} + M x^{\beta} + N x^{\gamma}.$$

Che se P_3 non diventa zero, l'esponente del primo termine che sussiste in P_3, sia per esempio

$$\pi^{IV} - (f_1' + f_2')\alpha + f_1'\beta + f_2'\gamma$$

(n° 410), che per brevità chiamerò φ''. In Q_3 il primo esponente già sappiamo essere $\pi' - \alpha$; in R_3 sia

$$\pi''' - (f_1'' + f_2'' + 2)\alpha + f_1''\beta + f_2''\gamma,$$

in S_3 sia

$$\pi^{VI} - (f_1''' + f_2''' + 3)\alpha + f_1'''\beta + f_2'''\gamma, \ldots.$$

Ponendo x infinita, e però $t = P x^{\delta}$, dalla (XII) avremo la serie d'esponenti

$$\varphi'', \quad \pi' - \alpha + \delta, \quad \pi''' - (f_1'' + f_2'' + 2)\alpha + f_1''\beta + f_2''\gamma + 2\delta,$$
$$\pi^{VI} - (f_1''' + f_2''' + 3)\alpha + f_1'''\beta + f_2'''\gamma + 3\delta, \quad \ldots,$$

e quindi per δ ricavandosi i valori

$$\varphi'' - \pi' + \alpha, \quad \frac{\varphi'' - \pi'''}{2} + \frac{f_1''(\alpha - \beta)}{2} + \frac{f_2''(\alpha - \gamma)}{2} + \alpha,$$
$$\frac{\varphi'' - \pi^{VI}}{3} + \frac{f_1'''(\alpha - \beta)}{3} + \frac{f_2'''(\alpha - \gamma)}{3} + \alpha, \quad \ldots$$

Digitized by Google

dovrà essere

$$\delta = \varphi'' - \pi' + \alpha,$$

poichè tutti gli altri valori sono maggiori di questo. Come poi nel n° 417, si dimostra che δ non può avere che questo solo valore.

423. Chiamato C il coefficiente del termine che nella (XII) contiene $x^{\varphi''}$ (n° 422), in conseguenza della supposizione ora fatta essa (XII) si ridurrà alla

$$Cx^{\varphi''} + G'Px^{\varphi''} = 0,$$

e però avendosi

$$P = -\frac{C}{G'},$$

sarà

$$Px^{\delta} = -\frac{C}{G'}x^{\varphi''-\pi'+\alpha}.$$

424. Proseguendo lo stesso raziocinio potranno così determinarsi tutti i coefficienti e gli esponenti ulteriori; e ciò fatto, la serie degli esponenti sarà la seguente

$$\alpha, \quad \beta = \pi'' - \pi' + \alpha, \quad \gamma = \varphi' - \pi' + \alpha, \quad \delta = \varphi'' - \pi' + \alpha, \quad \ldots,$$

essendo

$$\alpha = \frac{l}{k}, \quad \varphi' = \pi''' - f_1\alpha + f_1'\beta,$$

$$\varphi'' = \pi^{IV} - (f_1 + f_2')\alpha + f_1\beta + f_2\gamma, \ldots.$$

Col sostituire pertanto questi valori, avendosi la serie

$$\alpha = \frac{l}{k},$$

$$\beta = (\pi'' - \pi') + \frac{l}{k},$$

$$\gamma = (\pi''' - \pi') + f_1(\pi'' - \pi') + \frac{l}{k},$$

$$\delta = (\pi^{IV} - \pi') + f_1(\pi'' - \pi') + f_2'(\pi''' - \pi') + f_1'f_2(\pi'' - \pi') + \frac{l}{k},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

vedesi che, dalla formola generale

$$\text{(XVIII)} \quad \frac{l}{k} + f'(\pi'' - \pi') + f''(\pi''' - \pi') + f'''(\pi^{IV} - \pi') + f^{V}(\pi^{V} - \pi') + \cdots,$$

aver potremo il valore di tutti gli esponenti α, β, γ, δ, ... coll'attribuire successivamente alle quantità f', f'', f''', f^{IV}, ... i valori 0, 1, 2, 3, ...

425. Data pertanto l'equazione $Z = 0$, e con la sostituzione di $y = Lx^{\alpha}$ determinati i valori di α e di L (n^{i} 413, 414), e quello per conseguenza delle quantità π', π'', π''', π^{IV}, ... (n^{i} 407, 414), trovo le differenze

$$\pi' - \pi'', \quad \pi' - \pi''', \quad \pi' - \pi^{IV}, \quad \ldots$$

sottraendo dal massimo esponente π' gli altri tutti π'', π''', π^{IV}, ...; quindi dalla quantità α sottraggo la prima differenza $\pi' - \pi''$, replicandola successivamente le volte 1,

Digitized by Google

2, 3, ...; da questi risultati compresavi α levo in seguito la differenza $\pi' - \pi'''$ ripetendola successivamente le stesse volte 1, 2, 3, ...; proseguo da questi ultimi termini a togliere la differenza terza $\pi' - \pi^{IV}$ con replicarla in egual modo le volte 1, 2, 3, ..., e così operando in progresso vedesi dai n^i prec. che verremo a determinare la serie di tutti gli esponenti β, γ, δ, ...

Affine poi di conoscere i coefficienti della (XV), o ci serviremo dei metodi esposti nei n^i 418, 421, 423, dai quali apparisce che nella nostra supposizione (n° 415) tali coefficienti non sono mai che tante funzioni razionali del coefficiente L', e perciò tante quantità reali o immaginarie, secondochè essa L' è reale o immaginaria: oppure ci serviremo del metodo dei coefficienti indeterminati, col sostituire nella $Z = 0$ la quantità

$$Lx^{\alpha} + Mx^{\beta} + Nx^{\gamma} + Px^{\delta} + \cdots$$

in luogo della y, nella seguente maniera.

426. Sia

(XIX) $$xy^2 + x^2y + a^2y - b^3 = 0$$

l'equazione data a sciogliersi per serie.

Ridotta questa pel n° 400 alla

$$\left.\begin{matrix} xy^2 \\ +(x^2 + a^2)y \\ -b^3 \end{matrix}\right\} = 0,$$

e colla ipotesi di $x = \infty$, avutane la

$$xy^2 + x^2y - b^3 = 0,$$

suppongo $y = Lx^{\alpha}$ (n° 413), sostituisco, e dalla

$$L^2x^{2\alpha+1} + Lx^{\alpha+2} - b^3 = 0$$

ricavati gli esponenti $2\alpha + 1$, $\alpha + 2$, 0, col loro mezzo ritrovo pei n^i 400, 401 avere la α i due valori 1, — 2, onde si ha $\alpha' = 1$, $\alpha'' = -2$. Teniamo conto per ora del primo $\alpha' = 1$. Avendosi quindi $\frac{l}{k} = 1$ (n° 402), e però $l = 1$, $k = 1$, ed essendo

$$xy^2 + x^2y$$

i termini della data, che per questo primo valore della α divengono infiniti di maggior grado essendo a^2y, $-b^3$ gli altri successivi, scrivo pei n^i 407, 414 essa data, come qui sotto

$$\left.\begin{matrix} xy^2 + x^2y \\ +a^2y \\ -b^3 \end{matrix}\right\} = 0,$$

facendo

$$g' = 1, \quad h' = 2, \quad g'' = 0, \quad h'' = 1, \quad g''' = 0, \quad h''' = 0.$$

Avremo dunque

$$\pi' = h'\alpha + g' = 1 + 2 = 3, \quad \pi'' = h''\alpha + g'' = 1, \quad \pi''' = h'''\alpha + g''' = 0;$$

e poichè ne viene

$$\pi' - \pi'' = 3 - 1 = 2, \quad \pi' - \pi''' = 3 - 0 = 3,$$

Digitized by Google

ed abbiamo $\alpha' = 1$, pel n° preced. la serie degli esponenti verrà compresa nei numeri

$$\begin{array}{rrrrl} 1, & -1, & -3, & -5, & \ldots \\ -2, & -4, & -6, & -8, & \ldots \\ -5, & -7, & -9, & -11, & \ldots \\ -8, & -10, & -12, & -14, & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{array}$$

e quindi, scrivendo pel n° 413 tali esponenti secondo l'ordine della loro grandezza, sarà

$$y = Lx + Mx^{-1} + Nx^{-2} + Px^{-3} + Qx^{-4} + Rx^{-5} + \cdots.$$

Ripongo ora nella (XIX) invece della y questo valore, e risultandoci

$$\begin{array}{rl} xy^2 = & L^2x^3 + 2LMx + 2LN + 2LPx^{-1} + 2LQx^{-2} + 2LRx^{-3} + \cdots \\ & \qquad\qquad\qquad\qquad + M^2x^{-1} + 2MNx^{-2} + 2MPx^{-3} + \cdots \\ & \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad + N^2x^{-3} + \cdots \\ x^2y = & Lx^3 + Mx + N + Px^{-1} + Qx^{-2} + Rx^{-3} + \cdots \\ a^2y = & \qquad La^2x + \qquad + Ma^2x^{-1} + Na^2x^{-2} + Pa^2x^{-3} + \cdots \\ -b^3 = & \qquad\qquad -b^3 \end{array}$$

pel metodo dei coefficienti indeterminati ricaveremo le equazioni

$$\text{(XX)} \qquad \left\{ \begin{array}{r} L^2 + L = 0, \quad 2LM + M + La^2 = 0, \\ 2LN + N - b^3 = 0, \\ 2LP + M^2 + P + Ma^2 = 0, \\ 2LQ + 2MN + Q + Na^2 = 0, \\ 2LR + 2MP + N^2 + R + Pa^2 = 0, \ldots. \end{array} \right.$$

Ora da queste si ottiene

$$L = -1, \quad M = -a^2, \quad N = -b^3, \quad P = 0, \quad Q = a^2b^3, \quad R = b^6, \quad \ldots.$$

Dunque sostituendo avremo prossimamente

$$y = -x - \frac{a^2}{x} - \frac{b^3}{x^2} + \frac{a^2b^3}{x^4} + \frac{b^6}{x^5} + \cdots.$$

427. Passiamo all'altro valore $\alpha'' = -2$. In questo secondo caso avremo $\frac{l}{k} = -2$; e però $l = -2$, $k = 1$, e la (XIX) dovrà pel n° 414 disporsi come qui sotto

$$\left. \begin{array}{r} x^2y - b^3 \\ + xy^2 \\ + a^2y \end{array} \right\} = 0,$$

avendosi

$$g' = 2, \quad h' = 1, \quad g'' = 1, \quad h'' = 2, \quad g''' = 0, \quad h''' = 1.$$

Poichè dunque si ricava

$$\pi' = h'\alpha + g' = -2 + 2 = 0, \quad \pi'' = h''\alpha + g'' = -4 + 1 = -3, \quad \pi''' = h'''\alpha + g''' = -2,$$

e però

$$\pi' - \pi'' = 3, \quad \pi' - \pi''' = 2,$$

Digitized by Google

la serie degli esponenti in questo secondo caso sarà

$$\begin{array}{l} -2, \quad -5, \quad -8, \quad -11, \quad \ldots \\ -4, \quad -7, \quad -10, \quad -13, \quad \ldots \\ -6, \quad -9, \quad -12, \quad -15, \quad \ldots \\ -8, \quad -11, \quad -14, \quad -17, \quad \ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \end{array}$$

e però avremo

$$y = Lx^{-2} + Mx^{-4} + Nx^{-5} + Px^{-6} + Qx^{-7} + Rx^{-8} + \cdots,$$

sostituisco nella data in luogo della y questo valore, rinnovo il calcolo precedente, e ottenendosi

$$L = b^3, \quad M = -a^2 b^3, \quad N = -b^6, \quad P = a^4 b^3, \quad Q = 3a^2 b^6, \quad R = 2b^9 - a^6 b^3, \quad \ldots$$

sarà prossimamente

$$y = \frac{b^3}{x^2} - \frac{a^2 b^3}{x^4} - \frac{b^6}{x^5} + \frac{a^4 b^3}{x^6} + \frac{3a^2 b^6}{x^7} + \frac{2b^9 - a^6 b^3}{x^8} + \cdots.$$

428. I due valori ora trovati ci daranno per serie i due valori che aver deve la y nella (XIX). Osservando fra le (XX) la $L^2 + L = 0$, veggo che da questa si ha non solo $L = -1$, ma anche $L = 0$; a che dunque servirà questo secondo valore? Lo sostituisco nelle stesse (XX), e avendosi quindi

$$L = 0, \quad M = 0, \quad N = b^3, \quad P = 0, \quad Q = -a^2 b^3, \quad R = -b^6, \quad \ldots,$$

il valore della y supposto nel n° 426 diverrà

$$= \frac{b^3}{x^2} - \frac{a^2 b^3}{x^4} - \frac{b^6}{x^5} + \cdots;$$

ma questo non è che il valor della y ottenuto nel n° prec. Dunque il valore zero della L equivale all'altro di $\alpha'' = -2$ (n° prec.).

429. Passiamo presentemente alla supposizione che la (VI) abbia due radici $= L'$ (n° 415). In questa ipotesi è chiaro dalle (IX), che avremo tanto $F' = 0$, quanto $G' = 0$, ma non essendo tal radice L' ripetuta nella (VI) che solo due volte, non potrà già essere $H' = 0$. Ciò posto, e fatta $x = \infty$, sostituiscasi nella (X) la quantità Mx^β in luogo della u: mancando nei coefficienti P_1, Q_1 (n° 407) i termini $F'x^{\pi'}$, $G'x^{\pi'-\alpha}$, non si potranno dalla sostituzione aver gli esponenti π', $\pi' - \alpha + \beta$; ma nel coefficiente R_1 esistendo necessariamente il termine $H'x^{\pi'-2\alpha}$, risulterà da esso l'esponente $\pi' - 2\alpha + 2\beta$. Supponiamo pertanto, come nei n^i 419, 420, 422, che la serie dei primi esponenti, cioè degli esponenti di questi termini che sussistono nella (X) alla ipotesi di $x = \infty$, sia la seguente

(XXI) π^v, $\pi''' - \alpha + \beta$, $\pi' - 2\alpha + 2\beta$, $\pi^{vi} - 3\alpha + 3\beta$, $\pi^{vi} - 4\alpha + 4\beta$, ...

Ora, ricavandosi da questi per β i valori

$$\pi^v - \pi''' + \alpha, \quad \frac{\pi^v - \pi'}{2} + \alpha, \quad \frac{\pi - \pi^{vi}}{3} + \alpha, \quad \frac{\pi^v - \pi^{vi}}{4} + \alpha, \quad \ldots,$$

Digitized by Google

veggo che il secondo $\frac{\pi^{v} - \pi'}{2} + \alpha$ è minore di tutti i susseguenti, e può essere insieme: o minore, o maggiore, od uguale al primo $\pi^{v} - \pi''' + \alpha$. Dunque la presente supposizione di L' radice doppia della (VI) ci conduce a delle conseguenze diverse dalle ottenute nel n° 417, e quindi meritava d'essere distinta dall'ipotesi del n° 415.

430. Sia primieramente

$$\frac{\pi^{v} - \pi'}{2} + \alpha < \pi^{v} - \pi''' + \alpha;$$

pel n° 398 avremo

$$\beta = \frac{\pi^{v} - \pi'}{2} + \alpha.$$

Paragonando poi in (XXI) il terzo esponente con i susseguenti, veggo, come nel n° 417, che per β non si ricava più alcun valore opportuno.

2° Abbiasi

$$\frac{\pi^{v} - \pi'}{2} + \alpha > \pi^{v} - \pi''' + \alpha,$$

ne verrà

$$\beta = \pi^{v} - \pi''' + \alpha$$

(n° 398); ma paragonando il secondo degli esponenti (XXI) con gli altri che seguono, ottengonsi per β i risultati

$$\pi''' - \pi' + \alpha, \quad \frac{\pi''' - \pi^{vi}}{2} + \alpha, \quad \alpha, \quad \ldots.$$

Dunque, avendosi il primo di questi $< \alpha$, potrà essere ancora

$$\beta = \pi''' - \pi' + \alpha$$

(n° 395). Anche in questo secondo caso si vede, come nel n° 417, che β non può avere altro valore fuorchè i due ritrovati.

3° Sia finalmente

$$\frac{\pi^{v} - \pi'}{2} + \alpha = \pi^{v} - \pi''' + \alpha,$$

risulterà

$$\beta = \pi^{v} - \pi''' + \alpha,$$

e troveremo col solito calcolo (n° 417) non potersi dare alla β opportunamente altro valore.

431. Cercando ora di determinare il coefficiente M, osservo che, fatta la sostituzione di Mx^{β} in vece di u, in tutti e tre i casi precedenti la (X) si convertirà infine nella

(XXII) $$F^{v} x^{\pi^{v}} + G''' M x^{\pi''' - \alpha + \beta} + H' M^{2} x^{\pi' - 2\alpha + 2\beta} = 0.$$

Ma allorquando

$$\beta = \frac{\pi^{v} - \pi'}{2} + \alpha$$

(1° caso), la (XXII) diviene

$$F^{v} x^{\pi^{v}} + H' M^{2} x^{\pi^{v}} = 0,$$

Digitized by Google

e quindi si ha

$$F^{\nu} + H' M^2 = 0, \qquad M = \pm \sqrt{-\frac{F^{\nu}}{H'}} .$$

Dunque nel primo caso la quantità M avrà un doppio valore, e perciò essendo

$$M x^{\beta} = \pm x^{\frac{\pi^{\nu} - \pi' + 2\alpha}{2}} \sqrt{-\frac{F^{\nu}}{H'}} = \pm x^{\frac{\pi^{\nu} - \pi' + 2\alpha}{2}} \sqrt{-\frac{F^{\nu}}{H'}} = \pm \sqrt{-\frac{F^{\nu} x^{\pi^{\nu} - \pi' + 2\alpha}}{H'}} ,$$

potrà essere $M x^{\beta}$ tanto

$$= \sqrt{-\frac{F^{\nu} x^{\pi^{\nu} - \pi' + 2\alpha}}{H'}} ,$$

come

$$= - \sqrt{-\frac{F^{\nu} x^{\pi^{\nu} - \pi' + 2\alpha}}{H'}} .$$

2° Facciamo successivamente

$$\beta = \pi^{\nu} - \pi''' + \alpha, \qquad \beta = \pi''' - \pi' + \alpha$$

(2° caso, n° prec.); dalla (XXII) si otterranno in corrispondenza le due equazioni

$$F^{\nu} + G''' M = 0, \qquad G''' + H' M = 0.$$

Dunque ricavandosi

$$M = - \frac{F^{\nu}}{G'''} , \qquad M = - \frac{G'''}{H'} ,$$

potrà essere

$$M x^{\beta} = - \frac{F^{\nu}}{G'''} x^{\pi^{\nu} - \pi''' + \alpha},$$

ed

$$M x^{\beta} = - \frac{G'''}{H'} x^{\pi''' - \pi' + \alpha}.$$

3° Abbiasi infine

$$\beta = \pi^{\nu} - \pi''' + \alpha = \frac{\pi^{\nu} - \pi'}{2} + \alpha$$

(3° caso, n° prec.); dalla (XXII) risultando

$$F^{\nu} + G''' M + H' M^2 = 0,$$

la M avrà i due valori che si ricavano dalla soluzione di questa equazione: dunque, chiamati questi M', M'', i due risultati

$$M' x^{\pi^{\nu} - \pi''' + \alpha}, \qquad M'' x^{\pi^{\nu} - \pi''' + \alpha}$$

quelli saranno che ottiene $M x^{\beta}$ nell'ultimo dei nostri tre casi.

432. I due precedenti valori M', M'' possono essere disuguali, ed uguali fra loro. Se sono disuguali, saranno ancora disuguali fra loro i due risultati

$$M' x^{\pi^{\nu} - \pi''' + \alpha}, \qquad M'' x^{\pi^{\nu} - \pi''' + \alpha};$$

ma se quelli sono uguali, riesciranno tra loro uguali anche questi, e per $M x^{\beta}$ non si otterrà che un solo valore.

433. Il valore, o i valori della β che servono al presente caso sono diversi dall'accennato nel n° 416: dunque neppure gli esponenti ulteriori γ, δ, ... avranno pei

Digitized by Google

n^i 420, 422, 424 i valori che dipendono dalla formola generale (XVIII), e per conseguenza non potrò formare la serie

$$Lx^{\alpha} + Mx^{\beta} + Nx^{\gamma} + \cdots,$$

e sostituendola nella $Z = 0$ invece della y, determinare come nel n° 426, con l'ajuto dei coefficienti indeterminati, il valore delle quantità M, N, P, ...

434. Dovendo pertanto ricorrere ad altro mezzo, supponiamo che col metodo dei n^i 416, 418 siasi già conosciuto il valore della L e dell'α; e supponiamo che siasi trovato accadere sul termine Mx^{β} il primo o il secondo dei due casi precedenti (n° 431), od anche il terzo nella prima supposizione (n° 432). Acquistando perciò Mx^{β} due valori, chiamiamo $M'x^{\beta'}$ uno di essi, e giacchè quello che di uno si dice dicesi pur anche dell'altro, fermiamo l'attenzione sul valore $M'x^{\beta'}$. Avendosi

$$u = M'x^{\beta'} + Nx^{\gamma} + Px^{\delta} + \cdots,$$

potrò rapporto alla (X) ed alla (XVI) fare gli stessi raziocinii che si fecero nei n^i 407, 413, 414 rapporto alla $Z = 0$ ed alla (XV), mentre la (VI) non aveva che una sola radice $= L'$; e quindi scritta la (X), come giusta il n° 414 si scrisse in (VII) la $Z = 0$, sostituisco in essa $M'x^{\beta'} + z$ in vece della u, e nella equazione che risulta chiamo

$$\rho', \quad \rho'', \quad \rho''', \quad \cdots$$

i successivi esponenti della x, siccome tali esponenti nelle (VIII), (X) chiamaronsi π', π'', π''', ...; e rinnovati gli stessi discorsi dei n^i 416, 420, 422, 424, troveremo che

(XXIII) $$\beta' + g'(\rho'' - \rho') + g''(\rho''' - \rho') + g'''(\rho^{IV} - \rho') + \cdots$$

ci esprime la formola generale degli esponenti

$$\beta', \quad \gamma, \quad \delta, \quad \ldots,$$

e troveremo che i coefficienti N, P, ... si determinano dalla M' per tante equazioni del primo grado.

Ciò dunque essendo, determino, come nel n° 425, dalla (XXIII) il valore dei successivi esponenti

$$\beta', \quad \gamma, \quad \delta, \quad \ldots,$$

sostituisco nella (X) in luogo della u la quantità

$$M'x^{\beta'} + Nx^{\gamma} + Px^{\delta} + \cdots,$$

e operando, come nel n° 426, col metodo dei coefficienti indeterminati, avrò il valore cercato delle quantità M', N, P, ...

435. Venga data l'equazione

$$x^3y^2 - 3x^2y^2 + 5x^2y - 6x^4y + 9x^5 - a^4 = 0.$$

Ridotta essa pel n° 400 alla

(XXIV) $$\left.\begin{array}{l}(x^3 - 3x^2)y^2 \\ +(-6x^4 + 5x^2)y \\ +(9x^5 - a^4)\end{array}\right\} = 0,$$

Digitized by Google

col supporre $x = \infty$, ne formo la

$$x^3y^2 - 6x^4y + 9x^5 = 0,$$

e, ponendo

$$y = Lx^\alpha, \quad L^2x^{2\alpha+3} - 6Lx^{\alpha+4} + 9x^5 = 0,$$

da dove ottenendosi $\alpha = 1$, ricavo la

$$L^2 - 6L + 9 = 0.$$

Ora amendue i valori della L che si hanno da quest'ultima equazione, sono $= 3$; dunque, onde determinare le quantità M, β, N, γ, ..., non potendo pel n° 433 servire almeno per ora il metodo del n° 426, pongo nella data

$$Lx^\alpha + u = 3x + u$$

in luogo della y (n° 434), e avuto pel n° 407 il risultato

$$\left.\begin{array}{l}(-27x^4 + 15x^3 - a^4) \\ +(-18x^3 + 5x^2)u \\ +(x^3 - 3x^2)u^2\end{array}\right\} = 0 \qquad \text{(XXV)}$$

faccio qui nuovamente $x = \infty$, e nella equazione

$$-27x^4 - 18x^3u + x^3u^2 = 0,$$

che se ne ottiene, sostituisco Mx^β invece della u. Avendosi perciò

$$-27x^4 - 18Mx^{\beta+3} + M^2x^{2\beta+3} = 0,$$

troveremo essere $\beta = \frac{1}{2}$, ed $M^2 - 27 = 0$, onde $M = \pm\sqrt{27}$.

Accadendo quivi il primo dei casi del n° 430 ricorro pel n° 434 ai coefficienti indeterminati, cercando di trovare in prima il valore degli esponenti γ, δ, ... Ridotta perciò la (XXV) alla

$$\left.\begin{array}{l}x^3u^2 - 27x^4 \\ -18x^3u \\ -3x^2u^2 + 15x^3 \\ +5x^2u \\ -a^4\end{array}\right\} = 0,$$

e fatto su di questa equazione un calcolo somigliante agli esposti (n^i 407, 414), troveremo che deve essere

$$\rho' = 4, \quad \rho'' = \tfrac{7}{2}, \quad \rho''' = 3, \quad \rho^{IV} = \tfrac{5}{2}, \quad \rho^V = 0$$

(n° 407), e quindi riponendo nella (XXIII) gli opportuni valori, troveremo, come nei n^i 426, 427, che la serie degli esponenti domandati è la seguente

$$\tfrac{1}{2}, \quad 0, \quad -\tfrac{1}{2}, \quad -1, \quad -\tfrac{3}{2}, \quad -2, \quad -\tfrac{5}{2}, \quad -3, \quad \ldots.$$

Colloco pertanto in luogo della u la quantità

$$Mx^{\frac{1}{2}} + N + Px^{-\frac{1}{2}} + Qx^{-1} + Rx^{-\frac{3}{2}} + Sx^{-2} + \cdots$$

Digitized by Google

nella (XXV), e trovate, come nel n° 426, le equazioni

$$M^2 - 27 = 0,$$
$$2MN - 18M = 0,$$
$$2MP + N^2 - 3M^2 - 18N + 15 = 0,$$
$$2MQ + 2NP - 6MN - 18P + 5M = 0,$$
$$2MR + 2NQ + P^2 - 6MP - 3N^2 - 18Q + 5N = 0,$$
$$2MS + 2NR + 2PQ - 6MQ - 6NP - 18R + 5P = 0, \ldots$$

da queste ricavo

$$M = \pm 3\sqrt{3}, \quad N = 9, \quad P = \pm \frac{49}{2\sqrt{3}}, \quad Q = \frac{49}{2}, \quad R = \frac{5267}{72\sqrt{3}}, \quad S = \frac{147}{2}, \quad \ldots.$$

Dunque sarà

$$u = \pm 3\sqrt{3x} + 9 \pm \frac{49}{2\sqrt{3x}} + \frac{49}{2x} \pm \frac{213}{2x\sqrt{3x}} + \frac{147}{2x^2} \pm \cdots,$$

e per conseguenza le radici della (XXIV) saranno

$$y' = 3x + 3\sqrt{3x} + 9 + \frac{49}{2\sqrt{3x}} + \frac{49}{2x} + \frac{213}{2x\sqrt{3x}} + \frac{147}{2x^2} + \cdots$$

$$y'' = 3x - 3\sqrt{3x} + 9 - \frac{49}{2\sqrt{3x}} + \frac{49}{2x} - \frac{213}{2x\sqrt{3x}} + \frac{147}{2x^2} - \cdots.$$

436. Si verifichi la seconda supposizione del terzo caso (n° 432): accadendo in allora evidentemente alla M ed alla (X) quanto nella ipotesi del n° 429 si è asserito riguardo alla L ed alla $Z = 0$, non potremo per la determinazione delle quantità γ, N, δ, P, ... servirci del metodo indicato nel n° 434; ma converrà sostituire nella (X) invece della u la quantità $Nx^\gamma + z$, e dalla (XI) determinare prima, come si è indicato, l'esponente γ e gli altri poscia δ, ... Egualmente rapporto ad Nx^γ, o troveremo due valori diversi, come nei casi 1° e 2° del n° 431 e nella prima supposizione del caso 3° (n° 432), o troveremo, come nella supposizione seconda dello stesso caso 3°, un valore solo. Se troviamo pel termine Nx^γ due valori diversi, determinati dalla (XI) riguardo a ciascuno d'essi, come nei n^i 425, 434, gli esponenti successivi δ, ..., potremo per la determinazione dei coefficienti P, ... usare nuovamente il metodo dei coefficienti indeterminati, ponendo nella (XI) in luogo della z la quantità $Px^\delta + \cdots$: che, se troviamo per Nx^γ un valore solo, allora bisognerà di nuovo riporre nella (XI) in luogo della z la quantità $Nx^\gamma + t$, e proseguire avanti sempre il medesimo raziocinio.

437. La y, nella ipotesi del n° 429, corrispondentemente al doppio valore della L, è chiaro che deve aver due valori. Ora supponendo la $Z = 0$ liberata pel n° 413 dalle radici uguali, questi due valori devono essere disuguali fra loro; dunque anche la serie

$$Lx^\alpha + Mx^\beta + Nx^\gamma + Px^\delta + \cdots$$

dovrà avere due differenti valori, e dovrà per conseguenza o presto o tardi biforcarsi. Dunque la seconda supposizione del caso 3° (n° 432) non potrà già aver luogo rapporto

Digitized by Google

a tutti i termini successivi

$$Mx^{\beta},\ Nx^{\gamma},\ Px^{\delta},\ \ldots;$$

ma dovrà avere un limite, e supponendo che si fermi al termine per esempio Px^{δ}, gli esponenti e i coefficienti dei termini a questo ulteriori si potranno sempre determinare come nei n^{i} 425, 426, 427, 434.

438. Supposta L' reale, vedesi che, nel 2° caso del n° 430, i valori di Mx^{β} sono amendue reali, e quindi pel n° 434 sono reali tutti i termini di amendue le serie che ne derivano. Ma nel 1° e nella prima supposizione del 3° caso possono i due valori di Mx^{β} essere immaginarii, e allora pel citato n° 434 i termini delle due serie diverranno immaginarii. Nella supposizione seconda poi del 3° caso (n° 432) vedesi che il termine Mx^{β} sarà reale, e vedesi che non potremo giudicare se le serie che ne verranno siano per avere dei termini immaginarii, se non al punto della biforcazione (n° 437).

Finalmente, chiamata *semimmaginaria* una quantità come la $\sqrt{-ax^{3}}$, la quale è immaginaria mentre si prende la x con uno dei segni, nel nostro esempio col segno $+$, e diventa reale quando la x si prende col segno contrario, nella nostra ipotesi col segno $-$; apparisce dal n° 431 che nel primo soltanto dei nostri casi (n° 430) può il termine Mx^{β} essere semimmaginario, e che per conseguenza la nostra serie può contenere tali termini soltanto nel caso 1° e nella seconda supposizione del 3° (n° 432). L'esempio del n° 435 ci dà due serie con termini semimmaginarii.

439. Abbia la (VI) tre radici $= L'$: risultando perciò nella (X)

$$F' = 0,\quad G' = 0,\quad H' = 0,$$

e non già $I' = 0$ (n° 154); supponiamo che, fatto $x = \infty$ e posto nella (X) Mx^{β} invece di u, ci risulti

$$\text{(XXVI)}\qquad \begin{cases} F^{\text{IV}}x^{\pi^{\text{IV}}} + G'''Mx^{\pi'''-\alpha+\beta} + H''M^{2}x^{\pi''-2\alpha+2\beta} \\ + I'M^{3}x^{\pi'-3\alpha+3\beta} + K^{\text{VI}}M^{4}x^{\pi^{\text{VI}}-4\alpha+4\beta} + \ldots = 0. \end{cases}$$

Dalla serie degli esponenti

$$\text{(XXVII)}\quad \pi^{\text{IV}},\ \pi'''-\alpha+\beta,\ \pi''-2\alpha+2\beta,\ \pi'-3\alpha+3\beta,\ \pi^{\text{VI}}-4\alpha+4\beta,\ \ldots$$

risultando pei valori della β le quantità

$$\text{(XXVIII)}\quad \pi^{\text{IV}}-\pi'''+\alpha,\ \frac{\pi^{\text{IV}}-\pi''}{2}+\alpha,\ \frac{\pi^{\text{IV}}-\pi'}{3}+\alpha,\ \frac{\pi^{\text{IV}}-\pi^{\text{VI}}}{4}+\alpha,\ \ldots,$$

supponiamo in 1° luogo che la prima $\pi^{\text{IV}} - \pi''' + \alpha$ sia minore di tutte le altre; proseguendo in tal caso a paragonare il secondo degli esponenti (XXVI) con i successivi, troveremo che β, oltre il valore $\pi^{\text{IV}} - \pi''' + \alpha$, potrà avere anche gli altri due $\pi''' - \pi'' + \alpha$, $\pi'' - \pi' + \alpha$, oppure il solo $\frac{\pi''' - \pi'}{2} + \alpha$. Sia in 2° luogo tra le quantità (XXVIII) minima la seconda $\frac{\pi^{\text{IV}} - \pi''}{2} + \alpha$; in tal caso oltre questo valore troveremo, dagli esponenti (XXVII), che β non può avere che l'altro $\pi'' - \pi' + \alpha$.

Digitized by Google

3° Se finalmente $\frac{\pi^{IV} - \pi'}{3} + \alpha$ sia minore di tutte le altre quantità (XXVIII), vedremo dalle (XXVII) che β non potrà avere che questo solo valore.

440. Nella prima supposizione del 1° di questi tre casi è chiaro che la (XXVI) si cangierà in corrispondenza nelle tre equazioni

$$F^{IV}x^{\pi^{IV}} + G'''Mx^{\pi^{IV}} = 0, \quad G'''Mx^{2\pi'''-\pi''} + H''M^2x^{2\pi'''-\pi''} = 0,$$
$$H''M^2x^{3\pi''-\pi'} + I'M^3x^{3\pi''-\pi'} = 0,$$

e quindi per M avendosi le tre equazioni

$$F^{IV} + G'''M = 0, \qquad G''' + H''M = 0, \qquad H'' + I'M = 0,$$

il termine Mx^{β} avrà tre valori differenti fra loro, e tutti reali.

Nella supposizione seconda del 1° caso dalla (XXVI) otterremo nella stessa maniera per M le due equazioni

$$F^{IV} + G'''M = 0, \qquad G''' + I'M^2 = 0,$$

dalle quali si vede che Mx^{β} otterrà tre valori diversi, il primo sempre reale, e gli altri due o reali o immaginarii o semimmaginarii.

Nel caso 2°, ottenendosi per M le due equazioni

$$F^{IV} + H''M^2 = 0, \qquad H'' + I'M = 0,$$

verremo alle stesse conseguenze della seconda supposizione del caso 1°.

Nel caso 3° finalmente l'equazione in M sarà

$$F^{IV} + I'M^3 = 0,$$

e per conseguenza dei tre valori di Mx^{β} uno sarà reale, e due immaginarii.

441. Può succeder qui pure, come nel 3°, n° 432, che i primi due dei (XXVIII) valori siano tra loro uguali; in allora oltre il valore

$$\pi^{IV} - \pi''' + \alpha$$

otterremo per β l'altro

$$\pi'' - \pi''' + \alpha,$$

e quindi la (XXVI) riducendosi alle due

$$F^{IV}x^{\pi^{IV}} + G'''Mx^{\pi^{IV}} + H''M^2x^{\pi^{IV}} = 0, \qquad H''M^2x^{3\pi''-2\pi'} + I'M^3x^{3\pi''-2\pi'} = 0,$$

avremo per M le due equazioni

$$F^{IV} + G'''M + H''M^2 = 0, \qquad H'' + IM = 0.$$

Così nel primo caso del n° 439 potrebbe darsi che fosse

$$\pi''' - \pi'' + \alpha = \frac{\pi''' - \pi'}{2} + \alpha,$$

e allora per M si avrebbero le due equazioni

$$F^{IV} - G'''M = 0, \qquad G''' + H''M + I'M^2 = 0.$$

Finalmente, potendo essere tra loro uguali tutti e tre i primi (XXVIII) valori, in tal caso la β non avrà che un solo valore, e si avrà per M l'equazione

$$F^{IV} + G'''M + H''M^2 + I'M^3 = 0.$$

Digitized by Google

Nei primi due di questi casi è chiaro che due dei valori della M possono essere uguali fra loro, e ciò se le

$$F^{IV} + G''' M + H'' M^2 = 0,$$
$$G''' + H'' M + I' M^2 = 0$$

sono corrispondentemente due quadrati perfetti; e nel terzo, se la

$$F^{IV} + G''' M + H'' M^2 + I' M^3 = 0$$

sia un cubo, allora saranno uguali fra loro tutti e tre i valori della M.

442. In tutti gli accidenti considerati finora, dipendentemente dalla supposizione fatta nel n° 439, vedesi che si applica sempre quanto si è detto nei n^i 433, 434, 436, 437, 438; e perciò che, se i valori della M sono differenti fra loro, gli esponenti γ, δ, ... si determinano mediante la (XXIII) e le quantità N, P, ... col mezzo dei coefficienti indeterminati (n° 434). Ma se due dei valori della M oppure tutti e tre sono fra loro uguali, allora replicando quanto si disse nel n° 436 vedremo in egual modo che non potremo ricorrere per la determinazione delle quantità γ, N, δ, P, ... nè alle formole simili alle (XVIII), (XXIII), nè ai coefficienti indeterminati, se non dopo il triplice spezzamento della serie (XV).

Se

$$x^2y^3 + 3cx^2y^2 + 3c^2x^2y + c^3x^2 - c^3xy - c^4x + c^5 = 0$$

sia l'equazione data; fatti gli opportuni calcoli, come dai n^i prec., otterremo per y i tre valori

$$y' = c + c\sqrt{\frac{c}{x}} - \frac{c^2}{2x} - \frac{3c^2}{8x}\sqrt{\frac{c}{x}} - \frac{c^3}{2x^2} + \frac{105c^3}{128x^2}\sqrt{\frac{c}{x}} + \cdots,$$

$$y'' = c - c\sqrt{\frac{c}{x}} - \frac{c^2}{2x} + \frac{3c^2}{8x}\sqrt{\frac{c}{x}} - \frac{c^3}{2x^2} - \frac{105c^3}{128x^2}\sqrt{\frac{c}{x}} - \cdots,$$

$$y''' = c + \frac{c^2}{x} + \frac{c^3}{x^2} + \frac{3c^4}{x^3} + \frac{10c^5}{x^4} + \frac{49c^6}{x^5} + \cdots.$$

443. Che, se la (VI) ha quattro, cinque, etc. radici $= L'$; replicandosi sempre gli stessi raziocinii, si potranno sempre determinare nella maniera medesima le serie corrispondenti.

444. Supponiamo ora che nella (XV) gli esponenti successivi della x vadan crescendo, cosicchè $\alpha < \beta$, $\beta < \gamma$, $\gamma < \delta$, ..., e vogliasi determinare la nostra serie in questa nuova supposizione.

Il metodo a seguirsi, onde far ciò, vedrà ognuno facilmente da sè medesimo non essere diverso dall'esposto fin'ora, mentre però alla x, allorquando nel primo caso attribuivasi un valore infinitamente grande, quivi se ne attribuisca uno infinitamente piccolo (n° 399). Per conseguenza:

1° Cercando di conoscere quale divenga la $Z = 0$ nel caso di x infinitesima, seguiremo bensì il calcolo dei n^i 400, 401, ma dovremo tener conto non dei massimi, ma dei termini minimi della equazione data (n° 399); quindi scriveremo la (Y) in modo, che gli esponenti della x formino tante serie crescenti, e poscia determinando la α in

Digitized by Google

maniera che due o più termini della serie (I) divengano uguali fra loro e minori degli altri, dovremo tra i valori $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots$ tener conto dei minimi, e non dei massimi (n° 404).

2° La $Z = 0$ deve in seguito, come nel n° 407, ridursi alla (VII), ma in modo che

$$h'\alpha + g' < h''\alpha + g'', \quad h''\alpha + g'' < h'''\alpha + g''', \quad \ldots$$

(n° 414), e però nella (X) avremo

$$\pi' < \pi'', \qquad \pi'' < \pi''', \qquad \ldots$$

3° Per la determinazione degli esponenti $\beta, \gamma, \delta, \ldots$, a cagione del n° 398, dovremo nei n^i 416, 420, 422, 424, 430, 439 tener conto non dei risultati più piccoli, ma dei maggiori, e quindi per essere $\pi' < \pi''$, $\pi'' < \pi'''$, ..., le stesse formole (XVIII), (XXIII) ci daranno tutti gli esponenti che si ricercano.

Avute queste poche riflessioni, le operazioni che rimangono a farsi pel nostro intento sono affatto simili alle passate; e ciò vedremo negli esempj che seguono.

445. L'equazione data sia la (XIX). Riduco questa (n° 444, 1°) alla

$$\left.\begin{matrix} xy^2 \\ +(a^2+x^2)y \\ -b^3 \end{matrix}\right\} = 0,$$

faccio $x = \frac{1}{\infty}$, e, nel risultato

$$xy^2 + a^2y - b^3 = 0,$$

suppongo $y = Lx^\alpha$, onde avere

$$L^2x^{2\alpha+1} + a^2Lx^\alpha - b^3 = 0.$$

Dalla serie degli esponenti

$$2\alpha + 1, \quad \alpha, \quad 0,$$

(n° 444, 1°) ricavo

$$\alpha' = -1, \quad \alpha'' = 0;$$

tenendo conto del primo di questi valori, osservo che abbiamo $\frac{l}{k} = -1$, e però $l = -1$, $k = 1$, e, ridotta (n° 444, 2°) la (XIX) alla

$$\left.\begin{matrix} xy^2 + a^2y \\ -b^3 \\ +x^2y \end{matrix}\right\} = 0,$$

abbiamo

$$g' = 1, \quad h' = 2, \quad g'' = 0, \quad h'' = 0, \quad g''' = 2, \quad h''' = 1 \qquad (\text{n° } 407),$$

$$\pi' = h'\alpha' + g' = -1, \quad \pi'' = h''\alpha' + g'' = 0, \quad \pi''' = h'''\alpha' + g''' = 1.$$

Risultando adunque

$$\pi' - \pi'' = -1, \quad \pi' - \pi''' = -2,$$

cerco di determinare la serie dei nostri esponenti, e (n° 444, 3° e n° 425) verrà

Digitized by Google

questa ad essere contenuta fra i numeri

$$\begin{array}{l} -1,\ 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \ldots \\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ \ldots \\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ \ldots \\ 5,\ 6,\ 7,\ 8,\ 9,\ \ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}$$

onde la nostra serie diverrà

$$y = Lx^{-1} + Mx^0 + Nx + Px^2 + Qx^3 + Rx^4 + Sx^5 + \cdots.$$

Ora, per la determinazione dei coefficienti, mi servo del metodo istesso dei n^{i} 426, 427, e otterrò finalmente per la serie richiesta la

$$y = -a^2x^{-1} - \frac{b^3}{a^2} + \frac{b^6 - a^6}{a^6}x + \frac{a^6b^3 - 2b^9}{a^{10}}x^2 + \frac{5b^{12} - 3a^6b^6}{a^{14}}x^3 + \frac{16a^6b^9 - 3a^{12}b^3 - 18b^{15}}{a^{18}}x^4 + \frac{10a^{12}b^6 - 47a^6b^{12} + 50b^{18}}{a^{22}}x^5 + \cdots.$$

Passando all'altro valore $\alpha'' = 0$, col calcolo istesso troveremo

$$y = \frac{b^3}{a^2} - \frac{b^6}{a^6}x + \frac{2b^9 - a^6b^3}{a^{10}}x^2 + \frac{3a^6b^6 - 5b^{12}}{a^{14}}x^3 + \frac{14b^{15} - 10a^6b^9 + a^{12}b^3}{a^{18}}x^4 + \frac{35a^6b^{12} - 6a^{12}b^6 - 42b^{18}}{a^{22}}x^5 + \cdots.$$

Se l'equazione data sia la seguente

$$8x^2y^2 + 32y^2 + 8x^3y + 64xy - x^7 + 32x^2 = 0,$$

trovandosi che in essa la L ha entrambi i suoi valori uguali fra loro, si applica qui pure quanto si disse nel n° 433, e dovremo perciò eseguire il calcolo come nel n° 434; onde per y troveremo i due valori

$$y = -x + \frac{x^3}{4} + \frac{x^4}{8} - \frac{2x^5}{16} + \frac{2x^6}{32} - \frac{7x^7}{64} + \cdots,$$

$$y = -x - \frac{x^4}{8} + \frac{x^5}{16} - \frac{2x^6}{32} + \frac{4x^7}{64} + \cdots.$$

446. Queste ultime serie, nelle quali gli esponenti della x vanno sempre aumentandosi, si dicono *ascendenti*, e le prime, nelle quali gli esponenti della x van decrescendo, diconsi *discendenti*. Per la natura delle potenze le discendenti hanno la proprietà di convergere tanto più verso il vero valore della y, quanto è più grande il valore che attribuiscesi alla x: ma allorchè alla x si dà un valor troppo piccolo, le nostre serie divengono necessariamente divergenti, e divengono quindi inutili onde avere per approssima-

Digitized by Google

zione i valori corrispondenti della y. Allorquando però mancano le serie discendenti, ricorrer possiamo alle ascendenti; queste al contrario delle prime tanto più son convergenti, quanto è più piccolo il valor della x, e divengono poi divergenti mentre alla x attribuisconsi dei valori troppo grandi. Sì le une adunque che le altre son necessarie a trovarsi, affine di avere la soluzione che si richiede della $Z = 0$.

Digitized by Google

CAPO XIX.

DELLA SOLUZIONE PER SERIE DELLE EQUAZIONI ALGEBRAICHE DETERMINATE.

---

447. *Trovare una formola generale ed un metodo spedito, onde elevare ad una qualunque potenza h la quantità*

$$(I) \qquad y = Lx^{\alpha} + Mx^{\alpha-1} + Nx^{\alpha-2} + Px^{\alpha-3} + Qx^{\alpha-4} + Rx^{\alpha-5} + \cdots .$$

Alla soluzione di questo problema conviene premettere le riflessioni seguenti.

Elevando ad una qualunque potenza h la quantità

$$Lx^{\alpha} + Mx^{\beta} + Nx^{\gamma} + Px^{\delta} + Qx^{\varepsilon} + \cdots ,$$

sappiamo che un qualsivoglia termine del risultato viene espresso dal termine generale

$$(II) \qquad \frac{1.2.3.4.5 \ldots h}{1.2.3 \ldots a.\ 1.2.3 \ldots b.\ 1.2.3 \ldots c.\ 1.2.3 \ldots d \ldots} L^a M^b N^c P^d \ldots x^{a\alpha+b\beta+c\gamma+d\delta+\ldots} .$$

in cui gli esponenti a, b, c, d, e, ... sono tutti numeri interi positivi, e la loro somma è $= h$.

Ora nel nostro caso abbiamo

$$\beta = \alpha - 1, \quad \gamma = \alpha - 2, \quad \delta = \alpha - 3, \quad \varepsilon = \alpha - 4, \quad \ldots .$$

Dunque sostituendo ne verrà l'esponente

$$\begin{gathered} a\alpha + b\beta + c\gamma + d\delta + e\varepsilon + \cdots \\ = a\alpha + b(\alpha - 1) + c(\alpha - 2) + d(\alpha - 3) + e(\alpha - 4) + \cdots \\ = (a + b + c + d + e + \cdots)\alpha - (b + 2c + 3d + 4e + \cdots) \\ = h\alpha - (b + 2c + 3d + 4e + \cdots); \end{gathered}$$

e per conseguenza, supposto

$$(III) \qquad b + 2c + 3d + 4e + \cdots = g,$$

in un termine qualunque della nostra potenza l'esponente della x dovrà essere della forma $h\alpha - g$.

Digitized by Google

448. Supponiamo le equazioni

$$\text{(IV)}\qquad \begin{cases} a+b+c+d+e+f+\cdots = h, \\ b+c+d+e+f+\cdots = q, \\ c+d+e+f+\cdots = r, \\ d+e+f+\cdots = s, \\ e+f+\cdots = t, \\ f+\cdots = u, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{cases}$$

La prima di queste equazioni non è che l'accennata nel n° prec. Sottraendo poi la seconda dalla prima, la terza dalla seconda, la quarta dalla terza, ..., ne vengono i risultati

$$a = h - q, \quad b = q - r, \quad c = r - s, \quad d = s - t, \quad e = t - u, \quad \ldots :$$

dunque

$$h - q, \quad q - r, \quad r - s, \quad s - t, \quad t - u, \quad \ldots$$

altro non sono che gli esponenti delle successive quantità L, M, N, P, Q, ..., e per conseguenza l'esponente della L non potrà essere $> h$, l'esponente della M non potrà essere $> q$, quella della N non potrà essere $> r$, etc.

449. *Corrispondentemente a un dato esponente* $h\alpha - g$ *della* x (n° 447) *essendo* $h - q$ *l'esponente della* L (n° prec.), *non potrà giammai risultare* $q > g$.

Allorchè nella nostra potenza si eleva il termine Lx^{α} alla podestà $h - q$, supponiamo che resti moltiplicato col termine $Tx^{\alpha-k}$ elevato alla potenza r, con l'altro $T'x^{\alpha-k'}$ alla podestà r', col terzo $T''x^{\alpha-k''}$ alla podestà r'', etc.: ciò essendo, l'esponente della x nel risultato sarà

$$\begin{aligned} &(h-q)\alpha + r(\alpha - k) + r'(\alpha - k') + r''(\alpha - k'') + \cdots \\ &= (h - q + r + r' + r'' + \cdots)\alpha - (rk + r'k' + r''k'' + \cdots), \end{aligned}$$

e però avendosi

$$(h - q + r + r' + r'' + \cdots)\alpha - (rk + r'k' + r''k'' + \cdots) = h\alpha - g,$$

otterremo

$$h - q + r + r' + r'' + \cdots = h, \quad rk + r'k' + r''k'' + \cdots = g,$$

e quindi

$$q = r + r' + r'' + r''' + \cdots .$$

Ora, per essere

$$r, \quad r', \quad r'', \quad \ldots, \quad k, \quad k', \quad k'', \quad \ldots$$

tutti numeri interi e positivi, non può mai riescire

$$rk + r'k' + r''k'' + \cdots < r + r' + r'' + \cdots :$$

dunque non potrà essere neppure $q > g$.

450. Essendo l'esponente

$$a = h - q,$$

il susseguente h, o sarà $= q$, o minore (n° 448); se gli è uguale, allora tutti gli altri

Digitized by Google

esponenti c, d, e, f, ... uguaglieranno lo zero; se poi gli è minore, allora avendosi

$$b = q - r$$

(n° 448), dovrà risultare $c = r$, oppure $c < r$; se $c = r$, ne verrà $d = 0$, $e = 0$, $f = 0$, ...; che se $c < r$, risultando $c = r - s$, nuovamente sarà $d = s$, ovvero $d < s$; nel primo caso avremo $e = 0$, $f = 0$, ..., nel secondo $d = s - t$, e quindi l'esponente e, o si vuole $=$, oppure $< t$; se $e = t$, ne viene $f = 0$, ..., e se $e < t$, potremo proseguire innanzi le medesime riflessioni.

Inoltre, nel caso che sia $b = q$, dalla (III) vedesi che dovrà risultare $b = g$; allorquando poi $b < q$, se si vuole $c = r$, per la stessa (III) dovrà essere $b + 2c = g$; che se $c < r$, e $d = s$, dovrà venirne $b + 2c + 3d = g$; nel caso che $d < s$, se sia $e = t$, avremo $b + 2c + 3d + 4e = g$; così nella ipotesi della $f = u$, ne verrà $b + 2c + 3d + 4e + 5f = g$; e così in progresso.

451. Dunque:

1° Non potrà essere $b = q$, che quando $q = g$.

2° Nel caso che

$$b < q \quad \text{e} \quad c = r,$$

ci risulta

$$b + 2c = g, \quad b + c = q:$$

moltiplico ora la seconda di queste equazioni per 2, sottraggo da essa la prima, e otterremo

$$b = 2q - g;$$

ma $c = \frac{g - b}{2}$, dunque sostituendo sarà

$$c = g - q.$$

3° Allorquando $c < r$, se si vuole $d = s$, avremo

$$b + c + d = q.$$

Ora, sottraendo da questa equazione moltiplicata per 3 l'altra

$$b + 2c + 3d = g$$

(n° prec.), ottiensi

$$2b + c = 3q - g;$$

dunque, essendo

$$b = q - r$$

(n° 448), ne verrà

$$c = q - g + 2r,$$

e, a cagione di $d = \frac{g - b - 2c}{3}$, ricaveremo

$$d = g - q - r.$$

4° Nella ipotesi della $d < s$, e della $e = t$, risultando

$$b + c + d + e = q, \quad b + 2c + 3d + 4e = g,$$

ci verrà

$$3b + 2c + d = 4q - g;$$

ma

$$b = q - r, \quad c = r - s$$

(n° 448); dunque

$$d = q - g + r + 2s;$$

Digitized by Google

e, avendosi

$$e = \frac{g - b - 2c - 3d}{4},$$

otterremo

$$e = g - q - r - s.$$

5° Quando $e < t$, ed $f = u$, dalle

$$b + c + d + e + f = q, \qquad b + 2c + 3d + 4e + 5f = g$$

avremo

$$4b + 3c + 2d + e = 5q - g,$$

e quindi pel n° 448 ci risulterà

$$e = q - g + r + s + 2t, \qquad f = g - q - r - s - t.$$

Lo stesso si dice in seguito.

452. Supposto

$g - q = \varphi'$, $g - q - r = \varphi''$, $g - q - r - s = \varphi'''$, $g - q - r - s - t = \varphi^{IV}$, ...,

da quanto si è detto finora vedesi che, nel coefficiente di x^{hg-g}, le potenze e i prodotti dei coefficienti M, N, P, Q, R, ... che moltiplicano L^{h-q} non ponno che essere i seguenti

$$M^q, \quad M^{2q-g} N^{g-q}, \quad M^{q-r} N^{2r-\varphi'} P^{\varphi'-r}, \quad M^{q-r} N^{r-s} P^{2s-\varphi''} Q^{\varphi''-s},$$
$$M^{q-r} N^{r-s} P^{s-t} Q^{2t-\varphi'''} R^{\varphi'''-t}, \quad \ldots.$$

Dunque, trascurati per ora a maggior comodo i coefficienti e i divisori numerici, quella porzione di esso coefficiente che moltiplica L^{h-q}, sarà espressa in generale dalla formola

$$(V) \quad \begin{cases} L^{h-q}(M^q + M^{2q-g} N^{g-q} + M^{q-r} N^{2r-\varphi'} P^{\varphi'-r} \\ + M^{q-r} N^{r-s} P^{2s-\varphi''} Q^{\varphi''-s} + M^{q-r} N^{r-s} P^{s-t} Q^{2t-\varphi'''} R^{\varphi'''-t} + \cdots), \end{cases}$$

formola, nella quale:

1° Gli esponenti debbono essere tutti numeri interi e positivi (n° 447).

2° Il termine secondo deve necessariamente contenere il coefficiente N (n^i 450, 451), il terzo deve contenere il coefficiente P, il quarto il coefficiente Q, il quinto il coefficiente R, etc.

3° Finalmente, non tutti i termini della formola sussistono in una volta, ma di essi ora sussistono gli uni ed ora gli altri, giusta i valori diversi delle q, r, s, t, ...; secondo poi la diversità di tali valori da un solo termine della (V) possono derivarne varii.

453. Dunque se, dando alle quantità

$$q, \quad r, \quad s, \quad t, \quad \ldots$$

certi valori, qualcuno degli esponenti

$$q - r, \quad r - s, \quad s - t, \quad \ldots$$

diventa negativo e qualcuno dei

$$g - q, \quad \varphi' - r, \quad \varphi'' - s, \quad \varphi''' - t, \quad \ldots$$

diventa zero, allora nella formola non esiste nè il termine nel quale esso esponente diviene rispettivamente negativo, o zero, nè i susseguenti. Che, se diventa negativa qualcheduna delle quantità

$$2q - g, \quad 2r - \varphi', \quad 2s - \varphi'', \quad 2t - \varphi''', \quad \ldots,$$

Digitized by Google

in tal caso mancherà bensì il termine in cui questa quantità si fa negativa, ma possono sussistere alcuni dei termini che seguono. Tutto questo apparisce dalla formola stessa (V), e da quanto si è detto nel n° prec.

454. Attribuiscansi successivamente alla q i valori esposti in (VI) nella prima colonna verticale fino inclusivamente allo zero. Poichè le quantità $r, s, t, \ldots$ non sono legate ad altra condizione, che a quella di essere interi positivi, e di rendere ciascuno degli esponenti

$$q-r,\quad r-s,\quad s-t,\quad \ldots,\quad 2q-g,\quad 2r-\varphi',\quad 2s-\varphi'',\quad 2t-\varphi''',\quad \ldots\quad >-1$$

e ciascuno degli altri

$$g-q,\quad \varphi'-r,\quad \varphi''-s,\quad \varphi'''-t,\quad \cdots > 0,$$

attribuisco successivamente ad esse $r, s, t, \ldots$ i valori a ciò opportuni, avendo sempre in vista quanto si è detto nei n^{i} prec., e specialmente nel n° 453; e con tali operazioni troveremo non difficilmente risultarci dalla formola (V) le quantità esposte in (VI) nelle linee corrispondenti ai successivi valori della q.

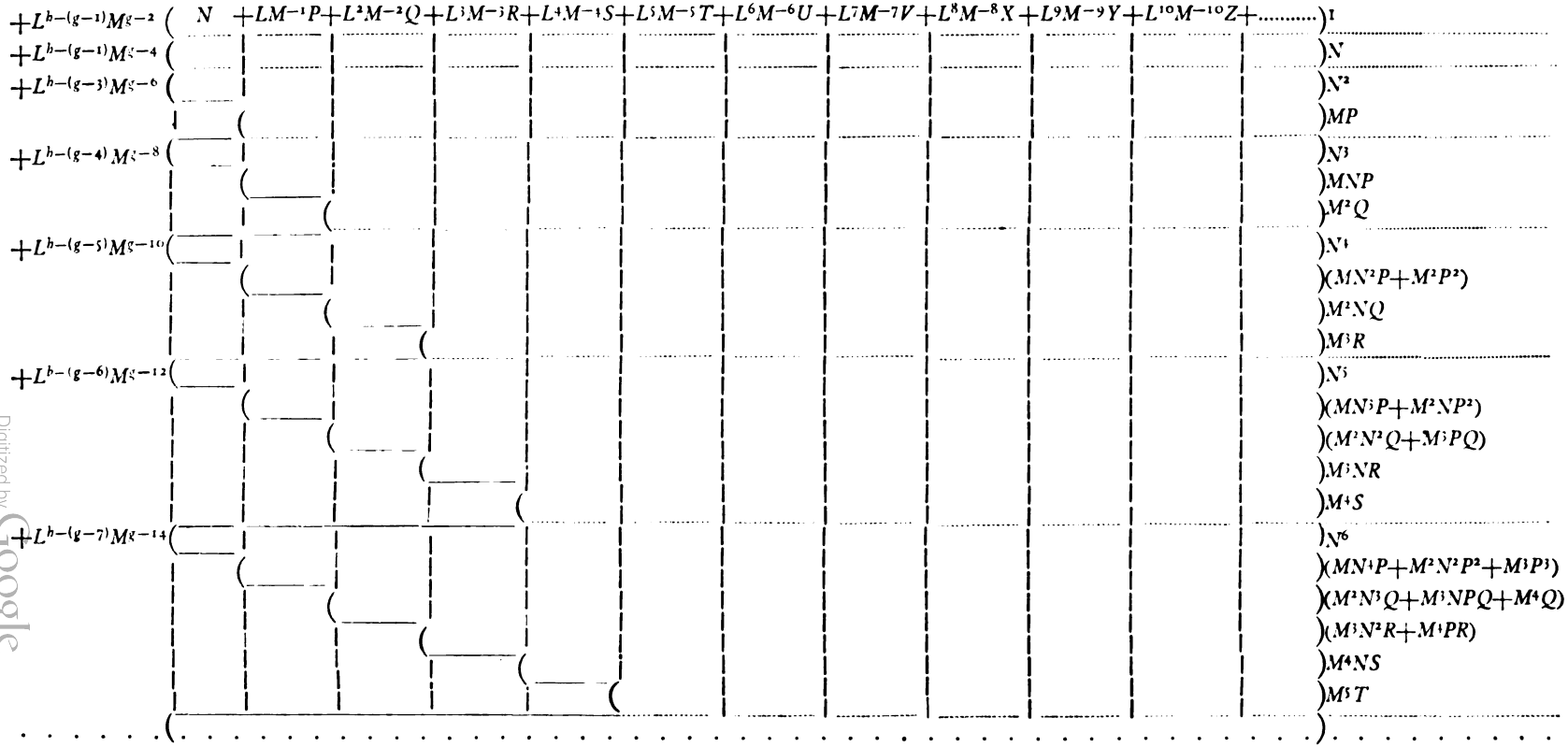
(VI)
$$\left|\begin{array}{ll}
q=g, & L^{h-g}M^{g},\\
q=g-1, & L^{h-(g-1)}M^{g-2}N,\\
q=g-2, & L^{h-(g-2)}(M^{g-4}N^{2}+M^{g-3}P),\\
q=g-3, & L^{h-(g-3)}(M^{g-6}N^{3}+M^{g-5}NP+M^{g-4}Q),\\
q=g-4, & L^{h-(g-4)}(M^{g-8}N^{4}+M^{g-7}N^{2}P+M^{g-6}P^{2}+M^{g-6}NQ+M^{g-5}R),\\
q=g-5, & L^{h-(g-5)}(M^{g-10}N^{5}+M^{g-9}N^{3}P+M^{g-8}NP^{2}+M^{g-8}N^{2}Q\\
 & \quad +M^{g-7}PQ+M^{g-7}NR+M^{g-6}S),\\
q=g-6, & L^{h-(g-6)}(M^{g-12}N^{6}+M^{g-11}N^{4}P+M^{g-10}N^{2}P^{2}+M^{g-10}N^{3}Q\\
 & \quad +M^{g-9}P^{3}+M^{g-9}NPQ+M^{g-9}N^{2}R+M^{g-8}Q^{2}+M^{g-8}PR\\
 & \quad +M^{g-8}NS+M^{g-7}T),\\
q=g-7, & L^{h-(g-7)}(M^{g-14}N^{7}+M^{g-13}N^{5}P+M^{g-12}N^{3}P^{2}+M^{g-12}N^{4}Q\\
 & \quad +M^{g-11}NP^{3}+M^{g-11}N^{2}PQ+M^{g-11}N^{3}R+M^{g-10}P^{2}Q\\
 & \quad +M^{g-10}NQ^{2}+M^{g-10}NPR+M^{g-10}N^{2}S+M^{g-9}QR\\
 & \quad +M^{g-9}PS+M^{g-9}NT+M^{g-8}U),\\
q=g-8, & L^{h-(g-8)}(M^{g-16}N^{8}+M^{g-15}N^{6}P+M^{g-14}N^{4}P^{2}+M^{g-14}N^{5}Q\\
 & \quad +M^{g-13}N^{2}P^{3}+M^{g-13}N^{3}PQ+M^{g-13}N^{4}R+M^{g-12}P^{4}\\
 & \quad +M^{g-12}NP^{2}Q+M^{g-12}N^{2}Q^{2}+M^{g-12}N^{2}PR+M^{g-12}N^{3}S\\
 & \quad +M^{g-11}PQ^{2}+M^{g-11}P^{2}R+M^{g-11}NQR+M^{g-11}NPS\\
 & \quad +M^{g-11}N^{2}T+M^{g-10}R^{2}+M^{g-10}QS+M^{g-10}PT\\
 & \quad +M^{g-10}NU+M^{g-9}V),\\
 & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{array}\right.$$

455. Volendosi raccogliere tutti questi risultati (VI), osservo procedere essi con una certa regola, per cui potremo non difficilmente unirli tutti insieme proseguendoli fino alla supposizione di $q = 0$, indipendentemente dalla formola (V), nella maniera che segue:

Digitized by Google

(VII)

$L_6^{h-g}M^g$



Digitized by Google

Scritto primieramente in (VII) il primo termine

$$L^{h-g} M^g,$$

pongo al disotto in una prima riga tutti i termini

$$L^{h-(g-1)} M^{g-2} N, \quad L^{h-(g-2)} M^{g-3} P, \quad L^{h-(g-3)} M^{g-4} Q, \quad \ldots,$$

che in (VI) occupano l'ultimo luogo dei risultati successivi; ma per maggiore semplicità scrivo questi termini collocando fra due parentesi le quantità N, $L M^{-1} P$, $L^2 M^{-2} Q$, ..., e apponendo al principio, come fattore comune, il termine

$$L^{h-(g-1)} M^{g-2},$$

e al fine la unità.

Accresco in seguito nell'accennato $L^{h-(g-1)} M^{g-2}$ di 1 l'esponente della L, diminuisco di 2 l'esponente della M, e scritto il risultato $L^{h-(g-2)} M^{g-4}$ in una seconda riga, pongo presso di questo fra due parentesi i termini esistenti fra le parentesi della riga precedente: finalmente, moltiplicata per N la unità posta alla destra della linea prima, colloco il risultato N nel fine della riga seconda. Perchè poi fra le parentesi di questa seconda riga non tornerei che a scrivere gli stessi termini della prima, lascierò vuoto il luogo compreso fra tali parentesi, intendendo che debba questo venire occupato dai termini che vi stanno sopra; e per distinguere le due righe tirerò fra esse una linea punteggiata.

Aumentato nuovamente in $L^{h-(g-2)} M^{g-4}$ di 1 l'esponente della L, e diminuito di 2 l'esponente della M, ripongo il termine $L^{h-(g-3)} M^{g-6}$ in una terza riga, vi scrivo appresso fra due parentesi gli stessi termini della riga prima, o per meglio dire intendo che tali termini debbansi comprendere fra le parentesi della riga terza lasciate esse pur vuote come le precedenti, e tiro fra la seconda e la terza riga una linea punteggiata. In seguito, moltiplicata per N la quantità N, che è posta al fine della riga seconda, moltiplicata per MP la unità posta alla destra della riga prima, moltiplico per N^2 tutti i termini della terza riga, e moltiplico per MP i termini stessi, toltone il primo N. Affine poi d'indicare con brevità i termini che moltiplicano MP, senza scriverli di nuovo, ho poste, seguendo l'accennata regola, al disotto delle terze parentesi altre due parentesi, la prima delle quali escluda il primo termine N; e intendo che entro delle medesime vengano opportunamente comprese le quantità che nella prima riga esistonvi sopra. Perchè poi tanto le quantità appartenenti alle terze parentesi, come quelle le quali spettano alle quarte, si devono moltiplicare per $L^{h-(g-3)} M^{g-6}$, perciò considero che tutte queste insieme formino una sola riga divisa in due parti, e segno la linea punteggiata sotto delle parentesi quarte.

Proseguendo col metodo istesso, s'immaginino scritti fra due parentesi, opportunamente collocate in una quarta riga, i termini esistenti fra le parentesi della prima, e

Digitized by Google

pongasi innanzi, come precedentemente, il termine $L^{h-(g-4)}M^{g-8}$. Ciò fatto, si moltiplichi per N la quantità N^2 apposta alla prima parte della riga terza, per MP la quantità N apposta alla riga seconda, e per M^2Q la quantità 1 apposta alla riga prima, e, avuti i tre risultati N^3, MNP, M^2Q, si moltiplichi pel primo tutta la riga quarta, pel secondo la stessa riga diminuita del primo termine N, e pel terzo essa medesima diminuita dei primi due termini N, $LM^{-1}P$. Per brevità poi di scrivere indicheremo simili moltiplicazioni come precedentemente. Osservando poi che la riga quarta è formata di tre parti, e che ciascuna di queste deve moltiplicarsi per $L^{h-(g-4)}M^{g-8}$, perciò tiro al disotto delle ultime parentesi la solita linea punteggiata.

Formo nella solita guisa la quinta riga, ma la formo componendola di quattro parti; poscia moltiplico per N la quantità N^3 apposta alla parte prima della riga quarta, per MP le due N^2, MP spettanti alla riga terza, per M^2Q la N spettante alla riga seconda, e per M^3R l'unità appartenente alla riga prima; e ottenuti i prodotti N^4, $MN^2P + M^2P^2$, M^2NQ, M^3R, moltiplico pel primo di essi la prima parte della riga quinta, moltiplico pel secondo la parte seconda, pel terzo la terza, e pel quarto la quarta.

Passando a formare la riga sesta, scrivo questa secondo la solita regola, componendola di cinque parti: in seguito, moltiplicata per N la quantità N^4 annessa alla parte prima della riga quinta, moltiplicate per MP le due N^3, MNP spettanti alle prime due parti della quarta linea, per M^2Q le N^2, MP apposte alla riga terza, per M^3R la N appartenente alla riga seconda, e finalmente per M^4S la unità della riga prima, porrò il primo di questi prodotti nella riga sesta al fine della prima parte, il prodotto secondo al fine della parte seconda, il terzo al fine della terza, e così di seguito.

In generale, seguendo sempre lo stesso metodo, otterrò una riga qualunque, per esempio la m^{esima}. A tal fine non avrò che a comporre essa in primo luogo di $m-1$ parti, poscia moltiplicherò tutta la medesima per $L^{h-(g-m)}M^{g-2m}$, e finalmente, moltiplicata per N la quantità apposta alla prima parte della riga $(m-1)^{esima}$, moltiplicate per MP le due quantità esistenti alla destra delle prime due parti della $(m-2)^{esima}$ riga, per M^2Q le tre quantità appartenenti alle tre prime parti della $(m-3)^{esima}$ riga, per M^3R le quantità spettanti alle quattro parti prime della riga $(m-4)^{esima}$, e così in progresso, collocherò tutti questi prodotti al fine della nostra riga m^{esima}, ponendo il primo al fine della parte prima, il secondo alla destra della seconda, il terzo al fine della terza, e così di seguito.

Col proseguire ad operare in tal guisa fino inclusivamente alla riga g^{esima}, verremo a scrivere il complesso di tutti i termini (VI), e la ragione di questa operazione deducesi dall'osservare attentamente l'andamento dei termini medesimi. Conviene però avvertire che, nell'effettuare in (VII) le indicate moltiplicazioni, dovremo (n° 452, 1°) tener conto in ciascuna riga non già di tutti i termini, ma di quei soltanto nei quali gli esponenti della M risultano non negativi. Perciò tra le parentesi della prima riga estenderemo i termini N, $LM^{-1}P$, ... fino a quello inclusivamente, in cui l'esponente della M diviene $-(g-2)$. Entro le parentesi della riga seconda non oltrepasseremo

Digitized by Google

il termine in cui l'esponente della M diventa $-(g-4)$. I termini fra le parentesi della riga terza si proseguiranno nella prima parte fino all'esponente $-(g-6)$ della M, e nella parte seconda fino all'esponente $-(g-5)$. Così nella riga quarta gli accennati termini si estenderanno nella prima parte fino all'esponente $-(g-8)$, nella parte seconda fino all'esponente $-(g-7)$, e nella terza fino all'esponente $-(g-6)$. La riga quinta conterrà tali termini fino a quello nella prima parte, che ha l'esponente $-(g-10)$; li conterrà nella parte seconda fino al termine il cui esponente è $-(g-9)$, allorchè essa parte si moltiplica per MN^2P, e fino al termine di esponente $-(g-8)$, quando tal parte viene a moltiplicarsi per M^2P^2; essi termini poi nella parte terza si proseguiranno sino all'esponente $-(g-8)$, e sino all'altro $-(g-7)$ nella parte quarta. Le stesse riflessioni devonsi sempre eseguire rapporto alle righe susseguenti.

456. Chiamiamo Π tutta la quantità espressa in (VII) e chiamati Π', Π'', Π''', Π^{IV}, ... i risultati che da questa si hanno per la successiva supposizione di $g = 0, 1, 2, 3, \ldots$, otterrò

$$
\text{(VIII)}\quad
\begin{cases}
\Pi' = L^h, \\
\Pi'' = L^{h-1}M, \\
\Pi''' = L^{h-2}M^2 + L^{h-1}N, \\
\Pi^{IV} = L^{h-3}M^3 + L^{h-2}MN + L^{h-1}P, \\
\Pi^{V} = L^{h-4}M^4 + L^{h-3}M^2N + L^{h-2}MP + L^{h-1}Q + L^{l-2}N^2, \\
\Pi^{VI} = L^{h-5}M^5 + L^{h-4}M^3N + L^{h-3}M^2P + L^{h-2}MQ + L^{h-1}R \\
\qquad + L^{h-3}MN^2 + L^{h-2}NP, \\
\Pi^{VII} = L^{h-6}M^6 + L^{h-5}M^4N + L^{h-4}M^3P + L^{h-3}M^2Q + L^{h-2}MR + L^{h-1}S \\
\qquad + L^{h-4}M^2N^2 + L^{h-3}MNP + L^{h-2}NQ + L^{h-3}N^3 + L^{h-2}P^2, \\
\Pi^{VIII} = L^{h-7}M^7 + L^{h-6}M^5N + L^{h-5}M^4P + L^{h-4}M^3Q + L^{h-3}M^2R \\
\qquad + L^{h-2}MS + L^{h-1}T + L^{h-5}M^3N^2 + L^{h-4}M^2NP + L^{h-3}MNQ \\
\qquad + L^{h-2}NR + L^{h-4}MN^3 + L^{h-3}N^2P + L^{h-3}MP^2 + L^{h-2}PQ, \\
\Pi^{IX} = L^{h-8}M^8 + L^{h-7}M^6N + L^{h-6}M^5P + L^{h-5}M^4Q + L^{h-4}M^3R \\
\qquad + L^{h-3}M^2S + L^{h-2}MT + L^{h-1}U + L^{h-6}M^4N^2 + L^{h-5}M^3NP \\
\qquad + L^{h-4}M^2NQ + L^{h-3}MNR + L^{h-2}NS + L^{h-5}M^2N^3 + L^{h-4}MN^2P \\
\qquad + L^{h-3}N^2Q + L^{h-4}M^2P^2 + L^{h-3}MPQ + L^{h-2}PR + L^{h-4}N^4 \\
\qquad + L^{h-3}NP^2 + L^{h-2}Q^2, \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{cases}
$$

Digitized by Google

457. Chiamisi ora Π_1 ciò che diviene Π aggiungendovi, giusta la formula (II), gli opportuni coefficienti e divisori numerici (n° 452). Ciò fatto, $\Pi_1 x^{h\alpha-\varepsilon}$ non sarà che un termine generale della potenza y^h (n° 452). Dunque la formola (VII), quella sarà che scioglie per lo meno la prima parte del problema del n° 447; imperciocchè, determinate col mezzo di tal formola le quantità (VIII), aggiungo in ciascuna d'esse giusta la (II) i dovuti divisori e coefficienti numerici, e i risultati che ne vengono, chiamati Π_1', Π_1'', Π_1''', Π_1^{IV}, ..., altro non saranno che i rispettivi coefficienti delle potenze $x^{h\alpha}$, $x^{h\alpha-1}$, $x^{h\alpha-2}$, $x^{h\alpha-3}$, ...; onde avendosi

$$
\text{(IX)}\quad
\begin{cases}
\Pi_1' = \dfrac{1.2.3\ \ldots\ h}{1.2.3\ \ldots\ h} L^h = L^h, \\[2ex]
\Pi_1'' = \dfrac{1.2.3\ \ldots\ h}{1.2.3\ \ldots\ (h-1).1} L^{h-1} M = h L^{h-1} M, \\[2ex]
\Pi_1''' = \dfrac{1.2.3\ \ldots\ h}{1.2.3\ \ldots\ (h-2).1.2} L^{h-2} M^2 + \dfrac{1.2.3\ \ldots\ h}{1.2.3\ \ldots\ (h-1).1} L^{h-1} N \\
\qquad = \dfrac{h(h-1)}{1.2} L^{h-2} M^2 + h L^{h-1} N, \\[2ex]
\Pi_1^{IV} = \dfrac{h(h-1)(h-2)}{1.2.3} L^{h-3} M^3 + h(h-1) L^{h-2} MN + h L^{h-1} P, \\[2ex]
\Pi_1^{V} = \dfrac{h(h-1)(h-2)(h-3)}{1.2.3.4} L^{h-4} M^4 + \dfrac{h(h-1)(h-2)}{1.2} L^{h-3} M^2 N \\
\qquad + h(h-1) L^{h-2} \left(MP + \dfrac{N^2}{2} \right) + h L^{h-1} Q, \\[2ex]
\Pi_1^{VI} = \dfrac{h(h-1)(h-2)(h-3)(h-4)}{1.2.3.4.5} L^{h-5} M^5 + \dfrac{h(h-1)(h-2)(h-3)}{1.2.3} L^{h-4} M^3 N \\
\qquad + h(h-1)(h-2) L^{h-3} \left(\dfrac{M^2 P}{1.2} + \dfrac{MN^2}{1.2} \right) + h(h-1) L^{h-2} (MQ + NP) + h L^{h-1} R, \\[2ex]
\Pi_1^{VII} = \dfrac{h(h-1)(h-2)\ \ldots\ (h-5)}{1.2.3.4.5.6} L^{h-6} M^6 + \dfrac{h(h-1)\ \ldots\ (h-4)}{1.2.3.4} L^{h-5} M^4 N \\
\qquad + h(h-1)(h-2)(h-3) L^{h-4} \left(\dfrac{M^3 P}{1.2.3} + \dfrac{M^2 N^2}{1.2.1.2} \right) \\
\qquad + h(h-1)(h-2) L^{h-3} \left(\dfrac{M^2 Q}{1.2} + MNP + \dfrac{N^3}{1.2.3} \right) \\
\qquad + h(h-1) L^{h-2} \left(MR + NQ + \dfrac{P^2}{1.2} \right) + h L^{h-1} S, \\[2ex]
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{cases}
$$

Digitized by Google

Sarà

$$
\left.\begin{aligned}
y^h = (Lx^\alpha + Mx^{\alpha-1} + Nx^{\alpha-2} + Px^{\alpha-3} + Qx^{\alpha-4} + Rx^{\alpha-5} + Sx^{\alpha-6} + \cdots)^h = L^h x^{h\alpha} \\
+ hL^{h-1}Mx^{h\alpha-1} + \left[\frac{h(h-1)}{1.2}L^{h-2}M^2 + hL^{h-1}N\right]x^{h\alpha-2} \\
+ \left[\frac{h(h-1)(h-2)}{1.2.3}L^{h-3}M^3 + h(h-1)L^{h-2}MN + hL^{h-1}P\right]x^{h\alpha-3} \\
+ \left[\frac{h(h-1)(h-2)(h-3)}{1.2.3.4}L^{h-4}M^4 + \frac{h(h-1)(h-2)}{1.2}L^{h-3}M^2N\right. \\
\left. + h(h-1)L^{h-2}\left(MP + \frac{N^2}{1.2}\right) + hL^{h-1}Q\right]x^{h\alpha-4} \\
+ \left[\frac{h(h-1)(h-2)(h-3)(h-4)}{1.2.3.4.5}L^{h-5}M^5\right. \\
+ \frac{h(h-1)(h-2)(h-3)}{1.2.3}L^{h-4}M^3N + h(h-1)(h-2)L^{h-3}\left(\frac{M^2P}{1.2} + \frac{MN^2}{1.2}\right) \\
\left. + h(h-1)L^{h-2}(MQ + NP) + hL^{h-1}R\right]x^{h\alpha-5} \\
+ \left[\frac{h(h-1)\ldots(h-5)}{1.2.3.4.5.6}L^{h-6}M^6 + \frac{h(h-1)\ldots(h-4)}{1.2.3.4}L^{h-5}M^4N\right. \\
+ h(h-1)(h-2)(h-3)L^{h-4}\left(\frac{M^3P}{1.2.3} + \frac{M^2N^2}{1.2.1.2}\right) \\
+ h(h-1)(h-2)L^{h-3}\left(\frac{M^2Q}{1.2} + MNP + \frac{N^3}{1.2.3}\right) \\
\left. + h(h-1)L^{h-2}\left(MR + NQ + \frac{P^2}{1.2}\right) + hL^{h-1}S\right]x^{h\alpha-6} + \cdots \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots
\end{aligned}\right\} \text{(X)}
$$

Se sia $h = 3$, otterremo

$$
\begin{aligned}
y^3 &= (Lx^\alpha + Mx^{\alpha-1} + Nx^{\alpha-2} + Px^{\alpha-3} + Qx^{\alpha-4} + Rx^{\alpha-5} + Sx^{\alpha-6} + \cdots)^3 \\
&= L^3x^{3\alpha} + 3L^2Mx^{3\alpha-1} + (3LM^2 + 3L^2N)x^{3\alpha-2} + (M^3 + 6LMN + 3L^2P)x^{3\alpha-3} \\
&+ \left[3M^2N + 6L\left(MP + \frac{N^2}{2}\right) + 3L^2Q\right]x^{3\alpha-4} \\
&+ \left[6\left(\frac{M^2P}{2} + \frac{MN^2}{2}\right) + 6L(MQ + NP) + 3L^2R\right]x^{3\alpha-5} \\
&+ \left[6\left(\frac{M^2Q}{2} + MNP + \frac{N^3}{6}\right) + 6L\left(MR + NQ + \frac{P^2}{2}\right) + 3L^2S\right]x^{3\alpha-6} + \cdots.
\end{aligned}
$$

458. Osservando l'andamento delle quantità (VIII), (IX), potremo, senza ricorrere alla formola (VII), determinare le medesime assai semplicemente. Imperciocchè nella (VIII) veggo sussistere costantemente tal regola, che una qualunque di quelle quantità, per esempio la $\Pi^{(m)}$, resta determinata col moltiplicare tutta la $\Pi^{(m-1)}$ per $L^{-1}M$; moltiplicando tutti i termini della $\Pi^{(m-2)}$ che son privi di M, per $L^{-1}N$; moltiplicando tutti i termini della $\Pi^{(m-3)}$ mancanti e della M e della N, per $L^{-1}P$; moltiplicando per $L^{-1}Q$ tutti i termini della $\Pi^{(m-4)}$ che son privi delle tre quantità M, N, P, e così di

Digitized by Google

seguito fino alla Π', e poi col sommare insieme tutti i risultati che ne provengono. Quindi scritta la $\Pi' = L^h$ otterremo Π'', moltiplicando essa per $L^{-1}M$; ci risulterà la Π''', col moltiplicare la Π'' per $L^{-1}M$, e per $L^{-1}N$ la Π'; ricaveremo la Π^{IV}, moltiplicando per $L^{-1}M$ tutta la Π''', e per $L^{-1}P$ la Π'; si avrà la Π^{V} col moltiplicare tutta la Π^{IV} per $L^{-1}M$, il termine della Π''' mancante di M per $L^{-1}N$, la Π'' per $L^{-1}P$, e la Π' per $L^{-1}Q$, e così in progresso.

In quanto poi alle quantità (IX) esse ottengonsi come le (VIII), con questo di più che, nella formazione di ciascun termine, deve questo dividersi per gli esponenti che in esso acquistano le quantità M, N, P, ..., e deve moltiplicarsi per l'esponente della L nel termine da cui deriva. Così, mentre dal termine $hL^{h-1}P$ in Π_1^{IV} ricavo giusta la regola precedente il suo corrispondente in Π_1^{VI}, nel moltiplicare per $L^{-1}P$, moltiplico ancora per $h-1$, esponente della L in $hL^{h-1}P$, e divido per 2, esponente della P nel termine che risulta.

In conseguenza di questa regola semplicissima vedesi pel n° 457, che noi possiamo con somma facilità innalzare alla potenza h la quantità (I), e che quindi per essa resta risoluta la seconda parte del problema propostoci nel n° 447.

459. Nella ipotesi che la (I) sia mancante di qualche termine, considero la quantità come se i termini mancanti vi fossero, opero come precedentemente, e nel risultato che ottiensi, pongo lo zero in luogo di quei coefficienti che corrispondono ai termini non esistenti.

Se sia per esempio

$$y = Lx^\alpha + Mx^{\alpha-1} + Px^{\alpha-3} + Rx^{\alpha-5} + Sx^{\alpha-6} + \cdots$$

ed $h = 3$, dall'esempio precedente avremo

$$y^3 = L^3x^{3\alpha} + 3L^2Mx^{3\alpha-1} + 3LM^2x^{3\alpha-2} + (M^3 + 3L^2P)x^{3\alpha-3} + 6LMPx^{3\alpha-4} + (3M^2P + 3L^2R)x^{3\alpha-5} + (6LMR + 3LP^2 + 3L^2S)x^{3\alpha-6} + \cdots.$$

460. Se la (I) abbia la forma

$$y = Lx^\alpha + Mx^{\alpha+1} + Nx^{\alpha+3} + Qx^{\alpha+4} + \cdots,$$

troveremo, come nei numeri precedenti, che le varie potenze della x nella y^h sono le

$$x^{h\alpha},\quad x^{h\alpha+1},\quad x^{h\alpha+2},\quad x^{h\alpha+3},\ \ldots$$

e che gli stessi coefficienti (IX) sono i coefficienti rispettivi di queste diverse potenze, essendo $\Pi_1 x^{h\alpha-g}$ il termine generale di y^h (n° 457), e deducendosi tal quantità Π_1, come nel citato n° 457, dalla Π, ossia dalla formola (VII).

461. Moltiplicando il termine $\Pi_1 x^{h\alpha-g}$ (n° 457) per $F^{(p)}x^p$, avremo il prodotto

$$F^{(p)}\Pi_1 x^{h\alpha+p-g}.$$

Ora eleviamo la (I) ad una podestà $i = h \pm k$, e, del risultato che viene, preso un termine qualunque, che chiamerò $\Theta_1 x^{i\alpha-l}$, vogliasi determinare la l per modo che, moltiplicato $\Theta_1 x^{i\alpha-l}$ per $F^{(q)}x^q$, ne venga un termine, il cui esponente uguagli l'esponente di

$$F^{(p)}\Pi_1 x^{h\alpha+p-g}.$$

Digitized by Google

Suppongo perciò

$$i\alpha + q - l = h\alpha + p - g,$$

e troveremo dover essere

$$l = q - p + g \pm k\alpha.$$

Volendo poi determinare in corrispondenza il coefficiente Θ_1, ci serviremo delle stesse formole (VII), (II), collocando i in luogo di h, ed l invece della g.

462. Sia

$$q = p \mp k\alpha - \frac{k(k \pm 1)}{2},$$

e però

$$l = g - \frac{k(k \pm 1)}{2};$$

quindi ci risulta

$$L^{i-l} M^l = L^{h \pm k - g + \frac{k(k\pm1)}{2}} M^{g - \frac{k(k\pm1)}{2}} = L^{h-g} M^g \times L^{\frac{k(k\pm3)}{2}} M^{-\frac{k(k\pm1)}{2}},$$

e in egual modo ritrovasi

$$L^{i-(l-1)} M^{l-2} = L^{h-(g-1)} M^{g-2} \times L^{\frac{k(k\pm3)}{2}} M^{-\frac{k(k\pm1)}{2}},$$

$$L^{i-(l-2)} M^{l-4} = L^{h-(g-2)} M^{g-4} \times L^{\frac{k(k\pm3)}{2}} M^{-\frac{k(k\pm1)}{2}}$$

. . . . . .

Dunque, chiamato Θ ciò che diviene Π (n° 456) ponendo i, l corrispondentemente invece delle h, g, sarà

$$\Theta = \Pi L^{\frac{k(k\pm3)}{2}} M^{-\frac{k(k\pm1)}{2}}.$$

Ora, scrivendo i termini di Π_1 (n° 457) giusta la formola (II) deve ciascuno di essi venir moltiplicato per 1.2.3 ... h, e così ciascun termine di Θ_1 (n° 461) deve moltiplicarsi per 1.2.3 ... i = 1.2.3. ... $(h \pm k)$. Dunque, se nelle quantità Π_1, Θ_1 trascureremo i divisori numerici, vedesi che sarà

$$\Pi_1 = 1.2.3 \ldots h\Pi, \quad \Theta_1 = 1.2.3 \ldots (h \pm k)\Theta,$$

e però

$$\Theta_1 = 1.2.3 \ldots (h \pm k)\Pi L^{\frac{k(k\pm3)}{2}} M^{-\frac{k(k\pm1)}{2}}.$$

463. Attribuiscansi nella presente ipotesi alla k i successivi valori 1, 2, 3, 4, ...; chiamando

$$F^{(q')}\Theta_1', \quad F^{(q'')}\Theta_1'', \quad F^{(q''')}\Theta_1''', \quad F^{(q^{IV})}\Theta_1^{IV}, \quad \ldots$$

i risultati rispettivi di $F^{(q)}\Theta_1$, otterremo

$$\text{(XII)} \quad \begin{cases} F^{(p)}\Pi_1 + F^{(q')}\Theta_1' + F^{(q'')}\Theta_1'' + F^{(q''')}\Theta_1''' + F^{(q^{IV})}\Theta_1^{IV} + \cdots = \Pi\,[1.2.3 \ldots hF^{(p)} \\ + 1.2.3 \ldots (h \pm 1)F^{(q')} L^{\frac{(1\pm3)}{2}} M^{-\frac{(1\pm1)}{2}} + 1.2.3 \ldots (h \pm 2)F^{(q'')} L^{\frac{2(2\pm3)}{2}} M^{-\frac{2(2\pm1)}{2}} \\ + 1.2.3 \ldots (h \pm 3)F^{(q''')} L^{\frac{3(3\pm3)}{2}} M^{-\frac{3(3\pm1)}{2}} + 1.2.3 \ldots (h \pm 4)L^{\frac{4(4\pm3)}{2}} M^{-\frac{4(4\pm1)}{2}} + \cdots], \end{cases}$$

e, scrivendo più esattamente e più distesamente col tener separati i doppj valori della i, e però della l e della q, col porre F' in luogo di $F^{(p)}$, e col chiamare F'', F_1 i

Digitized by Google

due valori del coefficiente $F^{(q')}$ corrispondenti ai due della i, chiamando F''', F_2 i due della $F^{(q'')}$; F^{IV}, F_3 i due della $F^{(q''')}$, e così di seguito, avremo il primo membro della (XII) uguale alla formola (VII) moltiplicata in tutte le sue parti per la quantità (XIII).

(XIII)

$$+ 1.2.3.4...(h+1)F''L^2M^{-1} + 1.2.3.4...(h+2)F'''L^5M^{-3} + 1.2.3.4...(h+3)F^{IV}L^9M^{-6}$$
$$+ 1.2.3.4...(h+4)F^{V}L^{14}M^{-10} + ... + 1.2.3.4....(h+k)F^{(k+1)}L^{\frac{k(k+3)}{2}}M^{-\frac{k(k+1)}{2}}$$
$$1.2.3.4...hF'$$
$$+ 1.2.3.4...(h-1)F_1L^{-1} + 1,\ 1.2.3.4...(h-2)F_2L^{-1}M^{-1} + 1.2.3.4...(h-3)F_3M^{-3}$$
$$+ 1.2.3.4...(h-4)F_4L^2M^{-6} + ... + 1.2.3.4...(h-k)F_kL^{\frac{k(k-3)}{2}}M^{-\frac{k(k-1)}{2}}.$$

464. Eseguite le moltiplicazioni ora accennate, conservinsi nel risultato (XII) i termini solamente di esponente non negativo (1°, n° 452), e si aggiungano giusta la formola (II) i dovuti divisori numerici che abbiamo finor trascurati (n° 462). Dopo simili operazioni chiamato Ψ un tal risultato, non è difficile a vedersi che

$$\Psi x^{h\alpha+p-g}$$

esprime il complesso di tutti i termini i quali, contenendo una medesima potenza $x^{h\alpha+p-g}$, risultano dall'elevarsi la quantità (I) a tutte le successive potenze

$$h,\quad h+1,\quad h-1,\quad h+2,\quad h-2,\ \ldots,\ h+k,\quad h-k,$$

e dal moltiplicarsi tali potenze corrispondentemente per le quantità

$$F'x^{p},\quad F''x^{r'},\quad F_1x^{s'},\quad F'''x^{r''},\quad F_2x^{s''},\quad F^{IV}x^{r'''},\quad F_3x^{s'''},\ \ldots,\ F^{(k+1)}x^{r^{(k)}},\quad F_kx^{s^{(k)}},$$

essendo pel precedente valore della q (n° 462)

$$r' = p-(\alpha+1),\quad s' = p+\alpha,\quad r'' = p-(2\alpha+3),\quad s'' = p+(2\alpha-1),$$
$$r''' = p-(3\alpha+6),\quad s''' = p+(3\alpha-3),\ \ldots,$$
$$r^{(k)} = p-\left[k\alpha+\frac{k(k+1)}{2}\right],\quad s^{(k)} = p+k\alpha-\frac{k(k-1)}{2}.$$

465. Facciamo successivamente $g = 0, 1, 2, 3, 4, \ldots$, e chiamiamo

$$\Psi',\quad \Psi'',\quad \Psi''',\quad \Psi^{IV},\quad \ldots$$

i risultati corrispondenti della Ψ.

Rappresentata per Φ la quantità espressa in (XIII), se eseguisco il prodotto $\Pi\Phi$ e, aggiunti in esso i dovuti divisori numerici, se ritengo i termini solamente di esponente non negativo, pei n^i 463, 464 mi risulta in generale $\Psi = \Pi\Phi$. Dunque, facendo simili operazioni, risulterà ancora

$$\Psi' = \Pi'\Phi,\quad \Psi'' = \Pi''\Phi,\quad \Psi''' = \Pi'''\Phi,\quad \Psi^{IV} = \Pi^{IV}\Phi,\quad \ldots,$$

e quindi pel n° 456 avremo

Digitized by Google

(XIV)

$$\Psi' = L^h\left[\frac{1.2.3\ \dots\ h}{1.2.3\ \dots\ h}F' + \frac{1.2.3\ \dots\ (h-1)}{1.2.3\ \dots\ (h-1)}F_1 L^{-1}\right] = F' L^h + F_1 L^{h-1},$$

$$\begin{aligned}\Psi'' &= L^{h-1}M\left[\frac{1.2.3\ \dots\ h}{1.2.3\ \dots\ h-1}F' + \frac{1.2.3\ \dots\ (h-1)}{1.2.3\ \dots\ (h-2)}F_1 L^{-1}\right.\\ &\left. + \frac{1.2.3\ \dots\ (h+1)}{1.2.3\ \dots\ (h+1)}F'' L^2 M^{-1} + \frac{1.2.3\ \dots\ (h-2)}{1.2.3\ \dots\ (h-2)}F_2 L^{-1} M^{-1}\right]\\ &= [hF' L^{h-1} + (h-1)F_1 L^{h-2}]M + (F'' L^{h+1} + F_2 L^{h-2}),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Psi''' &= L^{h-2}M^2\left[\frac{h(h-1)}{1.2}F' + \frac{(h-1)(h-2)}{1.2}F_1 L^{-1}\right.\\ &\left. + (h+1)F'' L^2 M^{-1} + (h-2)F_2 L^{-1} M^{-1}\right] + L^{h-1}N[hF' + (h-1)F_1 L^{-1}]\\ &= \left[\frac{h(h-1)}{1.2}F' L^{h-2} + \frac{(h-1)(h-2)}{1.2}F_1 L^{h-3}\right]M^2\\ &+ [(h+1)F'' L^h + (h-2)F_2 L^{h-3}]M + [hF' L^{h-1} + (h-1)F_1 L^{h-2}]N,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Psi^{IV} &= L^{h-3}M^3\left[\frac{h(h-1)(h-2)}{1.2.3}F' + \frac{(h-1)(h-2)(h-3)}{1.2.3}F_1 L^{-1}\right.\\ &\left. + \frac{(h+1)h}{1.2}F'' L^2 M^{-1} + \frac{(h-2)(h-3)}{1.2}F^2 L^{-1} M^{-1} + F''' L^3 M^{-3} + F_3 M^{-3}\right]\\ &+ L^{h-2}MN[h(h-1)F' + (h-1)(h-2)F_1 L^{-1}\\ &+ (h+1)F'' L^2 M^{-1} + (h-2)F^2 L^{-1} M^{-1}] + L^{h-1}P[F' + (h-1)F_1 L^{-1}]\\ &= \left[\frac{h(h-1)(h-2)}{1.2.3}F' L^{h-3} + \frac{(h-1)(h-2)(h-3)}{1.2.3}F_1 L^{h-4}\right]M^3\\ &+ \left[\frac{(h+1)h}{1.2}F'' L^{h-1} + \frac{(h-2)(h-3)}{1.2}F_2 L^{h-4}\right]M^2\\ &+ [h(h-1)F' L^{h-2} + (h-1)(h-2)F_1 L^{h-3}]MN\\ &+ [(h+1)F'' L^h + (h-2)F^2 L^{h-3}]N\\ &+ [hF' L^{h-1} + (h-1)F_1 L^{h-2}]P + (F''' L^{h+2} + F_3 L^{h-3}),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Psi^V &= \left[\frac{h(h-1)(h-2)(h-3)}{1.2.3.4}F' L^{h-4} + \frac{(h-1)(h-2)(h-3)(h-4)}{1.2.3.4}F_1 L^{h-5}\right]M^4\\ &+ \left[\frac{(h+1)h(h-1)}{1.2.3}F'' L^{h-2} + \frac{(h-2)(h-3)(h-4)}{1.2.3}F_2 L^{h-5}\right]M^3\\ &+ \left[\frac{h(h-1)(h-2)}{1.2}F' L^{h-3} + \frac{(h-1)(h-2)(h-3)}{1.2}F_1 L^{h-4}\right]M^2 N\\ &+ [(h+1)hF'' L^{h-1} + (h-2)(h-3)F_2 L^{h-4}]MN\\ &+ [h(h-1)F' L^{h-2} + (h-1)(h-2)F_1 L^{h-3}]MP\\ &+ [(h+2)F''' L^{h+1} + (h-3)F_3 L^{h-4}]M\\ &+ \left[\frac{h(h-1)}{1.2}F' L^{h-2} + \frac{(h-1)(h-2)}{1.2}F_1 L^{h-3}\right]N^2\\ &+ [(h+1)F'' L^h + (h-2)F_2 L^{h-3}]P + [hF' L^{h-1} + (h-1)F_1 L^{h-2}]Q,\end{aligned}$$

Digitized by Google

$$\Psi^{VI} = \left[\frac{h(h-1)\dots(h-4)}{1.2\dots5}F'L^{h-5} + \frac{(h-1)(h-2)\dots(h-5)}{1.2\dots5}F_1L^{h-6}\right]M^5$$
$$+\left[\frac{(h+1)h\dots(h-2)}{1.2.3.4}F''L^{h-3} + \frac{(h-2)(h-3)\dots(h-5)}{1.2.3.4}F_2L^{h-6}\right]M^4$$
$$+\left[\frac{h(h-1)\dots(h-3)}{1.2.3}F'L^{h-4} + \frac{(h-1)(h-2)\dots(h-4)}{1.2.3}F_1L^{h-5}\right]M^3N$$
$$+\left[\frac{(h+1)h(h-1)}{1.2}F''L^{h-2} + \frac{(h-2)(h-3)(h-4)}{1.2}F_2L^{h-5}\right]M^2N$$
$$+\left[\frac{h(h-1)(h-2)}{1.2}F'L^{h-3} + \frac{(h-1)(h-2)(h-3)}{1.2}F_1L^{h-4}\right]M^2P$$
$$+\left[\frac{(h+2)(h+1)}{1.2}F'''L^h + \frac{(h-3)(h-4)}{1.2}F_3L^{h-5}\right]M^2$$
$$+\left[\frac{h(h-1)(h-2)}{1.2}F'L^{h-3} + \frac{(h-1)(h-2)(h-3)}{1.2}F_1L^{h-4}\right]MN^2$$
$$+[(h+1)hF''L^{h-1} + (h-2)(h-3)F_2L^{h-4}]MP$$
$$+[h(h-1)F'L^{h-2} + (h-1)(h-2)F_1L^{h-3}]MQ$$
$$+\left[\frac{(h+1)h}{1.2}F''L^{h-1} + \frac{(h-2)(h-3)}{1.2}F_2L^{h-4}\right]N^2$$
$$+[h(h-1)F'L^{h-2} + (h-1)(h-2)F_1L^{h-3}]NP$$
$$+[(h+2)F'''L^{h+1} + (h-3)F_3L^{h-4}]N$$
$$+[(h+1)F''L^h + (h-2)F_2L^{h-3}]Q + [hF'L^{h-1} + (h-1)F_1L^{h-2}]R,$$

$$\Psi^{VII} = \left[\frac{h(h-1)\dots(h-5)}{1.2\dots6}F'L^{h-6} + \frac{(h-1)(h-2)\dots(h-6)}{1.2\dots6}F_1L^{h-7}\right]M^6$$
$$+\left[\frac{(h+1)h\dots(h-3)}{1.2\dots5}F''L^{h-4} + \frac{(h-2)(h-3)\dots(h-6)}{1.2\dots5}F_2L^{h-7}\right]M^5$$
$$+\left[\frac{h(h-1)\dots(h-4)}{1.2\dots4}F'L^{h-5} + \frac{(h-1)(h-2)\dots(h-5)}{1.2\dots4}F_1L^{h-6}\right]M^4N$$
$$+\left[\frac{(h+1)h\dots(h-2)}{1.2\dots3}F''L^{h-3} + \frac{(h-2)(h-3)\dots(h-5)}{1.2.3}F_2L^{h-6}\right]M^3N$$
$$+\left[\frac{h(h-1)\dots(h-3)}{1.2.3}F'L^{h-4} + \frac{(h-1)(h-2)\dots(h-4)}{1.2.3}F_1L^{h-5}\right]M^3P$$
$$+\left[\frac{(h+2)(h+1)h}{1.2.3}F'''L^{h-1} + \frac{(h-3)(h-4)(h-5)}{1.2.3}F_3L^{h-6}\right]M^3$$
$$+\left[\frac{h(h-1)\dots(h-3)}{1.2.1.2}F'L^{h-4} + \frac{(h-1)(h-2)\dots(h-4)}{1.2.1.2}F_1L^{h-5}\right]M^2N^2$$
$$+\left[\frac{(h+1)h(h-1)}{1.2}F''L^{h-2} + \frac{(h-2)(h-3)(h-4)}{1.2}F_2L^{h-5}\right]M^2P$$
$$+\left[\frac{h(h-1)(h-2)}{1.2}F'L^{h-3} + \frac{(h-1)(h-2)(h-3)}{1.2}F_1L^{h-4}\right]M^2Q$$
$$+\left[\frac{(h+1)h(h-1)}{1.2}F''L^{h-2} + \frac{(h-2)(h-3)(h-4)}{1.2}F_2L^{h-5}\right]MN^2$$
$$+[h(h-1)(h-2)F'L^{h-3} + (h-1)(h-2)(h-3)F_1L^{h-4}]MNP$$

Digitized by Google

$$+[(h+2)(h+1)F'''L^{h}+(h-3)(h-4)F_{3}L^{h-5}]MN$$
$$+[(h+1)hF''L^{h-1}+(h-2)(h-3)F_{2}L^{h-4}]MQ$$
$$+[h(h-1)F'L^{h-2}+(h-1)(h-2)F_{1}L^{h-3}]MR$$
$$+\left[\frac{h(h-1)(h-2)}{1.2.3}F'L^{h-3}+\frac{(h-1)(h-2)(h-3)}{1.2.3}F_{1}L^{h-4}\right]N^{3}$$
$$+[(h+1)hF''L^{h-1}+(h-2)(h-3)F_{2}L^{h-4}]NP$$
$$+[h(h-1)F'L^{h-2}+(h-1)(h-2)F_{1}L^{h-3}]NQ$$
$$+\left[\frac{h(h-1)}{1.2}F'L^{h-2}+\frac{(h-1)(h-2)}{1.2}F_{1}L^{h-3}\right]P^{2}$$
$$+[(h+2)F'''L^{h+1}+(h-3)F_{3}L^{h-4}]P+[(h+1)F''L^{h}+(h-2)F_{2}L^{h-3}]R$$
$$+[hF'L^{h-1}+(h-1)F_{1}L^{h-2}]S+(F^{IV}L^{h+3}+F_{4}L^{h-4}),$$

. . . . . .

466. Considerando queste quantità (XIV) e la (XIII) veggio esistere in esse un andamento costante, per cui potremo con facilità determinarle nell'istesso modo successivo, come accennammo nel n° 458 determinarsi le quantità (IX); con questo di più solamente, che, laddove in Ψ il numero degli apici sia $\frac{k(k+1)}{2}+1$, devesi a cagione della (XIII) sull'ultimo del risultato aggiungere la quantità

$$\text{(XV)}\qquad L^{h-\frac{k(k+1)}{2}}[F^{(k+1)}L^{\frac{k(k+3)}{2}}+F_{k+1}L^{\frac{(k+1)(k-2)}{2}}]=F^{(k+1)}L^{h+k}+F_{k+1}L^{h-(k+1)}.$$

Perciò non tutte le (XIV) vengono a contenere una quantità corrispondente alla (XV), ma quelle la conterranno solamente, che ricavansi dalla $\Psi^{(\frac{k(k+1)}{2}+1)}$ con la successiva supposizione di $k=0, 1, 2, 3, 4, \ldots$; onde la conterranno le Ψ', Ψ''', Ψ^{IV}, Ψ^{VII}, Ψ^{XI}, ..., e non le altre.

Ottenuta pertanto dalla (XV) con la supposizione di $k=0$ la prima quantità Ψ', moltiplico amendue i termini di questa per $L^{-1}M$, e per gli esponenti rispettivi della L in essi contenuta, aggiungo al prodotto la quantità $F''L^{(h+1)}+F_{2}L^{h-2}$, ricavata dalla (XV) facendo $k=1$, e mi verrà la Ψ''. In seguito moltiplico ciascun termine della Ψ'' per $L^{-1}M$, e per l'esponente in esso della L, moltiplico i due termini della Ψ' per $L^{-1}N$ e per i rispettivi esponenti della L, divido i termini che mi derivano per gli esponenti delle M, N risultati, e ne verrà la quantità Ψ'''. In generale ricaveremo la $\Psi^{(m)}$ moltiplicando primieramente tutta la $\Psi^{(m-1)}$ per $L^{-1}M$, tutta la $\Psi^{(m-2)\frac{M}{}}$ per i n^{i} 458, 8 per $L^{-1}N$, tutta la $\Psi^{(m-3)\frac{MN}{}}$ per $L^{-1}P$, la $\Psi^{(m-4)\frac{MNP}{}}$ per $L^{-1}Q$ ...; poscia moltiplicando ciascun termine che risulta per l'esponente della L nel termine da cui deriva; e dividendo esso per gli esponenti della M, N, P, ... nel medesimo contenuti; e finalmente, se m sia uno dei numeri 1, 2, 4, 7, 11, ... $\frac{k(k+1)}{2}+1$, aggiungendo al risultato la quantità che corrispondentemente proviene dalla (XV).

Digitized by Google

467. Se sia data l'equazione

$$\text{(XVI)}\quad \left\{\begin{array}{l} 0 = F' x^p y^h + F'' x^{p-(\alpha+1)} y^{h+1} + F''' x^{p-(2\alpha+3)} y^{h+2} + F^{IV} x^{p-(3\alpha+6)} y^{h+3} + \cdots \\ \quad \cdots + F^{(k+1)} x^{p-\left(k\alpha+\frac{k(k+1)}{2}\right)} y^{h+k} + F_1 x^{p+\alpha} y^{h-1} + F_2 x^{p+(2\alpha-1)} y^{h-2} \\ \quad + F_3 x^{p+(3\alpha-3)} y^{h-3} + \cdots + F_k x^{p+\left(k\alpha-\frac{k(k-1)}{2}\right)} y^{h-k}, \end{array}\right.$$

e se in essa in luogo della y sostituiscasi la quantità

$$L x^\alpha + M x^{\alpha-1} + N x^{\alpha-2} + P x^{\alpha-3} + \cdots,$$

è facile a vedersi da quanto si è detto fin qui, che ne verrà il risultato

$$\text{(XVII)}\qquad \Psi' x^{h\alpha} + \Psi'' x^{h\alpha-1} + \Psi''' x^{h\alpha-2} + \Psi^{IV} x^{h\alpha-3} + \cdots = 0.$$

Se, avendosi $h = 2$, l'equazione data sia la

$$0 = F' x^p y^2 + F'' x^{p-(\alpha+1)} y^3 + F_1 x^{(p+\alpha)} y + F_2 x^{p+(2\alpha-1)},$$

le quantità (XIV) diventeranno

$$\Psi' = F' L^2 + F_1 L,$$

$$\Psi'' = (2F' L + F_1) M + (F'' L^3 + F_2),$$

$$\Psi''' = F' M^2 + 3F'' L^2 M + (2F' L + F_1) N,$$

$$\Psi^{IV} = 3F'' L M^2 + 2F' M N + 3F'' L^2 N + (2F' L + F_1) P,$$

$$\Psi^{V} = F'' M^3 + 6F'' L M N + 2F' M P + F' N^2 + 3F'' L^2 P + (2F' L + F_1) Q,$$

$$\Psi^{VI} = 3F'' M^2 N + 6F'' L M P + 2F' M Q + 3F'' L N^2 + 2F' N P + 3F'' L^2 Q + (2F' L + F_1) R,$$

. . . . . .

468. *Ritrovare per serie il valore delle radici di un'equazione determinata, che pel* n° 306 *supporrò già libera dalle radici uguali*

$$\text{(XVIII)}\quad \left\{\begin{array}{l} A y^m + B y^{m-1} + C y^{m-2} + \cdots + F y^{m-(n-2)} + G y^{m-(n-1)} \\ + H y^{m-n} + I y^{m-(n+1)} + K y^{m-(n+2)} + \cdots + V = 0. \end{array}\right.$$

Chiamo perciò x uno qualunque dei suoi coefficienti, per esempio il secondo, e la riduco così alla

$$\text{(XIX)}\qquad A y^m + x y^{m-1} + C y^{m-2} + \cdots = 0.$$

Ciò fatto, essendo quest'ultima un'equazione indeterminata, la risolvo secondo il metodo del Capo precedente, pongo nelle serie che risultano, B in luogo della x, e da esse si avranno per serie le radici della (XVIII).

Poniamo giusta il n° 400 nella (XIX)

$$y = L x^\alpha;$$

nella ipotesi di $x = \infty$ risulteranno per α i due valori

$$\alpha' = 1, \quad \alpha'' = -\frac{1}{m-1},$$

Digitized by Google

e avremo in corrispondenza per L le due equazioni

$$L + 1 = 0, \quad L^{m-1} + V = 0.$$

Dalla seconda di queste, allorchè $m - 1$ è dispari, vedesi che per L si ricava un valore reale, e gli altri tutti immaginari; e, quando $m - 1$ è pari, per la stessa L di valori reali non se ne ritraggono che due soli o nessuno; ma nella nostra ipotesi ciò deve sempre succedere necessariamente. Dunque, od un numero $m - 2$, od un numero $m - 3$, o tutte le serie che troveremo saranno involte di quantità immaginarie, quantunque i valori corrispondenti della y possano essere reali.

Sostituiscasi nella (XVIII) la x in luogo non della B, ma della C; ne verrà la

$$Ay^m + By^{m-1} + xy^{m-2} + \cdots + V = 0,$$

e, supposto $y = Lx^\alpha$, $x = \infty$, troveremo per α i due valori

$$\alpha' = \frac{1}{2}, \quad \alpha'' = -\frac{1}{m-2},$$

e per L le due equazioni

$$L^2 + 1 = 0, \quad L^{m-2} + V = 0.$$

Poichè qui pure i valori della L sono o tutti, od in numero di $m - 1$, o di $m - 2$, o di $m - 4$ immaginari, verremo all'inconveniente medesimo dell'altro caso. Lo stesso si dice, se pongasi la x in luogo del coefficiente D, o dell'altro E, etc., giacchè per L risultano in corrispondenza le equazioni

$$L^3 + 1 = 0, \quad L^{m-3} + V = 0,$$

oppure

$$L^4 + 1 = 0, \quad L^{m-4} + V = 0, \ldots.$$

469. *Dunque la soluzione che abbiamo accennata del nostro problema* (n° 468) *è molto inopportuna.* Di più le equazioni in L possono essere tali che noi non sappiamo risolvere, e in tal caso il nostro metodo di soluzione è impraticabile. Dunque converrà abbandonarlo, e ricorrendo ad altro migliore, poniamo la x nella (XVIII) in modo che gli m valori della L vengano a dipendere da m equazioni tutte del primo grado.

Suppongasi perciò la (XVIII) ridotta alla

$$(XX) \quad ay^m + bx^\beta y^{m-1} + cx^\gamma y^{m-2} + dx^\delta y^{m-3} + ex^\varepsilon y^{m-4} + fx^\zeta y^{m-5} + \cdots + ux^\omega = 0,$$

e suppongasi in questa $x = \infty$, $y = Lx^\alpha$: avremo la serie di esponenti

$$(XXI) \quad \begin{cases} m\alpha, & (m-1)\alpha + \beta, \quad (m-2)\alpha + \gamma, \quad (m-3)\alpha + \delta, \\ & (m-4)\alpha + \varepsilon, \quad (m-5)\alpha + \zeta, \ \ldots, \ \omega. \end{cases}$$

Affinchè i valori della L contengansi in m equazioni tutte del primo grado, anche la α dovrà in corrispondenza avere m valori diversi, e questi dovranno evidentemente essere tali, che col loro mezzo gli esponenti (XXI) debbono risultare tra loro successi-

Digitized by Google

vamente uguali soltanto a due a due, e maggiori degli altri; quindi, pel primo valore della α, il primo esponente deve diventare uguale al secondo e maggiore dei susseguenti, in seguito l'esponente secondo per un nuovo valore della α deve risultare uguale al terzo e più grande degli altri, e così in progresso. Ora paragonando giusta il n° 393 il primo dei (XXI) esponenti con quei che seguono, abbiamo per α i valori

$$\text{(XXII)} \qquad \beta, \ \frac{\gamma}{2}, \ \frac{\delta}{3}, \ \frac{\varepsilon}{4}, \ \frac{\zeta}{5}, \ \ldots, \ \frac{\omega}{m}.$$

Paragonando pel n° 396 il secondo esponente con gli ulteriori, hannosi i risultati

$$\text{(XXIII)} \qquad \gamma - \beta, \ \frac{\delta - \beta}{2}, \ \frac{\varepsilon - \beta}{3}, \ \frac{\zeta - \beta}{4}, \ \ldots, \ \frac{\omega - \beta}{m - 1}.$$

Dal paragone dell'esponente terzo si ottengono i valori

$$\text{(XXIV)} \qquad \delta - \gamma, \ \frac{\varepsilon - \gamma}{2}, \ \frac{\zeta - \gamma}{3}, \ \ldots, \ \frac{\omega - \gamma}{m - 2}.$$

Dal paragone del quarto derivano le quantità

$$\text{(XXV)} \qquad \begin{cases} \varepsilon - \delta, \ \dfrac{\zeta - \delta}{2}, \ \ldots, \ \dfrac{\omega - \delta}{m - 3}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

Dunque, acciocchè succeda rapporto ai valori della α quanto è stato ora accennato, converrà che in ciascuna delle serie (XXII), (XXIII), (XXIV), (XXV), etc. il primo valore sia maggiore dei susseguenti, e però che si abbia dalla (XXII)

$$\gamma < 2\beta, \quad \delta < 3\beta, \quad \varepsilon < 4\beta, \quad \zeta < 5\beta, \ \ldots, \ \omega < m\beta,$$

dalla (XXIII)

$$\delta - \beta < 2(\gamma - \beta), \quad \varepsilon - \beta < 3(\gamma - \beta), \quad \zeta - \beta < 4(\gamma - \beta), \ \ldots, \ \omega - \beta < (m-1)(\gamma - \beta),$$

dalla (XXIV)

$$\varepsilon - \gamma < 2(\delta - \gamma), \quad \zeta - \gamma < 3(\delta - \gamma), \ \ldots, \ \omega - \gamma < (m-2)(\delta - \gamma),$$

e così di seguito.

Pertanto sarà necessario attribuire alla γ un valore $< 2\beta$, alla δ un valore $< 3\beta$ ed insieme $< 2\gamma - \beta$, alla ε un valore minore di ciascuna delle tre quantità

$$4\beta, \quad 3\gamma - 2\beta, \quad 2\delta - \gamma,$$

alla ζ un valor minore delle quattro

$$5\beta, \quad 4\gamma - 3\beta, \quad 3\delta - 2\gamma, \quad 2\varepsilon - \beta; \ \ldots;$$

ma se sia

$$\gamma < 2\beta, \quad \delta < 2\gamma - \beta, \quad \varepsilon < 2\delta - \gamma, \quad \zeta < 2\varepsilon - \delta, \ \ldots,$$

Digitized by Google

è facile a vedersi che queste quantità γ, δ, ε, ζ, ... risultano corrispondentemente minori ancora delle altre quantità sovraccennate. Dunque pel nostro intento, dato alla β un valore qualunque, basterà determinare le γ, δ, ε, ζ, ... in modo che

$$\gamma < 2\beta, \quad \delta < 2\gamma - \beta, \quad \varepsilon < 2\delta - \gamma, \quad \zeta < 2\varepsilon - \delta, \quad \ldots.$$

470. Volendosi questi esponenti tutti numeri interi, il massimo valore che possa attribuirsi alla γ sarà $2\beta - 1$, il massimo da attribuirsi alla δ sarà $2\gamma - \beta - 1$, il massimo da darsi alla ε sarà $2\delta - \gamma - 1$, e così in progresso. Dunque, supponendo

$$\gamma = 2\beta - 1, \quad \delta = 2\gamma - \beta - 1, \quad \varepsilon = 2\delta - \gamma - 1, \quad \zeta = 2\varepsilon - \delta - 1, \quad \ldots,$$

avremo con la sostituzione la serie

$$\beta, \quad \gamma = 2\beta - 1, \quad \delta = 3\beta - 3, \quad \varepsilon = 4\beta - 6, \quad \zeta = 5\beta - 10, \quad \ldots.$$

Ora i numeri che in questa si sottraggono, formano una serie a differenze seconde costanti, di cui il termine generale è $\frac{n^2 - n}{2}$. Dunque, uno qualunque di questi esponenti verrà espresso da

$$n\beta - \frac{n^2 - n}{2} = \frac{n(2\beta - n + 1)}{2}.$$

471. In conseguenza dei valori ora determinati delle β, γ, δ, ε, ζ, ..., la (XX) diverrà

$$\text{(XXVI)} \quad \left\{ \begin{array}{l} a y^m + b x^\beta y^{m-1} + c x^{2\beta-1} y^{m-2} + d x^{3\beta-3} y^{m-3} \\ + e x^{4\beta-6} y^{m-4} + f x^{5\beta-10} y^{m-5} + \cdots + q x^{\frac{(n-3)(2\beta-n+4)}{2}} y^{m-(n-3)} \\ + r x^{\frac{(n-2)(2\beta-n+3)}{2}} y^{m-(n-2)} + s x^{\frac{(n-1)(2\beta-n+2)}{2}} y^{m-(n-1)} \\ + t x^{\frac{n(2\beta-n+1)}{2}} y^{m-n} + u x^{\frac{(n+1)(2\beta-n)}{2}} y^{m-(n+1)} \\ + v x^{\frac{(n+2)(2\beta-n-1)}{2}} y^{m-(n+2)} + z x^{\frac{(n+3)(2\beta-n-2)}{2}} y^{m-(n+3)} + \cdots = 0 \end{array} \right.$$

e gli esponenti (XXI) diventando

$$\text{(XXVII)} \quad \left\{ \begin{array}{l} m\alpha, \quad (m-1)\alpha + \beta, \quad (m-2)\alpha + (2\beta - 1), \\ (m-3)\alpha + (3\beta - 3), \quad (m-4)\alpha + (4\beta - 6), \\ (m-5)\alpha + (5\beta - 10), \quad \ldots, \\ [m - (n-1)]\alpha + \frac{(n-1)(2\beta - n + 2)}{2}, \\ (m-n)\alpha + \frac{n(2\beta - n + 1)}{2}, \\ [m - (n+1)]\alpha + \frac{(n+1)(2\beta - n)}{2}, \quad \ldots \end{array} \right.$$

Digitized by Google

la α acquisterà i valori

$$\alpha' = \beta, \quad \alpha'' = \beta - 1, \quad \alpha''' = \beta - 2, \quad \ldots,$$
$$\alpha^{(n)} = \beta - (n-1), \quad \alpha^{(n+1)} = \beta - n, \quad \ldots.$$

472. Supponiamo

$$\alpha = \alpha^{(n+1)} = \beta - n,$$

e sostituiscasi questo valore negli esponenti (XXVII); essi diverranno

$$\text{(XXVIII)} \quad \begin{cases} m\beta - mn, \quad m\beta - (m-1)n, \quad m\beta - [(m-2)n + 1], \\ m\beta - [(m-3)n + 3], \quad m\beta - [(m-4)n + 6], \quad \ldots, \\ m\beta - \left\{[m - (n-1)]n + \dfrac{(n-1)(n-2)}{2}\right\}, \\ m\beta - \left[(m-n)n + \dfrac{n(n-1)}{2}\right], \\ m\beta - \left\{[m - (n+1)]n + \dfrac{(n+1)n}{2}\right\}, \end{cases}$$

e ciascuno di questi, vedesi, che verrà espresso dalla formola

$$\text{(XXIX)} \qquad m\beta - \left[(m-g)n + \frac{g(g-1)}{2}\right],$$

dalla quale nascerà l'esponente primo, allorchè $g = 0$, il secondo, quando $g = 1$, il terzo, mentre $g = 2$, etc.

473. Ridotta la formola (XXIX) alla

$$m(\beta - n) + \frac{g(2n + 1 - g)}{2},$$

e trascurata per ora la parte $m(\beta - n)$, diamo successivamente alla g prima i valori

$$n, \quad n-1, \quad n-2, \quad n-3, \quad \ldots, \quad n-r,$$

poi gli altri

$$n+1, \quad n+2, \quad n+3, \quad n+4, \quad \ldots, \quad n+s.$$

Per la sostituzione dei valori primi avremo dalla $\dfrac{g(2n+1-g)}{2}$ i risultati esposti in (XXX) nella prima colonna verticale, dalla sostituzione dei secondi avremo gli esposti nella colonna seconda. Ora ogni due risultati di ciascuna linea sono uguali fra loro, e di più vanno essi via via decrescendo, quanto più dall'alto discendesi al basso, cosicchè i due primi sono maggiori di tutti, i secondi sono minori dei primi, e maggiori di quei che seguono, i terzi più piccoli di quei che li precedono, e maggiori dei susseguenti, e così in progresso. Dunque, aggiungendo a ciascuno dei risultati (XXX) la quantità $m(\beta - n)$, ne viene che gli esponenti n^{esimo} ed $(n+1)^{\text{esimo}}$, gli altri $(n-1)^{\text{esimo}}$ ed $(n+2)^{\text{esimo}}$, i terzi $(n-2)^{\text{esimo}}$ ed $(n+3)^{\text{esimo}}$, etc. saranno tali, che uguagliandosi tutti fra loro corrispondentemente a due a due, i primi due saranno i massimi, i secondi due quelli che ai primi maggiormente si accostano, i terzi quelli che immedia-

Digitized by Google

tamente succedano ai secondi, e così di seguito

$$(XXX)\quad \begin{cases} g=n, & \frac{n^2+n}{2}, & g=n+1, & \frac{n^2+n}{2} \\ g=n-1, & \frac{n^2+n-2}{2}, & g=n+2, & \frac{n^2+n-2}{2} \\ g=n-2, & \frac{n^2+n-6}{2}, & g=n+3, & \frac{n^2+n-6}{2} \\ g=n-3, & \frac{n^2+n-12}{2}, & g=n+4, & \frac{n^2+n-12}{2} \\ \dots\dots\dots\dots\dots & & \dots\dots\dots\dots\dots & \\ g=n-r, & \frac{n^2+n-r(r+1)}{2}; & g=n+s, & \frac{n^2+n-s(s-1)}{2}. \end{cases}$$

474. Avvertasi che, supposto $r+s=m$, se $r=n$, $s=r+1$, e però m numero dispari, ed $n=\frac{m-1}{2}$, allora esisteranno in ciascuna colonna $\frac{m+1}{2}$ termini, e però fra gli esponenti (XXVIII) i primi $\frac{m+1}{2}$ uguaglieranno rispettivamente i secondi $\frac{m+1}{2}$. Che, se restando $r+s=m$, i numeri n, r, s hanno valori diversi dagli accennati, allora l'una delle colonne sarà più lunga dell'altra, e i termini che nella colonna più lunga sopravanzano, e però gli esponenti corrispondenti, non avranno nell'altra colonna termini od esponenti rispettivamente eguali. Ancor essi però anderanno vieppiù decrescendo, quanto più la colonna discende.

475. *Vogliansi gli esponenti della serie*

$$y=Lx^{\alpha}+\cdots$$

(n° 413) *essendo* x, y *le variabili della* (XXVI), *ed essendo*

$$\alpha=\alpha^{(n+1)}=\beta-n \qquad (n^{\circ}\ 472).$$

Poichè nella ipotesi di $\alpha=\beta-n$ abbiamo gli esponenti (XXVIII), i quali procedono nella loro grandezza giusta l'ordine delle quantità (XXX), ne segue pei n^{i} 407, 414, che sarà

$$\pi'=m(\beta-n)+\frac{n^2+n}{2},$$

$$\pi''=m(\beta-n)+\frac{n^2+n-2}{2},$$

$$\pi'''=m(\beta-n)+\frac{n^2+n-6}{2},$$

$$\pi^{IV}=m(\beta-n)+\frac{n^2+n-12}{2},$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$\pi^{(r+1)}=m(\beta-n)+\frac{n^2+n-r(r+1)}{2}.$$

Digitized by Google

Ora sottraendo giusta il n° 425 dalla π' le quantità

$$\pi'', \quad \pi''', \quad \pi^{IV}, \quad \ldots, \quad \pi^{(r+1)},$$

ci risulta

$$\pi' - \pi'' = 1, \quad \pi' - \pi''' = 3, \quad \pi' - \pi^{IV} = 6, \quad \ldots, \quad \pi' - \pi^{(r+1)} = \frac{r(r+1)}{2}.$$

Dunque eseguita l'operazione citata del n° 425, troveremo che la serie degli esponenti richiesta sarà la seguente

$$\alpha, \quad \alpha - 1, \quad \alpha - 2, \quad \alpha - 3, \quad \ldots,$$

onde, essendo $\alpha = \beta - n$, la

(XXXI) $$y = Lx^{\alpha} + Mx^{\alpha-1} + Nx^{\alpha-2} + Px^{\alpha-3} + \cdots$$

ci esprimerà una qualunque delle radici della (XXVI).

476. Volendo ora conoscere il valore delle quantità L, M, N, ..., non avremo che a servirci del metodo dei coefficienti indeterminati (n° 425); ma perchè troppo lungo sarebbe il sostituire la quantità $Lx^{\alpha} + \cdots$ in luogo della y, come nel n° 426, noi ci serviremo piuttosto del metodo esposto al n° 466 nel modo seguente.

Prendo nella equazione (XXVI) il termine

$$t x^{\frac{n(2\beta-n+1)}{2}} y^{m-n}$$

corrispondente alla ipotesi di

$$\alpha = \alpha^{(n+1)} = \beta - n$$

(n° 472). Suppongo in esso l'esponente della y, cioè $m - n$, uguale ad h, e suppongo

$$\frac{n(2\beta - n + 1)}{2} = p;$$

risultando perciò

$$\frac{(n-k)(2\beta - n + k + 1)}{2} = p - \left[k\alpha + \frac{k(k+1)}{2}\right]$$

ed

$$\frac{(n+k)(2\beta - n - k + 1)}{2} = p + \left[k\alpha - \frac{k(k-1)}{2}\right],$$

avremo gli esponenti

$$\frac{(n-1)(2\beta - n + 2)}{2} = p - (\alpha + 1), \qquad \frac{(n-2)(2\beta - n + 3)}{2} = p - (2\alpha + 3),$$

$$\frac{(n-3)(2\beta - n + 4)}{2} = p - (3\alpha + 6), \quad \ldots$$

e gli altri

$$\frac{(n+1)(2\beta - n)}{2} = p + \alpha, \qquad \frac{(n+2)(2\beta - n - 1)}{2} = p + (2\alpha - 1),$$

$$\frac{(n+3)(2\beta - n - 2)}{2} = p + (3\alpha - 3), \quad \ldots.$$

Ciò essendo, scrivo la nostra equazione col porre a principio il termine $tx^p y^h$, poscia al disopra in una linea orizzontale tutti i termini che lo precedono, in un'altra al

Digitized by Google

disotto tutti quei che succedono: essa con ciò acquista la forma

$$\text{(XXXII)}\quad \begin{cases} 0 = t x^{p} y^{h} \\ + s x^{p-(\alpha+1)} y^{h+1} + r x^{p-(2\alpha+3)} y^{h+2} + q x^{p-(3\alpha+6)} y^{h+3} + \cdots + f x^{p-\left[k\alpha+\frac{k(k+1)}{2}\right]} y^{m+k} \\ + u x^{p+\alpha} y^{h-1} + v x^{p+(2\alpha-1)} y^{h-2} + \zeta x^{p+(3\alpha-3)} y^{h-3} + \cdots + \Psi x^{p+\left[k\alpha-\frac{k(k-1)}{2}\right]} y^{m-k}. \end{cases}$$

Dunque, supposto $t = F'$, $s = F''$, $r = F'''$, ..., $u = F_1$, $v = F_2$, $\zeta = F_3$, ..., diverrà essa identica con la (XVI). Ora dalla (XVI) per la sostituzione di

$$L x^{\alpha} + M x^{\alpha-1} + \cdots$$

in luogo della y si ottiene la (XVII) (n° 467); dunque l'equazione medesima si otterrà per la medesima sostituzione dalla (XXXII). Ma per la determinazione dei coefficienti L, M, N, ... col metodo dei coefficienti indeterminati, ritrovate le quantità Ψ', Ψ'', Ψ''', ..., non abbiamo che ad uguagliare ciascuna di queste allo zero. Dunque pel nostro intento non avrò che a cercare giusta il n° 466 le accennate Ψ', Ψ'', Ψ''', ..., poscia a supporre $\Psi' = 0$, $\Psi'' = 0$, $\Psi''' = 0$, ...; e dalla soluzione di queste equazioni ci risulterà il valore domandato dei coefficienti L, M, N, ...

477. Ciò di fatti eseguito, poichè ci risulta

$$\text{(XXXIII)}\quad \begin{cases} L = -\dfrac{F_1}{F'}, \qquad M = \dfrac{F_2 F'^3 - F_1^3 F''}{F_1 F'^3}, \\ N = \dfrac{(2F_1^3 F'' + F_2 F'^3)(F_2 F'^3 - F_1^3 F'')}{F'^5 F_1^3}, \ \ldots, \end{cases}$$

il valore della y nella (XXXII), ossia nella (XXVI), sarà in generale

$$\text{(XXXIV)}\quad \begin{cases} y = -\dfrac{F_1}{F'} x^{\beta-n} + \dfrac{F_2 F'^3 - F_1^3 F''}{F_1 F'^3} x^{\beta-n-1} \\ + \dfrac{(2F_1^3 F'' + F_2 F'^3)(F_2 F'^3 - F_1^3 F'')}{F'^5 F_1^3} x^{\beta-n-2} + \cdots, \end{cases}$$

e supponendo quivi successivamente $n = 0, 1, 2, 3, \ldots, m - 1$, e sostituendo in luogo delle F', F_1, F'', F_2, ... i rispettivi coefficienti, otterremo un numero m di serie esprimentici le m radici della (XXVI).

478. Ma noi vogliamo la soluzione della (XVIII) (n° 468).

Se la (XX), e però la (XXVI), è provenuta, come è stato supposto nei n^{i} 469, 470, dalla (XVIII), converrà che i coefficienti di quella a, b, c, ..., i quali colà lasciammo indeterminati, dipendano dai coefficienti A, B, C, ... di questa, e dalla x.

Supponiamo pertanto nella (XXVI)

$$a = A, \quad b = \frac{B}{x^{\beta}}, \quad c = \frac{C}{x^{2\beta-1}}, \quad \ldots, \quad r = \frac{F}{x^{\frac{(n-2)(2\beta-n+3)}{2}}},$$

$$s = \frac{G}{x^{\frac{(n-1)(2\beta-n+2)}{2}}}, \quad t = \frac{H}{x^{\frac{n(2\beta-n+1)}{2}}}, \quad u = \frac{I}{x^{\frac{(n+1)(2\beta-n)}{2}}}, \quad v = \frac{K}{x^{\frac{(n+2)(2\beta-n-1)}{2}}}, \quad \ldots$$

(n^{i} 469, 471): con questa ipotesi, qualunque siasi la x, le due (XVIII), (XXVI) sono

Digitized by Google

identiche fra di loro. Dunque, se porremo le quantità

$$\frac{H}{x^{\frac{n(2\beta-n+1)}{2}}}, \quad \frac{I}{x^{\frac{(n+1)(2\beta-n)}{2}}}, \quad \frac{G}{x^{\frac{(n-1)(2\beta-n+2)}{2}}}, \quad \frac{K}{x^{\frac{(n+2)(2\beta-n-1)}{2}}}, \quad \ldots$$

nei valori (XXXIII) in luogo delle

$$F' = t, \quad F_1 = u, \quad F'' = s, \quad F_2 = v, \quad \ldots$$

(n° 476), i risultati che ne vengono, collocati nella (XXXI), ci daranno il valor generale della y nella (XVIII); valore da cui ritrarremo per serie tutte le radici di questa equazione, col supporre successivamente

$$n = 0, \ 1, \ 2, \ 3, \ \ldots, \ (m-1)$$

(n° 477). Ora, eseguendo le accennate sostituzioni, col porre per maggiore semplicità, come nel n° 476,

$$\frac{n(2\beta - n + 1)}{2} = p, \ \ldots,$$

ci risulta

$$L = -\frac{I}{Hx^{\alpha}}, \quad M = \frac{KH^3 - GI^3}{H^3 I x^{\alpha-1}}, \quad N = \frac{(2I^3G + H^3K)(KH^3 - GI^3)}{H^5 I^3 x^{\alpha-2}}, \quad \ldots,$$

onde la (XXXI) diventa

$$\text{(XXXV)} \quad y = \frac{-I}{H} + \frac{KH^3 - GI^3}{H^3 I} + \frac{(2GI^3 + H^3K)(KH^3 - GI^3)}{H^5 I^3} + \cdots,$$

scomparendo la x da sè medesima. Dunque, qualunque valore si dia a questa x, sempre dalla (XXXI) si otterrà la medesima (XXXV); e per conseguenza a maggiore semplicità potremo pel nostro intento supporre che la x abbia il valore 1, e però che

$$a = A, \quad b = B, \quad c = C, \quad \ldots.$$

479. Tutte le proprietà esposte finora, e questa ultima specialmente per cui abbiamo alla x attribuito il valore 1 e l'altra del n° 466, per cui, dipendentemente dalla sola formola

$$F^{(k+1)} L^{h+k} + F_{k+1} L^{h-(k+1)}$$

corrispondente al termine $\Psi^{r\left[\frac{k(k+1)}{2}+1\right]}$, possiamo trovare tutte le quantità (XIV), ci serviranno non difficilmente alla immediata soluzione per serie della (XVIII) senza ricorrere alla soluzione della (XXVI), come vedremo nella operazione seguente, operazione che applicherò in primo luogo alle equazioni particolari

$$\text{(XXXVI)} \qquad Ay^2 + By + C = 0,$$

$$\text{(XXXVII)} \qquad Ay^3 + By^2 + Cy + D = 0,$$

per poi passare alla generale (XVIII), e operazione di cui ognuno potrà agevolmente dedur la ragione da quanto finora si è detto.

480. Prendendo la prima delle equazioni date, suppongo nella (XV) $h = 2$, onde avere la formola

$$F^{(k+1)} L^{2+k} + F_{k+1} L^{2-(k+1)},$$

Digitized by Google

scrivo la nostra equazione come segue

$$0 = Ay^2 + By + C,$$

a norma cioè della (XVI), e supponendo che fatto $x = 1$ questa (XVI) si riduca alla (XXXV), pongo

$$F' = A, \quad F_1 = B, \quad F'' = 0, \quad F_2 = C, \quad F''' = 0, \quad F_3 = 0, \quad \ldots.$$

Ciò eseguito, col fare successivamente $K = 0, 1, 2, 3, \ldots$, e collocando in luogo delle lettere F', F_1, F'', F_2, che ci risultano, i loro valori, determino pel n° 466 dalla

$$F^{(k+1)} L^{2+k} + F_{k+1} L^{2-(k+1)}$$

le quantità

$$\begin{aligned}
\Psi'' &= AL^2 + BL, \\
\Psi''' &= (2AL + B)M + C, \\
\Psi'''' &= AM^2 + (2AL + B)N, \\
\Psi^{IV} &= 2AMN + (2AL + B)P, \\
\Psi^{V} &= 2AMP + AN^2 + (2AL + B)Q, \\
\Psi^{VI} &= 2AMQ + 2ANP + (2AL + B)R, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

suppongo ciascuna di queste $= 0$, sciolgo le equazioni corrispondenti e ritrovando con ciò

$$L = \frac{-B}{A}, \quad M = \frac{C}{B}, \quad N = \frac{AC^2}{B^3}, \quad P = \frac{2A^2C^3}{B^5}, \quad Q = \frac{5A^3C^4}{B^7}, \quad R = \frac{14A^4C^5}{B^9}, \ldots,$$

la serie

$$y' = -\frac{B}{A} + \frac{C}{B} + \frac{AC^2}{B^3} + \frac{2A^2C^3}{B^5} + \frac{5A^3C^4}{B^7} + \frac{14A^4C^5}{B^9} + \cdots$$

ci darà una delle radici della (XXXVI).

Affine di avere per serie la radice seconda, scrivo nuovamente qui sotto la (XXXVI), ma la scrivo ponendo prima il termine By, poscia nella linea superiore il termine Ay^2, e nella inferiore il terzo C:

$$0 = By \begin{matrix} + Ay^2 \\ + C \end{matrix}.$$

Ciò fatto, dal paragone di questa con la (XVI) avendosi

$$h = 1, \quad F' = B, \quad F_1 = C, \quad F'' = A, \quad F_2 = 0, \quad F''' = 0, \quad \ldots$$

riduco la (XV) alla

$$F^{(k+1)} L^{1+k} + F_{k+1} L^{1-(k+1)},$$

e quindi, giusta il n° 466 trovando essere

$$\begin{aligned}
\Psi' &= BL + C, \\
\Psi'' &= BM + AL^2, \\
\Psi''' &= 2ALM + BN, \\
\Psi'''' &= AM^2 + 2ALN + BP, \\
\Psi^{V} &= 2AMN + 2ALP + BQ, \\
\Psi^{VI} &= 2AMP + AN^2 + 2ALQ + BR, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

Digitized by Google

uguaglio ciascuna di queste quantità allo zero, determino da esse

$$L = -\frac{C}{B}, \quad M = -\frac{AC^2}{B^3}, \quad N = -\frac{2A^2C^3}{B^5},$$

$$P = -\frac{5A^3C^4}{B^7}, \quad Q = -\frac{14A^4C^5}{B^9}, \quad R = -\frac{42A^5C^6}{B^{11}}, \quad \ldots,$$

e avremo la seconda radice

$$y'' = -\frac{C}{B} - \frac{AC^2}{B^3} - \frac{2A^2C^3}{B^5} - \frac{5A^3C^4}{B^7} - \frac{14A^4C^5}{B^9} - \frac{42A^5C^6}{B^{11}} - \ldots.$$

481. Passiamo a sciogliere l'equazione (XXXVII). Prendendo in essa in primo luogo il termine y^3 come corrispondente al termine $F'y^h$ (XVI), faccio

$$h = 3, \quad F' = A, \quad F_1 = B, \quad F'' = 0, \quad F_2 = C, \quad F''' = 0, \quad F_3 = D,$$

e converto la (XV) nella

$$F^{(k+1)}L^{3+k} + F_{k+1}L^{3-(k+1)}.$$

Ciò posto, determino col solito metodo le quantità

$$\Psi' = AL^3 + BL^2,$$
$$\Psi'' = (3AL^2 + 2BL)M + CL,$$
$$\Psi''' = (3AL + B)M^2 + CM + (3AL^2 + 2BL)N,$$
$$\Psi^{IV} = AM^3 + (6AL + 2B)MN + CN + (3AL^2 + 2BL)P + D,$$
$$\Psi^{V} = 3AM^2N + (6AL + 2B)MP + (3AL + B)N^2 + CP + (3AL^2 + 2BL)Q,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

uguaglio queste allo zero e, trovati come sopra i valori delle quantità $L, M, N, P, Q, \ldots$, avremo

$$y' = -\frac{B}{A} + \frac{C}{B} - \frac{C^2}{B^2} - \frac{A^2C^3 + 3ABC^3 + AB^3D}{B^5}$$
$$+ \frac{2AB^2C^4 - 6A^2BC^4 - 3A^3C^4 - 3A^2B^3CD}{B^7} + \ldots.$$

Venendo alla determinazione della seconda radice, prendo nella (XXXVII) come primo il termine By^2, e in vece di scrivere nuovamente questa equazione giusta la (XVI), come ho fatto nella (XXXVI), la lascio per maggiore semplicità come si trova, faccio l'esponente del By^2, cioè il $2 = h$, il coefficiente $B = F'$, chiamo F'', F''', ... i coefficienti dei termini che precedono questo, chiamo F_1, F_2, F_3, ... i coefficienti dei termini che gli succedono, onde sia $F'' = A$, $F''' = 0$, $F_1 = C$, $F_2 = D$, $F_3 = 0$, e dalla (XV) determinata

$$F^{(k+1)}L^{2+k} + F_{k+1}L^{2-(k+1)}$$

istituisco il calcolo, come negli esempi precedenti; e da questo otterremo

$$y'' = \frac{-C}{B} + \frac{B^3D - AC^3}{B^3C}$$
$$+ \frac{B^6D^2 + AB^3C^3D - 2A^2C^6}{B^5C^3} - \frac{2B^9D^3 + 3A^2B^3C^6D - 5A^3C^9}{B^7C^5} + \ldots.$$

Digitized by Google

Finalmente per determinare la radice terza, preso il termine Cy, faccio

$$h = 1, \quad F' = C, \quad F'' = B, \quad F''' = A, \quad F_1 = D,$$

riduco la (XV) alla

$$F^{(k+1)} L^{1+k} + F_{k+1} L^{1-(k+1)},$$

e fatto il solito calcolo ci verrà

$$y''' = -\frac{D}{C} - \frac{BD^2}{C^3} - \frac{2B^2D^3}{C^5} - \frac{5B^3D^4 - AC^3D^3}{C^7} - \frac{14B^4D^5 - 5ABC^3D^4}{C^9} - \cdots.$$

482. In generale, volendo per serie una delle radici della (XVIII), mi formo la serie

(XXXVIII) $$y = L + M + N + P + Q + R + \cdots,$$

e preso un termine qualunque dell'equazione data, per esempio il termine Hy^{m-n}, faccio l'esponente $m - n = h$, il coefficiente $H = F'$, chiamo F'', F''', ... i coefficienti dei termini a questo precedenti, chiamo F_1, F_2, ... i coefficienti dei termini ulteriori, cosicchè $F'' = G$, $F''' = F$, ..., $F_1 = I$, $F_2 = K$, ..., e dalla (XV) deduco la

(XXXIX) $$F^{(k+1)} L^{m-n+k} + F_{k+1} L^{m-n-(k+1)}.$$

In seguito col mezzo di questa formola servendomi del metodo accennato nel n° 466 determino le quantità Ψ', Ψ'', Ψ''', ..., avendo sempre presente che, solamente nei risultati compresi dalla $\Psi^{\left[\frac{k(k+1)}{2}+1\right]}$, devonsi aggiungere i valori che si hanno corrispondentemente dalla (XXXIX) (n° 466); formo le quantità $\Psi' = 0$, $\Psi'' = 0$, $\Psi''' = 0$, ...; determino da queste i valori delle quantità L, M, N, P, ..., il che sempre otterremo senza ricorrere ad equazioni di grado superiore al primo (n[i] 469, 425), e tali valori sostituiti nella (XXXVIII) ci daranno il valore domandato della radice.

Questo in generale è il metodo da tenersi per una radice qualunque della (XVIII); supponendo poi successivamente $n = 0, 1, 2, 3, \ldots m - 1$, e però in corrispondenza

$$\begin{array}{llllll}
h = m, & m-1, & m-2, & m-3, & \ldots, & 1, \\
F' = A, & B, & C, & D, & \ldots, & U, \\
F'' = 0, & A, & B, & C, & \ldots, & T, \\
F''' = 0, & 0, & A, & B, & \ldots, & S, \\
F^{\text{IV}} = 0, & 0, & 0, & A, & \ldots, & R, \\
\ldots & & & & & \\
F_1 = B, & C, & D, & E, & \ldots, & V, \\
F_2 = C, & D, & E, & F, & \ldots, & 0, \\
F_3 = D, & E, & F, & G, & \ldots, & 0, \\
\ldots & & & & &
\end{array}$$

essendo A, B, C, ..., T, U, V i coefficienti tutti della (XVIII); se convertiremo la

Digitized by Google

(XXXIX) corrispondentemente nelle

$$F^{(k+1)}L^{m+k} + F_{k+1}L^{m-(k+1)},$$
$$F^{(k+1)}L^{m+(k-1)} + F_{k+1}L^{m-(k+2)},$$
$$F^{(k+1)}L^{m+(k-2)} + F_{k+1}L^{m-(k+3)},$$
$$F^{(k+1)}L^{m+(k-3)} + F_{k+1}L^{m-(k+4)},$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$F^{(k+1)}L^{k+1} + F_{k+1}L^{-k},$$

e se replicheremo sempre il medesimo calcolo (n° 466) ci risulteranno così, come nei due esempi precedenti, tutte le m radici della (XVIII).

483. Merita riflessione il caso in cui qualcuno dei coefficienti A, B, C, ... sia zero. Se sia per esempio zero il coefficiente H, potremo bensì trovare le $m-2$ radici della (XVIII) che corrispondono alle supposizioni di

$$h = m,\quad m-1,\quad m-2,\quad \ldots,\quad m-n+2,\quad m-n-1,\quad \ldots,\quad 1;$$

ma le due radici corrispondenti alle ipotesi di $h = m-n+1$, $m-n$, non restano col nostro metodo determinate. Dalle (XXXIV), (XXXV) si vede che nel primo di questi due casi ottiensi

$$y^{(n)} = -\frac{0}{G} + \frac{I}{0} + \frac{GI^2}{0} + \cdots$$

e nel secondo

$$y^{(n+1)} = -\frac{I}{0} - \frac{GI^2}{0} - \frac{2GI^3}{0} + \cdots$$

espressioni amendue, delle quali non conosciamo il valore.

Affine di togliere un simile inconveniente, allorchè qualcheduno dei coefficienti della (XVIII) è zero, suppongo $y = u + r$, sostituisco, e invece di sciogliere l'equazione proposta, risolvo la trasformata, ponendo in seguito $y - r$ invece della u e dando alla r quel valore che nelle diverse circostanze vedesi più opportuno a rendere le serie più convergenti.

Se sia per esempio

$$Ay^2 + C = 0$$

l'equazione data, con la ipotesi di

$$y = u + r$$

la trasformo nella

$$au^2 + bu + c = 0,$$

in cui

$$a = A,\quad b = 2Ar,\quad c = Ar^2 + C,$$

ottengo pel n° 480

$$u' = -\frac{b}{a} + \frac{c}{b} + \frac{ac^2}{b^3} + \frac{2a^2c^3}{b^5} + \frac{5a^3c^4}{b^7} + \cdots$$

$$u'' = -\frac{c}{b} - \frac{ac^2}{b^3} - \frac{2a^2c^3}{b^5} - \frac{5a^3c^4}{b^7} - \cdots;$$

Digitized by Google

sostituendo in luogo delle quantità u', u'', a, b, c i valori corrispondenti, otterremo

$$y' = r - \frac{2Ar}{A} + \frac{Ar^2 + C}{2Ar} + \frac{A(Ar^2 + C)^2}{8A^3r^3} + \frac{2A^2(Ar^2 + C)^3}{32A^5r^5} + \frac{5A^3(Ar^2 + C)^4}{128A^7r^7} + \cdots,$$

$$y'' = r - \frac{Ar^2 + C}{2Ar} - \frac{A(Ar^2 + C)^2}{8A^3r^3} - \frac{2A^2(Ar^2 + C)^3}{32A^5r^5} - \frac{5A^3(Ar^2 + C)^4}{128A^7r^7} - \cdots.$$

Facendo quivi $r = 1$, ne verrà

$$y' = -1 + \frac{A + C}{2A} + \frac{(A + C)^2}{8A^2} + \frac{2(A + C)^3}{32A^3} + \frac{5(A + C)^4}{128A^4} + \cdots$$

$$y'' = 1 - \frac{A + C}{2A} - \frac{(A + C)^2}{8A^2} - \frac{2(A + C)^3}{32A^3} - \frac{5(A + C)^4}{128A^4} - \cdots.$$

Digitized by Google

CAPO XX.

DELLA SOLUZIONE PER SERIE DELLE EQUAZIONI ALGEBRAICHE COL MEZZO DELLE FRAZIONI CONTINUE, E RIFLESSIONI ULTERIORI INTORNO ALLE EQUAZIONI RIDUCIBILI A GRADO INFERIORE.

---

484. *Vogliasi risolvere la* $Z = 0$ (n° 413) *riducendo il valor della* y *in una frazione continua.*

Suppongo perciò

(I) $$y = X' + \cfrac{1}{X'' + \cfrac{1}{X''' + \cfrac{1}{X^{IV} + \cfrac{1}{X^{V} + \cfrac{1}{X^{VI} + \cdots}}}}},$$

in cui

$X' = Lx^{\alpha}$, $X'' = Mx^{\beta}$, $X''' = Nx^{\gamma}$, $X^{IV} = Px^{\delta}$, $X^{V} = Qx^{\varepsilon}$, $X^{VI} = Rx^{\zeta}$, ...

Avendosi

$$\frac{1}{X^{VI}} = \frac{1}{Rx^{\zeta}} = \frac{1}{R}x^{-\zeta}$$

ed

$$X^{V} + \frac{1}{X^{VI}} = Qx^{\varepsilon} + \frac{1}{R}x^{-\zeta},$$

se sia $-\zeta < \varepsilon$, fatto $x = \infty$, dovrà $\frac{1}{X^{VI}}$ svanire rapporto ad X^{V}. Così svanirà $\frac{1}{X^{V}}$ riguardo ad X^{IV} nel caso che sia $-\varepsilon < \delta$; scomparirà $\frac{1}{X^{IV}}$ rapporto ad X''' se $-\delta < \gamma$, e così di seguito. Dunque se porremo gli esponenti α, β, γ, δ, ε, ... tali che

(II) $$\alpha > -\beta, \quad \beta > -\gamma, \quad \gamma > -\delta, \quad \delta > -\varepsilon, \quad \ldots,$$

nella ipotesi di $x = \infty$ la quantità

$$X' + \cfrac{1}{X'' + \cdots}$$

si cangierà nella X', la

$$X'' + \cfrac{1}{X''' + \cdots}$$

Digitized by Google

nella X'', la

$$X''' + \frac{1}{X^{IV} + \ldots}$$

nella X'''; e così in progresso.

Si verifichino in realtà i rapporti (II), e ciò presupposto, cerchiamo in primo luogo di determinare l'esponente α ed il coefficiente L di Lx^{α}. Faccio perciò $x = \infty$, colloco nella $Z = 0$ in luogo della y il termine Lx^{α}, e come nel n° 413 troverò i due valori che si domandano.

485. Passando in seguito alla determinazione delle β, M, faccio

$$X'' + \frac{1}{X''' + \ldots} = u,$$

onde la (I) divenga $y = X' + \frac{1}{u}$, sostituisco nella $Z = 0$, e la trasformata che ne viene, pel n° 81 sarà la

(III) $$P_1 u^h + Q_1 u^{h-1} + R_1 u^{h-2} + S_1 u^{h-3} + \cdots = 0,$$

essendo i coefficienti P_1, Q_1, R_1, S_1, ... gli stessi affatto che quei della equazione (X) nel Capo XVIII.

Suppongo ora che la L non abbia che un solo valore $= L'$, come nel n° 415, onde in Q_1 la quantità G' [Capo XVIII, (X)] non possa essere zero, e faccio $x = \infty$: la nostra trasformata diventando perciò

(IV) $$F'' x^{\pi''} u^h + G' x^{\pi' - \alpha} u^{h-1} + H' x^{\pi' - 2\alpha} u^{h-2} + I' x^{\pi' - 3\alpha} u^{h-3} + \cdots = 0$$

(n° 416), e la $u = X'' + \frac{1}{X''' + \ldots}$ convertendosi nella $u = Lx^{\beta}$ (n° prec.), avremo dalla sostituzione la serie di esponenti

$$h\beta + \pi'', \quad (h-1)\beta + \pi' - \alpha, \quad (h-2)\beta + \pi' - 2\alpha, \quad (h-3)\beta + \pi' - 3\alpha, \quad \ldots.$$

Da questa ricavo per β i valori

$$\pi' - \pi'' - \alpha, \qquad \frac{\pi' - \pi''}{2} - \alpha, \qquad \frac{\pi' - \pi''}{3} - \alpha, \qquad \ldots;$$

ma il massimo fra questi deve essere il vero valore di β (n° 393): dunque sarà

$$\beta = \pi' - \pi'' - \alpha;$$

ed essendo $\pi' > \pi''$ (n^{i} 414, 407), $-\beta = \alpha + \pi'' - \pi'$, avremo difatti $\alpha > -\beta$.

Vedremo poi, come nel n° 417, che a cagione di $\beta > -\alpha$, essa β non può avere altro valore che il ritrovato.

In quanto al coefficiente M la (IV) divenendo

$$F'' M^h x^{h\beta + \pi''} + G' M^{h-1} x^{h\beta + \pi''} = 0$$

ci darà $M = -\frac{G'}{F''}$.

486. Colloco nella (III)

$$u = Mx^{\beta} + \frac{1}{z},$$

Digitized by Google

ne verrà l'equazione

$$(V) \qquad P_2 z^h + Q_2 z^{h-1} + R_2 z^{h-2} + S_2 z^{h-3} + \cdots = 0$$

essendo

$$P_2 = P_1 M^h x^{h\beta} + Q_1 M^{h-1} x^{(h-1)\beta} + R_1 M^{h-2} x^{(h-2)\beta} + S_1 M^{h-3} x^{(h-3)\beta} + \cdots$$

$$Q_2 = hP_1 M^{h-1} x^{(h-1)\beta} + (h-1) Q_1 M^{h-2} x^{(h-2)\beta} + (h-2) R_1 M^{h-3} x^{(h-3)\beta} + \cdots$$

$$R_2 = \frac{h(h-1)}{2} P_1 M^{h-2} x^{(h-2)\beta} + \frac{(h-1)(h-2)}{2} Q_1 M^{h-3} x^{(h-3)\beta} + \cdots$$

$$S_2 = \frac{h(h-1)(h-2)}{2.3} P_1 M^{h-3} x^{(h-3)\beta} + \cdots$$

. . . . . .

e gli esponenti della x in P_2, vedesi che verranno espressi in generale dalla forma $\pi - f_1 \alpha + (h - f_1)\beta$, dando successivamente alla π ed alla f_1 gli stessi valori del n° 408. Così vedremo che gli esponenti della x in Q_2 vengono rappresentati dalla forma

$$\pi - f_1 \alpha + (h - f_1 - 1)\beta,$$

gli esponenti istessi in R_2 si esprimono dalla

$$\pi - f_1 \alpha + (h - f_1 - 2)\beta,$$

in S_2 dalla

$$\pi - f_1 \alpha + (h - f_1 - 3)\beta,$$

in generale in uno qualunque di questi coefficienti dalla

$$\pi - f_1 \alpha + (h - f_1 - f_2)\beta$$

(n° 409).

487. Poniamo nella (V) $x = \infty$, e perciò $\zeta = N x^\gamma$.

Poichè in P_2 i due termini

$$(VI) \qquad F'' M^h x^{\pi'' + h\beta} + G' M^{h-1} x^{\pi' - \alpha + (h-1)\beta}$$

pel valore determinato della β elidonsi fra di loro (n° 485), e poichè pel valore di α abbiamo costantemente $F' = 0$ (n° 414), suppongasi che il primo termine, il quale per la ipotesi di $x = \infty$ resta in P_2, sia $\pi''' - f_1' \alpha + (h - f_1')\beta$, e chiamiamo questo φ' (n° 420). Per determinare in seguito quale sia l'esponente che nella nostra supposizione sussiste in Q_2, osservo che i due termini (VI) del coefficiente P_2 per la natura della trasformata in Q_2 divengono

$$hF'' M^{h-1} x^{\pi'' + (h-1)\beta} + (h-1) G' M^{h-2} x^{\pi' - \alpha + (h-2)\beta};$$

ma gli accennati termini (VI) si distruggono fra loro; dunque gli altri due di Q_2 si ridurranno al solo

$$- G' M^{h-2} x^{\pi' - \alpha + (h-2)\beta}.$$

Ora l'esponente

$$\pi'' + h\beta = \pi' - \alpha + (h-1)\beta$$

Digitized by Google

in P_2 era il massimo (n° 485); dunque anche l'altro

$$\pi'' + (h-1)\beta = \pi' - \alpha + (h-2)\beta$$

sarà il massimo in Q_2, e quello per conseguenza che sussiste. In conseguenza di questo, e per l'indole della trasformazione vedesi poscia che l'esponente massimo in R_2 sarà

$$\pi'' + (h-2)\beta = \pi' - \alpha + (h-3)\beta,$$

in S_2 sarà

$$\pi'' + (h-3)\beta = \pi' - \alpha + (h-4)\beta,$$

e così in progresso.

Sostituisco presentemente Nx^γ in luogo della z, ed avremo la serie di esponenti

$$\varphi' + h\gamma, \quad \pi' - \alpha + (h-2)\beta + (h-1)\gamma, \quad \pi' - \alpha + (h-3)\beta + (h-2)\gamma,$$
$$\pi' - \alpha + (h-4)\beta + (h-3)\gamma, \quad \ldots.$$

Faccio il solito paragone, e trovo per γ i valori

$$\text{(VII)} \quad \pi'-\varphi'-\alpha+(h-2)\beta, \quad \frac{\pi'-\varphi'-\alpha+(h-3)\beta}{2}, \quad \frac{\pi'-\varphi'-\alpha+(h-4)\beta}{3}, \quad \ldots.$$

Ora pel n° 485 dovendo essere $\varphi' < \pi'' + h\beta$, ossia

$$\varphi' < \pi' - \alpha + (h-1)\beta,$$

supponiamo

$$\varphi' = \pi' - \alpha + (h-1)\beta - \Psi;$$

si collochi nelle quantità (VII) in luogo della φ' questo valore, e avremo i risultati

$$\Psi - \beta, \quad \frac{\Psi}{2} - \beta, \quad \frac{\Psi}{3} - \beta, \quad \ldots;$$

ma il primo di tutti questi a cagione di $\Psi > 0$ è maggiore degli altri; dunque anche il primo dei risultati (VII) sarà più grande dei susseguenti; e perciò avremo

$$\gamma = \pi' - \varphi' - \alpha + (h-2)\beta.$$

Dovendo poi essere $\beta > -\gamma$ (n° 484), troveremo facilmente non potersi per la γ ottenere altro valore.

Dato alla γ il dovuto valore, chiamato B il coefficiente che in P_2 corrisponde all'esponente φ' (n° 421) e fatto $x = \infty$, $z = Nx^\gamma$, la (V) si ridurrà alla

$$BN^h x^{\varphi'+h\gamma} - G' M^{h-2} N^{h-1} x^{\varphi'+h\gamma} = 0,$$

e però avremo $N = \dfrac{G' M^{h-2}}{B}$.

488. Facciamo

$$z = Nx^\gamma + \frac{1}{t},$$

onde dalla (V) abbiasi la trasformata

$$\text{(VIII)} \qquad P_3 t^h + Q_3 t^{h-1} + R_3 t^{h-2} + S_3 t^{h-3} + \cdots = 0.$$

Digitized by Google

Supposto

$$P_3 = P_2 N^h x^{h\gamma} + Q_2 N^{h-1} x^{(h-1)\gamma} + R_2 N^{h-2} x^{(h-2)\gamma} + S_2 N^{h-3} x^{(h-3)\gamma} + \cdots,$$

$$Q_3 = hP_2 N^{h-1} x^{(h-1)\gamma} + (h-1) Q_2 N^{h-2} x^{(h-2)\gamma} + (h-2) R_2 N^{h-3} x^{(h-3)\gamma} + \cdots,$$

$$R_3 = \frac{h(h-1)}{2} P_2 N^{h-2} x^{(h-2)\gamma} + \frac{(h-1)(h-2)}{2} Q_2 N^{h-3} x^{(h-3)\gamma} + \cdots,$$

$$S_3 = \frac{h(h-1)(h-2)}{2.3} P_2 N^{h-3} x^{(h-3)\gamma} + \cdots,$$

. . . . . ,

ciascun esponente della x in P_3 verrà espresso dalla formola

$$\pi - f_1\alpha + (h - f_1 - f_2)\beta + (h - f_2)\gamma,$$

ciascun esponente in Q_3 verrà rappresentato dalla

$$\pi - f_1\alpha + (h - f_1 - f_2)\beta + (h - f_2 - 1)\gamma,$$

in R_3 dalla

$$\pi - f_1\alpha + (h - f_1 - f_2)\beta + (h - f_2 - 2)\gamma;$$

e in generale in uno qualunque dei nostri coefficienti l'esponente della x verrà espresso dalla formola

$$\pi - f_1\alpha + (h - f_1 - f_2)\beta + (h - f_2 - f_3)\gamma.$$

489. Ciò posto, distruggendosi fra loro i due termini

$$\text{(IX)} \qquad B N^h x^{\varphi' + h\gamma} - G' M^{h-2} N^{h-1} x^{\pi' - \alpha + (h-2)\beta + (h-1)\gamma},$$

nei quali l'esponente

$$\varphi' + h\gamma = \pi' - \alpha + (h-2)\beta + (h-1)\gamma$$

è il massimo esponente della x nella (VIII), supponiamo che il termine, il quale in P_3 ha l'esponente prossimamente inferiore all'accennato, sia $C x^{\varphi''}$, essendo

$$\varphi'' = \pi^{IV} - f_1''\alpha + \varphi'(h - f_1'' - f_2'')\beta + (h - f_2'')\gamma$$

(n° prec.). Nella trasformazione i due termini (IX) in Q_3 divengono

$$hBN^{h-1} x^{\varphi' + (h-1)\gamma} - (h-1) G' M^{h-2} N^{h-2} x^{\pi' - \alpha + (h-2)\beta + (h-2)\gamma} = G' M^{h-2} N^{h-2} x^{\pi' - \alpha + (h-2)\beta + (h-2)\gamma},$$

e quindi abbiamo in R_3 un termine con l'esponente

$$\pi' - \alpha + (h-2)\beta + (h-3)\gamma,$$

in S_3 uno con l'esponente

$$\pi' - \alpha + (h-2)\beta + (h-4)\gamma, \ldots,$$

e frattanto in P_2, e però in P_3, Q_3, R_3, ... i due termini (VI) mancano sempre (n° 487). Dunque, posto $x = \infty$, $t = Px^{h\delta}$, la serie degli esponenti massimi sarà

$$\varphi'' + h\delta, \quad \pi' - \alpha + (h-2)\beta + (h-2)\gamma + (h-1)\delta,$$

$$\pi' - \alpha + (h-2)\beta + (h-3)\gamma + (h-2)\delta,$$

$$\pi' - \alpha + (h-2)\beta + (h-4)\gamma + (h-3)\delta,$$

. . . . . .

Digitized by Google

e avendosi da questa i risultati

$$\pi' - \varphi'' - \alpha + (h-2)\beta + (h-2)\gamma,$$

$$\frac{\pi' - \varphi'' - \alpha + (h-2)\beta + (h-3)\gamma}{2}, \qquad \frac{\pi' - \varphi'' - \alpha + (h-2)\beta + (h-4)\gamma}{3}, \ldots$$

troveremo, come nel n° 487, dover essere

$$\delta = \pi' - \varphi'' - \alpha + (h-2)\beta + (h-2)\gamma.$$

Così, dovendo risultare $\gamma > -\delta$ (n° 484), troveremo che δ non può avere altri valori.

Pel valore determinato della δ, ridotta la (VIII) alla

$$C P^h x^{\varphi''+h\delta} + G' M^{h-2} N^{h-2} P^{h-1} x^{\varphi''+h\delta} = 0,$$

ne verrà

$$P = -\frac{G' M^{h-2} N^{h-2}}{C}.$$

490. Pongasi

$$t = P x^{\delta} + \frac{1}{s},$$

e si trasformi la (VIII) nella

$$(X) \qquad P_4 s^h + Q_4 s^{h-1} + R_4 s^{h-2} + S_4 s^{h-3} + \cdots = 0.$$

Determinato, come nei n^i 486, 488, il valore dei coefficienti P_4, Q_4, R_4, ... vedremo, come precedentemente, che gli esponenti della x in P_4 sono della forma

$$\pi - f_1\alpha + (h - f_1 - f_2)\beta + (h - f_2 - f_3)\gamma + (h - f_3)\delta,$$

in Q_4 della forma

$$\pi - f_1\alpha + (h - f_1 - f_2)\beta + (h - f_2 - f_3)\gamma + (h - f_3 - 1)\delta,$$

in R_4 della forma

$$\pi - f_1\alpha + (h - f_1 - f_2)\beta + (h - f_2 - f_3)\gamma + (h - f_3 - 2)\delta,$$

e in generale hanno essi la forma

$$\pi - f_1\alpha + (h - f_1 - f_2)\beta + (h - f_2 - f_3)\gamma + (h - f_3 - f_4)\delta.$$

Se, fatto successivamente

$$s = Q x^{\varepsilon} + \frac{1}{r}, \qquad r = R x^{\zeta} + \frac{1}{q}, \quad \ldots,$$

trovassimo le successive trasformate

$$P_5 r^h + Q_5 r^{h-1} + R_5 r^{h-2} + S_5 r^{h-3} + \cdots = 0,$$
$$P_6 q^h + Q_6 q^{h-1} + R_6 q^{h-2} + S_6 q^{h-3} + \cdots = 0,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

si vedrebbe sempre, nella maniera medesima, che la formola generale dell'esponente della x nella prima delle nostre trasformate sarebbe la

$$\pi - f_1\alpha + (h - f_1 - f_2)\beta + (h - f_2 - f_3)\gamma + (h - f_3 - f_4)\delta + (h - f_4 - f_5)\varepsilon,$$

Digitized by Google

nella seconda sarebbe

$$\pi-f_1\alpha+(h-f_1-f_2)\beta+(h-f_2-f_3)\gamma+(h-f_3-f_4)\delta+(h-f_4-f_5)\varepsilon+(h-f_5-f_6)\zeta,$$

e così in progresso.

491. Supposto nella (X)

$$\varphi''' = \pi^{v} - f_1'''\alpha + (h - f_1''' - f_2''')\beta + (h - f_2''' - f_3''')\gamma + (h - f_3''')\delta,$$

sia $Dx^{\varphi'''}$ il primo termine che sussiste in P_4, essendosi già eliminati i precedenti. Gli esponenti massimi nel Q_4, R_4, S_4, ... troveremo, come nei n^{i} 487, 489, essere rispettivamente i seguenti

$$\pi' - \alpha + (h-2)\beta + (h-2)\gamma + (h-2)\delta,$$
$$\pi' - \alpha + (h-2)\beta + (h-2)\gamma + (h-3)\delta,$$
$$\pi' - \alpha + (h-2)\beta + (h-2)\gamma + (h-4)\delta,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Posto dunque $x = \infty$, e però $s = Qx^{t}$, vedremo risultare

$$\varepsilon = \pi' - \varphi''' + (h-2)\beta + (h-2)\gamma + (h-2)\delta$$

e

$$Q = \frac{G' M^{h-2} N^{h-2} P^{h-2}}{D}.$$

Così, supposto

$$\varphi^{iv} = \pi^{vi} - f_1^{v}\alpha + (h - f_1^{v} - f_2^{v})\beta + (h - f_2^{v} - f_3^{v})\gamma + (h - f_3^{v} - f_4^{v})\delta + (h - f_4^{v})\varepsilon$$

ed $Ex^{\varphi^{iv}}$ il termine che resta in P_5, troveremo essere

$$\zeta = \pi' - \varphi^{iv} + (h-2)\beta + (h-2)\gamma + (h-2)\delta + (h-2)\varepsilon$$

ed

$$R = \frac{G' M^{h-2} N^{h-2} P^{h-2} Q^{h-2}}{E}.$$

Lo stesso in seguito.

492. Ritrovato nell'esposta maniera il valore degli esponenti α, β, γ, δ, ε, ζ, ... e quello dei coefficienti L, M, N, P, Q, R, ..., avremo quindi la dovuta determinazione delle quantità

$$X' = Lx^{\alpha}, \quad X'' = Mx^{\beta}, \quad X''' = Nx^{\gamma}, \quad \ldots,$$

e queste in seguito sostituite nella frazione (I) ci daranno uno dei valori della y nella $Z = 0$. Quanto si è detto finora riguardo al valore L' della L supposto nel n° 485, dicesi egualmente rapporto agli altri L'', L''', L^{iv}, ..., purchè siano questi tutti disuguali fra loro. Dunque, replicando sempre lo stesso calcolo, determineremo per la y altrettanti valori corrispondenti. Che se due, tre, o più dei valori della L sono uguali fra loro, ripetendosi qui pure quanto si è detto nei n^{i} 429 e seguenti, troveremo nell'istessa guisa che il calcolo medesimo ci somministrerà bensì tutti i corrispondenti valori della y, ma nelle rispettive determinazioni delle M, N, P, ... converrà di sovente in quest'ultimo caso cadere per un certo numero di volte a risolvere delle equazioni di

Digitized by Google

grado superiore al primo: e questo accidente non accaderà mai nel caso considerato da prima.

493. La precedente frazione (I) tanto sarà più convergente al vero valore della y, essendo questa reale, quanto la x è più grande. Supponendo al contrario x infinitesima, potremo determinare le quantità X', X'', X''', ..., come precedentemente, col supporre però $\alpha < -\beta$, $\beta < -\gamma$, $\gamma < -\delta$, ..., e avremo così un'altra frazione continua tanto più approssimantesi al vero valore della nostra y, quanto la x è minore. Trovate poi rapporto a ciascun valore della y sì l'una che l'altra di queste due frazioni, vedesi che in tal modo verremo ad ottenere completamente la soluzione del problema propostoci nel n° 484.

494. *Dimandasi di risolvere per frazioni continue l'equazione* (XVIII) *del* Capo XIX *supposta come nel* n° 468.

Riduco l'equazione data alla (XXVI) del Capo XIX (n^i 469, 470, 471), effettuo su di quest'ultima il calcolo precedente, faccio nei risultati ultimi $x = 1$, e però $a = A$, $b = B$, $c = C$, ..., ed in tal modo avremo la soluzione domandata. Ora nella (XXVI) trovasi risultare

$$\beta = 1 - \alpha, \quad \gamma = \alpha, \quad \delta = 1 - \alpha, \quad \varepsilon = \alpha, \quad \zeta = 1 - \alpha, \quad \ldots,$$

onde la (I) diviene

$$y = Lx^\alpha + \cfrac{1}{Mx^{1-\alpha} + \cfrac{1}{Nx^\alpha + \cfrac{1}{Px^{1-\alpha} + \cfrac{1}{Qx^\alpha + \cfrac{1}{Rx^{1-\alpha} + \ldots}}}}}.$$

Dunque, in questo caso non restando più a determinarsi che i coefficienti L, M, N, P, Q, R, ..., e questi inoltre dipendendo da tante equazioni tutte del primo grado, potremo per la loro determinazione servirci, se più ci piace, del metodo dei coefficienti indeterminati, col ridurre cioè pel n° 361 la frazione continua a frazione ordinaria, col sostituire quest'ultima nella (XXVI) del Capo XIX in luogo della y, e con uguagliare allo zero i coefficienti che ci risultano delle diverse potenze della x. Se la (XVIII) del Capo XIX mancasse di qualche termine, ridurrei prima questa, come nel n° 483, ad un'altra equazione non mancante di termine alcuno, supponendo $y = u + r$; scioglierei poscia quest'ultima equazione, nei valori risultati porrei $y - r$ in luogo della u, e finalmente darei alla r il valore che troverei più opportuno.

495. Sia

$$ay^2 + by + c = 0$$

l'equazione data. Fatto per semplicità nella (XXVI) del Capo XIX $\beta = 1$, riduco questa

Digitized by Google

alla

$$ay^2 + bxy + cx = 0;$$

trovo quindi $\alpha' = 1$, $\alpha'' = 0$; e corrispondentemente $\beta' = 0$, $\beta'' = 1$; eseguisco finalmente i calcoli precedenti, e fatto $x = 1$ troveremo

$$y' = -\frac{b}{a} + \cfrac{1}{\frac{b}{c} + \cfrac{1}{-\frac{b}{a} + \cfrac{1}{\frac{b}{c} + \cfrac{1}{-\frac{b}{a} + \cfrac{1}{\frac{b}{c} + \cdots}}}}}}$$

$$y'' = -\frac{c}{b} + \cfrac{1}{\frac{-b^3}{ac^2} + \cfrac{1}{\frac{c}{2b} + \cfrac{1}{\frac{-4b^3}{ac^2} + \cfrac{1}{\frac{c}{6b} + \cfrac{1}{\frac{-9b^3}{ac^2} + \cdots}}}}}}$$

Poichè abbiamo

$$m + \cfrac{1}{-n + \cdots} = m - \cfrac{1}{n - \cdots} = (m-1) + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{(n-1) - \cdots}},$$

e però

$$m' + \cfrac{1}{-n' + \cfrac{1}{m'' + \cfrac{1}{-n'' + \cfrac{1}{m''' + \cfrac{1}{-n''' + \cdots}}}}}$$

$$= (m'-1) + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{(n'-2) + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{(m''-2) + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{(n''-2)}}}}}} + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{(m'''-2) + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{(n'''-2) + \cdots}}}}$$

Digitized by Google

i due precedenti valori della y si ridurranno ai seguenti

$$y' = -\frac{b}{a} + \cfrac{1}{\frac{(b-c)}{c} + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{\frac{(b-2a)}{a} + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{\frac{(b-2c)}{c} + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{\frac{(b-2a)}{a} + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{\frac{(b-2c)}{c}} + \cdots}}}}}}}}$$

$$y'' = -\left(\frac{c+b}{b}\right) + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{\left(\frac{b^3 - 2ac^2}{ac^2}\right) + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{\left(\frac{c-4b}{2b}\right) + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{\left(\frac{4b^3 - 2ac^2}{ac^2}\right)}}}}}}$$

$$+ \cfrac{1}{1 + \left(\frac{c-12b}{6b}\right) + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{\left(\frac{9b^3 - 2ac^2}{ac^2}\right) + \cdots}}}$$

valori, nei quali tutti i successivi denominatori sono ridotti a forma positiva.

---

496. Mi sia permesso l'aggiungere finalmente alcune *Riflessioni sulle equazioni capaci di riduzione.*

Quantunque siasi dimostrata impossibile la soluzione generale delle equazioni algebraiche di grado superiore al quarto, pure le equazioni particolari, di qualunque grado esse siansi, meritano una speciale considerazione.

La dimostrazione del Capo XIII versa solamente intorno alle equazioni generali, equazioni nelle quali si prescinde essenzialmente da qualsivoglia valore determinato e da qualsivoglia privato rapporto fra alcune o tutte le radici della data; ma in una equazione particolare, appunto perchè è particolare, le sue radici hanno necessariamente certi valori determinati, e alcune fra loro, o tutte, sono dotate di qualche particolare relazione.

Dunque per questa relazione, per quanto si è detto nei Capi XV, XVI, la nostra equazione dovrà essere capace di abbassamento, e quindi di soluzione. Prendiamo a considerare quest'ultima proposizione: sebbene potesse questa esser vera in tutta la sua estensione, sebbene qualsivoglia equazione particolare potesse per quanto abbiamo detto, essere capace di soluzione; pure da questa non risulta contradizione alcuna con la proposizione del n° 290. Colà si parla delle equazioni generali, e sarà sempre vero

Digitized by Google

che nella equazione generale, per esempio del quinto grado, è impossibile il trovare una formola, la quale ci rappresenti tutte le sue radici indipendentemente dal loro particolare valore: quivi al contrario teniam conto dei valori particolari, e dipendentemente da questi cerchiamo le radici della data per dir così ad una ad una.

497. Sia

$$(D) \qquad x^m + Ax^{m-1} + Bx^{m-2} + \cdots = 0$$

la data equazione particolare, e chiamate al solito

$$x', \quad x'', \quad x''', \quad \ldots$$

le sue radici, sia

$$F(x')(x'')(x''') \ldots (x^\lambda) = H$$

l'espressione del rapporto che particolarmente esiste fra le λ radici

$$x', \quad x'', \quad x''', \quad \ldots, \quad x^{(\lambda)}$$

della (D) (n° 321). Se questa equazione di rapporto contiene dei rotti e dei radicali, la libero sì dagli uni, che dagli altri, e chiamo

$$(S) \qquad f(x')(x'')(x''') \ldots (x^{(\lambda)}) = K$$

l'equazione e la funzione intera e razionale, che da ciò mi risulta.

Ora la nostra (S) od è una funzione quale si suppose la (S) del n° 321 nei n^i 322, 324, 1° e 2° 325, 3° 325 mentre $\lambda < m$, 327, 328, 329, 330, 331, mentre $n(\mu + 1) < m$, od è funzione qual fu supposta essa (S) nel 3° n° 325, avendosi $\lambda = m$, o quale nei n^i 328, 329, 330, 331 essendo $n(\mu + 1) = m$.

Nella prima di queste supposizioni il primo membro della nostra (D) sarà sempre dotato di un fattore razionale (n^i 323, 326, 332); nella supposizione terza sarà la (D) abbassabile ad un'equazione del grado $\mu + 1$ (n° 333); ma nella seconda la nostra equazione nè è dotata di fattore alcuno razionale, nè è riducibile ad altra di grado minore (n° 326).

Dunque non possiamo dire che la nostra (D), quantunque equazione particolare, sia sempre capace di abbassamento e però di soluzione: essa lo sarà, ogni qualvolta su della sua equazione di rapporto ridotta razionale ed intera si verifichi la prima o la terza delle nostre supposizioni, e non mai quando si verifichi la seconda.

498. Avvi un caso, in cui la (S) sembra compresa nella terza supposizione, ma essendolo solo apparentemente, viene poi in sostanza a comprendersi dalla seconda.

Un esempio ce lo dimostrerà chiaramente. Supponiamo $m = 3$, onde la (D) divenga

$$x^3 + Ax^2 + Bx + C = 0;$$

avendosi

$$x' + x'' + x''' = -A, \qquad x'x''x''' = -C,$$

colla eliminazione della x''' otterremo

$$x'^2x'' + x'x''^2 + Ax'x'' = +C.$$

Sembra questa ultima essere un'equazione di relazione della forma

$$f(x', x'') = K;$$

ma restando essa ancor la medesima col porre la x''' tanto in luogo della x', che in

Digitized by Google

quello della x'', cosicchè abbiamo

$$x'^2 x''' + x' x''^2 + A x' x''' = + C,$$

ed

$$x''^2 x''' + x'' x''^2 + A x'' x''' = + C:$$

in realtà è della forma

$$f(x', x'', x''') = K.$$

Dunque questo caso verrà realmente compreso nella supposizione seconda, e non potrà però darci abbassamento veruno della (D).

499. *Data la (D) sarebbe desiderabile che potessimo determinare tutti i casi possibili, in cui essa può ridursi ad altra di grado inferiore e di assegnare i metodi, onde ottenere attualmente un simile abbassamento.*

Se noi conoscessimo la (S), mediante i (Capi XV, XVI) otterremmo subito la soluzione di questo importantissimo problema, ma essendoci tal funzione ignota, osservo primieramente che: *se nella (S) si verificasse la prima delle nostre ipotesi* (n° 497), *allora il primo membro della (D) sarebbe dotato di un fattore razionale;* comincerò dunque coi metodi del (Capo XIV) a provare, se esistono in realtà simili fattori razionali dal primo inclusivamente fino al grado $\frac{m^{\text{esimo}}}{2}$; se alcuno di questi ha luogo, col suo mezzo otterremo l'abbassamento richiesto, se no, supporremo che nella (S) si verifichi l'ipotesi terza, e ciò presupposto non avremo che a cercare qual sia la (S) medesima; imperciocchè conosciuta questa, il Capo XV ci darà poi la soluzione del problema.

500. *Data la forma di una equazione di relazione (S) qualunque razionale, determinare se questa ha luogo fra le radici della data (D), e, se si, determinare essa medesima.*

Cominciamo dal supporre l'esponente m della (D) numero pari,

$$\lambda = n = 2, \quad \text{e} \quad \mu + 1 = \frac{m}{2}$$

(n° 331). Poichè la

$$f(x', x'') = K \tag{XI}$$

che ci risulta, è funzione della x', x'' intera e razionale (n° 497), essa non potrà avere che una delle forme seguenti

$$\text{(XII)} \begin{cases} a(x' + x'') = K, \\ a(x'^2 + x''^2) + b x' x'' + c(x' + x'') = K, \\ a(x'^3 + x''^3) + b(x'^2 x'' + x' x''^2) + c(x'^2 + x''^2) + d x' x'' + e(x' + x'') = K \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots, \end{cases}$$

in cui i coefficienti $a, b, c, d, \dots, K$ siano tanti numeri per ora indeterminati ed interi, e dovrà non cambiar di valore per la permutazione di amendue le x', x'' corrispondentemente nelle x''', x^{IV}, x^{V}, x^{VI}, $\dots$, $x^{(m-1)}$, $x^{(m)}$.

Prendasi ora una qualunque delle (XII): espressa questa con la (XI) e cambiata la x' nella x, colloco nella (D) la x'' in luogo della x, e col mezzo delle due equa-

Digitized by Google

zioni

$$f(x, x'') - K = 0, \qquad x''^m + Ax''^{m-1} + Bx''^{m-2} + \cdots = 0$$

elimino la x'', ne verrà un'equazione

$$x^n + A'x^{n-1} + B'x^{n-2} + C'x^{n-3} + \cdots = 0, \tag{XIII}$$

in cui la x' è radice, e nella quale i coefficienti A', B', C', ... sono funzioni razionali delle a, b, c, d, ..., K.

Per la natura della (XI), ciò che si è detto della x' dicesi egualmente di tutte le altre radici della (D); dunque nella (XIII) non solo è radice la x', ma tali sono ancora tutte le x'', x''', ..., $x^{(m)}$, e il suo primo membro per conseguenza è divisibile esattamente per

$$(x - x')(x - x'')(x - x''') \ldots (x - x^{(m)}).$$

Dunque se dividerò il primo membro della (XIII) pel primo della (D), e in seguito, trascurato l'avanzo, il quale deve essere zero, se moltiplicherò quest'ultimo primo membro pel quoto che ci è risultato, il prodotto che ne viene sarà identico col primo membro della (XIII), e perciò paragonando fra loro i coefficienti omologhi, otterremo un numero n di equazioni, in cui le incognite saranno le quantità a, b, c, d, ..., K.

Ora chiamando q il grado della x in

$$f(x, x'') - K = 0,$$

abbiamo pel n° 130 $n = mq$, e se q è numero dispari, cosicchè $q = 2p - 1$, il numero delle a, b, c, d, ..., K vedesi dalle (XII) essere $p(p+1)$, e se q è pari, avendosi $q = 2p$, il numero delle stesse a, b, c, d, ..., K diviene $(p+1)^2$.

Dunque l'accennata operazione ci ha date $(2p-1)m$, oppure $2pm$ equazioni con $p(p+1)$, ovvero $(p+1)^2$ incognite corrispondenti. Secondo il diverso valore della p il numero delle equazioni può essere uguale, maggiore, e minore di quello delle indeterminate.

I. Supponiamo che gli sia uguale: in questa ipotesi elimino dalle n equazioni trovate le incognite b, c, d, ..., K, ed avuta un'equazione con la sola a, cerco le radici intere e razionali di questa. Sia a' una di tali radici, sostituisco questa nelle altre equazioni, e col metodo istesso cerco i corrispondenti valori interi, e razionali delle altre indeterminate b, c, d, ..., K. Se la a, o qualcuna delle altre b, c, d, ..., K, non ha questo valore intero e razionale, allora pel n° 497 conchiudo che neppure la D è dotata della supposta equazione di relazione. Che se ciascuna delle accennate a, b, c, d, ..., K ha un simile valore, allora diremo che esiste tale equazione di rapporto, e ci verrà questa determinata col sostituire nella (XI) i ritrovati valori.

II. Il numero delle equazioni superi quello delle incognite; in questa supposizione scuopriremo nella maniera medesima e il valore delle a, b, c, d, ..., e la determinazione della (XI): acciocchè però in questo caso possiamo dire che la (D) gode della supposta equazione di rapporto, converrà non solo che le a, b, c, d, ..., K abbiano dei valori interi e razionali corrispondenti, ma converrà di più che questi valori sostituiti opportunamente facciano rettificare tutte le n equazioni.

Digitized by Google

III. Finalmente il numero delle incognite sia maggiore di quello delle equazioni: in questo caso le incognite che vi sono di più, non sono già arbitrarie, ma dovendo essere numeri interi e razionali (n° 497), converrà determinarli a norma di questa condizione, cioè coi metodi che si espongono nell'algebra degli indeterminati. Supposto per esempio che, essendo le equazioni di numero n, le incognite siano di numero $n+1$, e supposto che fatte le dovute eliminazioni, giungasi ad un'equazione finale $f(a)(b)=0$, trovo seguendo le opportune vie, i valori interi e razionali delle a, b, sostituisco questi nelle altre equazioni, e avremo così la richiesta equazione di relazione, seppure esistano tutti i dovuti valori interi e razionali.

501. Sia

$$x^4 - 8x^3 + 20x^2 - 16x + 3 = 0 \tag{XIV}$$

l'equazione data, e cercasi se fra le sue radici esiste la prima delle equazioni di relazione (XII), cioè la

$$a(x' + x'') = K.$$

Riduco perciò la (XIV), e la

$$a(x' + x'') = K$$

alle

$$x''^4 - 8x''^3 + 20x''^2 - 16x'' + 3 = 0, \qquad a(x + x'') = K,$$

elimino da queste la x'', e avuta la

$$x^4 + (8a^4 - 4Ka^3)x^3 + (20a^4 - 24Ka^3 + 6K^2a^2)x^2$$

$$+(16a^4 - 40Ka^3 + 24K^2a^2 - 4K^3a)x + 3a^4 - 16Ka^3 + 20K^2a^2 - 8K^3a + K^4 = 0,$$

divido il primo membro di questa pel primo della (XIV), giacchè il quoto è 1, paragonando i coefficienti omologhi, avremo le equazioni

$$8a^4 - 4Ka^3 = -8, \qquad 20a^4 - 24Ka^3 + 6K^2a^2 = 20,$$

$$16a^4 - 40Ka^3 + 24K^2a^2 - 4K^3a = -16,$$

$$3a^4 - 16Ka^3 + 20K^2a^2 - 8K^3a + K^4 = 3.$$

Ora dalle prime due di queste equazioni ricavo $a=1$, $K=4$, e questi valori sostituiti nelle altre le fanno verificar tutte. Dunque nella (XIV) esiste la supposta equazione di rapporto, e divenendo essa

$$x' + x'' = 4,$$

col suo mezzo potremo pel n° 333 ridurre la (XIV) ad altra di minor grado.

502. Se l'esponente m della (D) sia dispari (n° 500), allora le radici che sostituite nella

$$f(x', x'') = K$$

conservano sempre lo stesso valore della funzione, giungeranno fino alle $x^{(m-2)}$, $x^{(m-1)}$, e quindi, col loro mezzo la (D) avendo pel n° 332 un fattore razionale del grado $m-1$, ne avrà un altro pur anche razionale del grado primo; e, questo già determinato, (n° 499) avendoci ridotta con la divisione la (D) al grado $m-1$, praticheremo su quest'ultima il calcolo precedente.

Digitized by Google

503. Potrebbe la nostra $f(x', x'')$ esser tale, che rapporto a un certo numero delle radici, per es. rapporto alle prime μ, avessimo

$$f(x', x'') = f(x'', x''') = f(x''', x^{IV}) = \cdots = f(x^{(\mu-2)}, x^{(\mu-1)}) = f(x^{(\mu-1)}, x^{(\mu)}) = K,$$

e rapporto alle susseguenti risultasse

$$f(x^{(\mu+1)}, x^{(\mu+2)}) = f(x^{(\mu+3)}, x^{(\mu+4)}) = f(x^{(\mu+5)}, x^{(\mu+6)}) = \cdots$$
$$\cdots = f(x^{(m-3)}, x^{(m-2)}) = f(x^{(m-1)}, x^{(m)}) = K.$$

In questo caso i primi valori della nostra funzione costantemente $= K$ essendo in numero di $\mu - 1$, e i secondi in numero di $\frac{m-\mu}{2}$, la (D) sarà riducibile, come nei n^{i} 331, 333, ad un'equazione del grado

$$\mu - 1 + \frac{m-\mu}{2} = \frac{m+\mu-2}{2}.$$

Nello sciogliere poi il problema del n° 500 volendosi conoscere quando quest'accidente succeda, converrà far attenzione all'equazione (XIII): imperciocchè, quando questo abbia luogo, non difficilmente si vede che tale equazione aver deve le radici x'', x''', x^{IV}, ..., $x^{(\mu-2)}$, $x^{(\mu-1)}$, ripetute ciascuna due volte, e le altre x', $x^{(\mu)}$, $x^{(\mu+1)}$, $x^{(\mu+2)}$, ..., $x^{(m)}$ replicate una volta sola. Dunque osserverò da prima se abbiasi n non $< m + \mu - 2$ essendo $\mu > 2$, e se sì, determinati i coefficienti A', B', C', ... osserverò pel n° 306, se nella (XIII) si contengono $\mu - 2$ radici uguali ad altre $\mu - 2$. Ciò succedendo la nostra funzione sarà appunto tale quale ora la consideriamo; altrimenti, non lo sarà.

504. Avendosi $\lambda > \eta$ (n° 331), se la supposta equazione sia della forma

$$f(x', x'')(x''')(x^{IV}) = K;$$

cambiata la x' nella x, eliminerei le tre x'', x''', x^{IV} mediante le equazioni

$$f(x', x'')(x''')(x^{IV}) - K = 0, \qquad x''^{m} + Ax''^{m-1} + Bx''^{m-2} + \cdots = 0,$$
$$x'''^{m} + Ax'''^{m-1} + Bx'''^{m-2} + \cdots = 0, \qquad x^{IV\,m} + Ax^{IV\,m-1} + Bx^{IV\,m-2} + \cdots = 0,$$

e in seguito proseguirei il calcolo come precedentemente, avvertendo che in questo caso il numero delle indeterminate a, b, c, d, ..., K sarà maggiore.

505. Poniamo l'esponente m multiplo del 3,

$$\lambda = \eta = 3, \quad \mu + 1 = \frac{m}{3}$$

(n° 331), e vogliasi sciogliere il problema del n° 500 in questa supposizione, essendo la

$$f(x', x'', x''') = K$$

funzione intera e razionale. È chiaro che essa dovrà avere la forma

$$a(x' + x'' + x''') = K,$$

oppure la

$$a(x'^2 + x''^2 + x'''^2) + b(x'x'' + x'x''' + x''x''') + c(x' + x'' + x''') = K,$$

oppure, etc., in cui i coefficienti a, b, c, ..., K siano tutti numeri interi. Dunque la soluzione del nostro problema in questo caso sarà simile affatto alla precedente, elimi-

Digitized by Google

nando le due x'', x''' dalle tre equazioni

$$f(x', x'', x''') - K = 0, \qquad x'''^m + Ax'''^{m-1} + Bx'''^{m-2} + \cdots = 0,$$
$$x''''^m + Ax''''^{m-1} + Bx''''^{m-2} + \cdots = 0.$$

Se la m non fosse molteplice del 3, la (D) avrebbe inoltre un fattore razionale del primo o del secondo grado, il quale verrebbe determinato mediante il (Capo XIV), e pel cui mezzo l'equazione data ridurrebbesi al grado $m-1$, oppure $m-2$. Se qui pure la funzione proposta fosse dotata di qualcuna delle variazioni accennate nei n^i 503, 504, non avremmo a fare che delle riflessioni e dei cangiamenti di calcolo simili ai precedenti.

506. Lo stesso si dice e si pratica nella soluzione del nostro problema, se l'equazione di relazione proposta sia della forma

$$f(x', x'', x''', x^{IV}) = K,$$

ovvero

$$f(x', x'', x''', x^{IV}, x^{V}) = K,$$

ovvero, etc.; e lo stesso ancora come nel n° 504, se nella data funzione entrano altre radici oltre le comprese fra le prime due parentesi.

507. Potrebbe succedere che la funzione data fosse compresa nel caso del n° 498. In allora noi, operando come precedentemente, dopo la determinazione delle a, b, c, d, ..., K, ricaveremmo una funzione esprimente solo un rapporto generale fra tutte le radici della data (n° 498), e quindi un rapporto inutile al suo abbassamento (n° 497). Converrà dunque cercar di conoscere simili funzioni, ed a tal fine basterà porre nella (D) in luogo dei coefficienti cogniti tanti coefficienti indeterminati, in seguito operare come nei n^i prec.; e ciò fatto, se pei valori delle a, b, c, d, ..., K ci risultano delle funzioni intere e razionali tra i coefficienti, che abbiam posti indeterminati, della (D), allora diremo che la funzione supposta è fra le comprese dal n° 498, e perciò deve trascurarsi: che se per le a, b, c, d, ..., K non si ottengono funzioni intere e razionali degli accennati coefficienti, allora la funzione proposta non viene ad includersi nell'esposto caso. In quest'ultima ipotesi poi ponendo nei risultati ottenuti in luogo de' coefficienti indeterminati i loro veri valori, vedesi che verremo a risolvere il problema del n° 500 senza rinnovare il calcolo dei n^i precedenti.

508. Ecco sciolto il problema del n° 500, avendo però sempre considerata l'equazione di relazione data intera, e razionale; che se questa non fosse tale, la libererei prima come è stato accennato nel n° 497 dai rotti e dagl'irrazionali, e poscia opererei sulla equazione ottenuta nella sovra esposta maniera.

509. Quanto abbiamo detto finora ci serve a dare delle soluzioni particolari del problema del n° 499; ma, per iscioglierlo pienamente, converrebbe poter determinare, se tra le radici della (D) ha luogo non una data, come nel n° 500, ma una qualunque delle equazioni esposte nei n^i prec., e in caso che sì, determinare in seguito la sua forma. Sarebbe pur anche assai vantaggioso il trovare le formole generali delle equazioni, tra le radici delle quali si verifica la prima delle equazioni (XII), quelle, tra le

Digitized by Google

cui radici ha luogo la seconda, le altre corrispondenti alla terza, etc., e così riguardo alle altre equazioni di rapporto dipendenti dalle equazioni generali dei n^i 504, 505, 506, 507, determinare le formole delle equazioni, le radici delle quali ammettono la relazione da esse rappresentata. Le equazioni convertibili (n° 336) ci esprimono un esempio particolare di queste formole. La loro determinazione poi vedesi che si otterrà, ponendo nel calcolo dei n^i 500, 504, 507 i coefficienti della (*D*) indeterminati, e cercando in seguito la loro determinazione dalle equazioni fra i coefficienti omologhi (n° 507). In questa guisa si determinò nel n° 340 la forma delle equazioni convertibili; ma per non allungarmi di più in questa teoria già di troppo prolissa, cesserò per ora da somiglianti ricerche.

Digitized by Google

TEORIA GENERALE DELLE EQUAZIONI.

INDICE

Pagine

Discorso preliminare 1-4

CAPO I.

Delle funzioni in generale (n^i 1-16) 5-10

CAPO II.

Proprietà generali delle equazioni (n^i 17-49). 11-35

CAPO III.

Altre proprietà generali delle equazioni (n^i 50-74) 36-47

CAPO IV.

Delle trasformazioni in particolare (n^i 75-87) 48-57

CAPO V.

Delle trasformazioni in generale (n^i 88-109). 58-70

CAPO VI.

Della eliminazione, e del modo di togliere i radicali da una data equazione (n^i 110-123) 71-78

CAPO VII.

Altro metodo di eliminazione, e della trasformazione relativa alle funzioni irrazionali (n^i 124-137). 79-88

CAPO VIII.

Della determinazione delle funzioni tra le radici di una data equazione algebraica, dipendentemente da altre funzioni proposte fra le radici medesime (n^i 138-168). 89-113

CAPO IX.

Alcune proprietà delle radici reali ed immaginarie nelle equazioni algebraiche (n^i 169-197). 114-127

Digitized by Google

CAPO X.

PROPRIETÀ DELLE RADICI DELLA UNITÀ (n^i 198-211) 128-132

CAPO XI.

SOLUZIONI DELLE EQUAZIONI ALGEBRAICHE DETERMINATE DI TERZO E QUARTO GRADO (n^i 212-225). 133-141

CAPO XII.

DELLA SOLUZIONE ALGEBRAICA RICAVATA *a priori* DELLE EQUAZIONI DETERMINATE DI TERZO E QUARTO GRADO (n^i 226-248) 142-158

CAPO XIII.

RIFLESSIONI INTORNO ALLA SOLUZIONE GENERALE DELLE EQUAZIONI (n^i 249-291). 159-186

CAPO XIV.

DEL MODO DI RITROVARE I FATTORI RAZIONALI DI UNA DATA EQUAZIONE ALGEBRAICA DETERMINATA (n^i 292-319). 187-202

CAPO XV.

RIFLESSIONI GENERALI INTORNO ALLE EQUAZIONI ALGEBRAICHE DETERMINATE RIDUCIBILI AD ALTRE DI GRADO INFERIORE (n^i 320-334) 203-210

CAPO XVI.

DI ALCUNE EQUAZIONI PARTICOLARI RIDUCIBILI AD ALTRE DI GRADO INFERIORE, E DEL CASO DELL'EQUAZIONE DI RELAZIONE (S) IRRAZIONALE (n^i 335-353) 211-223

CAPO XVII.

DELLA DETERMINAZIONE DELLE RADICI REALI PER APPROSSIMAZIONE NELLE EQUAZIONI NUMERICHE (n^i 354-392) 224-242

CAPO XVIII.

DELLA SOLUZIONE PER SERIE DELLE EQUAZIONI ALGEBRAICHE INDETERMINATE (n^i 393-446) . 243-274

CAPO XIX.

DELLA SOLUZIONE PER SERIE DELLE EQUAZIONI ALGEBRAICHE DETERMINATE (n^i 447-483) . . 275-305

CAPO XX.

DELLA SOLUZIONE PER SERIE DELLE EQUAZIONI ALGEBRAICHE COL MEZZO DELLE FRAZIONI CONTINUE, E RIFLESSIONI ULTERIORI INTORNO ALLE EQUAZIONI RIDUCIBILI A GRADO INFERIORE (n^i 484-509). 306-322

FINE DELLA TEORIA GENERALE DELLE EQUAZIONI.

Digitized by Google

APPENDICE ALLA TEORIA DELLE EQUAZIONI.

RISCHIARIMENTI
E
RISPOSTE ALLE OBBIEZIONI.

Inedita, da un fascicolo manoscritto di pugno del RUFFINI (non anteriore al 1802 [33]).

Digitized by Google

Digitized by Google

APPENDICE ALLA TEORIA DELLE EQUAZIONI.

RISCHIARIMENTI
E
RISPOSTE ALLE OBBIEZIONI.

L'obbiezione fatta dall'egregio prof. FONTANA *) alla mia proposizione, che è impossibile la soluzione generale delle equazioni di grado superiore al 4°, è appoggiata all'enunciato di una proposizione comunemente male espresso. Dicesi dalla comune dei Matematici: « Qualunque polinomio è risolubile in fattori reali di 1° e 2° grado »; ma così dicendosi, mentre intendiamo parlare di fattori algebraici, dicesi male: la proposizione deve esprimersi nella maniera seguente: « Qualunque polinomio può sempre concepirsi composto di tanti fattori reali di 1° e 2° grado ». Quanto sono ora per dire in prova di questa mia asserzione servirà anche a rispondere alla fattami obbiezione.

Sia il polinomio

$$x^m + Ax^{m-1} + \cdots = P,$$

e siano

$$x - a, \quad x - b, \ \ldots, \ x - n$$

tutti i suoi fattori reali; supposto

$$\frac{P}{(x-a)(x-b)\ldots(x-n)} = Q,$$

i fattori di 1° grado del polinomio Q saranno tutti immaginarî.

Espresso per

$$x^2 - \alpha x + \beta$$

uno dei suoi fattori di 2° grado, si dimostra che fra tutti i valori che possono avere i coefficienti α, β, ve ne sono sempre due entrambi reali e corrispondenti.

Supponiamo questi due valori già determinati, e supponiamo sostituirsi nel fattore $x^2 - \alpha x + \beta$; essi lo renderanno reale, e quindi Q avrà sempre un fattore reale di 2° grado.

Supposto

$$\frac{Q}{x^2 - \alpha x + \beta} = R,$$

nella maniera medesima si dimostra che R ha un fattore reale

$$x^2 - \alpha' x + \beta';$$

*) GREGORIO FONTANA (1735-1803) era allora a Pavia; di lui esistono tre lettere (nel *Carteggio* RUFFINI) al RUFFINI; ma non quella che contiene la obbiezione cui qui il RUFFINI vuole rispondere.
E. B.

Digitized by Google

così, fatto

$$\frac{R}{x^2 - \alpha' x + \beta'} = S,$$

trovasi che S ha un fattore reale

$$x^2 - \alpha'' x + \beta'',$$

e così in progresso.

Dunque risultando

$$P = (x-a)(x-b)\dots(x-n)(x^2 - \alpha x + \beta)(x^2 - \alpha' x + \beta')(x^2 - \alpha'' x + \beta'')\dots,$$

potrà sempre questo polinomio P concepirsi composto di tanti fattori reali di 1° e 2° grado; ma potrà egualmente dirsi che esso P sia risolubile negli accennati fattori? non già.

Affinchè possa ottenersi una simile risoluzione, conviene, data l'equazione $P = 0$, determinare da essa i coefficienti α, α', α'', ..., e quindi gli altri β, β', β'', ...

Ora, essendo $P = 0$ una equazione generale del grado m, ed essendo α eguale alla somma di due radici di questa equazione, è chiaro che, per la determinazione di essa α, necessariamente cadremo a dover risolvere una equazione del grado $\frac{m(m-1)}{2}$; ma nella ipotesi di $m > 4$, per quanto si è dimostrato nei Capi XII e XIII, simile equazione è irresolubile. Dunque non potendosi ottenere il valore di α, non potrà neppure ottenersi il fattore $x^2 - \alpha x + \beta$, e per conseguenza non potrà dirsi che il polinomio P sia risolubile in tanti fattori reali di 1° e di 2° grado.

Quantunque l'equazione in α non si possa sciogliere, pure si dimostra che essa avrà sempre una radice reale; dimostrasi inoltre che, corrispondentemente a questo valore reale di α, esiste sempre un valore di β reale. Dunque in corrispondenza a questi valori reali esisterà ancora un fattore $x^2 - \alpha x + \beta$ reale del polinomio P: e lo stesso dicendosi degli altri $x^2 - \alpha' x + \beta'$, $x^2 - \alpha'' x + \beta''$, ..., ne viene che esso P potrà sempre concepirsi come composto di tanti fattori di 1° e di 2° grado reali.

Nel dire che è male espresso dalla comune dei Matematici il precedente Teorema, ho inteso parlare sempre di risoluzione ed espressioni algebraiche; imperciocchè, sebbene il valore reale di α sia indeterminabile algebraicamente, pure lo è sempre per approssimazione e potrebbe forse esserlo per quantità trascendenti.

I Matematici hanno finora detto essere il polinomio P risolubile negli accennati fattori, perchè hanno forse supposto potersi risolvere una equazione qualunque, o perchè hanno considerati i coefficienti α, β, ..., espressi per approssimazione o trascendentalmente.

N° 229.

1) Supposto

$$z = \varphi(x')(x'')(x''')\dots,$$

Digitized by Google

rappresentino le

$$\zeta',\ \zeta'',\ \zeta''',\ \ldots,$$

tutti i valori che acquista la ζ per una data permutazione fra le x', x'', x''', ...

Ciò essendo, *se una funzione*

$$y' = f(x')(x'')(x''')\ \ldots$$

contiene entro di sè la funzione ζ', *e se essa* y' *si conserva sempre la medesima sotto la permutazione per cui dalla* ζ *si hanno i risultati* ζ', ζ'', ζ''', ...; *io dico che in questa ipotesi la* y' *dovrà essere una funzione non solo della* ζ', *ma ancora delle* ζ'', ζ''', ..., *e funzione della forma* $f(\zeta', \zeta'', \zeta''', \ldots)$.

Poichè per la supposizione y' contiene ζ', sarà $y' = f(\zeta')$; ma, facendo la permutazione supposta, ζ' diventa ζ'', dunque avremo $y'' = f(\zeta'')$.

Ora la y'' è per la ipotesi una quantità identica con la y', dunque la ζ'' dovrà esistere ancora nella y', e però avremo $y' = f(\zeta')(\zeta'')$. Ma praticando nella y' in ζ'' la solita permutazione, ζ'' si cambia in ζ''', e ci risulta $y'' = f(\zeta'')(\zeta''')$; dunque ζ''' che esiste in y'' dovendo essere ancora in y', ci darà $y' = f(\zeta')(\zeta'')(\zeta''')$. Lo stesso si dice in progresso. Dunque y' sarà funzione di tutte le ζ', ζ'', ζ''', ...

Con la permutazione supposta le ζ', ζ'', ζ''' ..., non fanno, per la ipotesi, che cambiarsi fra loro, e intanto la y' resta sempre la medesima, dunque sarà

$$y' = f(\zeta', \zeta'', \zeta''', \ldots).$$ C. D. D.

2) *Determinare una formula, la quale esprima tutte in generale le funzioni delle* x', x'', x''', ..., *che restano le medesime per una data permutazione qualunque.*

Esprimiamo con y la formula richiesta, e sia

$$\zeta = \varphi(x')(x'')(x''')\ \ldots$$

una funzione qualunque.

Ritenute le denominazioni del n° precedente, supponiamo che y contenga in sè la funzione ζ', ciò essendo conterrà ancora le ζ'', ζ''', ..., e deve risultare

$$y = f(\zeta', \zeta'', \zeta''', \ldots)$$

(n° precedente); ma ζ' esprime una funzione delle x', x'', x''', ... qualsivoglia, dunque

$$y = f(\zeta', \zeta'', \zeta''', \ldots)$$

non potrà che essere quella formula generale che è stata richiesta.

N° 238.

O

$$Z = f(x')(x'')(x''')$$

è razionale, o irrazionale; nel primo di questi casi, se si volesse $M = N$, dovrebbe risultare

$$Z = f(x')(x'', x'''),$$

poichè essa Z non avrebbe che tre valori, e quindi ne verrebbe l'assurdo del n° 237.

Digitized by Google

Che se Z fosse irrazionale, volendosi allora $M = N$, pel n° 137 sarà $p\pi = 3$.

Ma per la irrazionalità della Z deve essere $p > 1$, dunque dovrà essere $p = 3$, $\pi = 1$, e però

$$Z = f(x', x'', x''').$$

Ora pel n° 159 se da uno di questi valori irrazionali della Z ritrar volessimo una delle radici x', x'', x''' cader dovremmo in una equazione del 3° grado, anzi nella data istessa.

Dunque pel nostro intento la supposizione di Z irrazionale, mentre ci dia una sola equazione $Z^3 - M = 0$, è necessariamente inutile, e però volendosi essa $Z^3 - M = 0$ quale si suppose nel n° 230, opportuna all'intento, dovrà supporsi Z razionale, e quindi non potrà essere $M = N$.

Ho detto che non può essere $M = N$, ma ciò deve dirsi solo mentre le x', x'', x''' si considerano in generale: se a queste si attribuiscono valori particolari, può darsi benissimo che ci risulti $M = N$.

Siano per es. le x'', x''' tali che

$$x'' = x''':$$

in questa ipotesi avendosi

$$f(x')(x'')(x''') = f(x')(x''')(x''),$$

$$f(x'')(x''')(x') = f(x''')(x'')(x'),$$

$$f(x''')(x')(x'') = f(x'')(x')(x'''),$$

i tre valori della Z saranno uguali ai tre della V (n° 230), e per conseguenza avremo $M = N$.

N° 243.

Può sembrare a taluno che la conclusione di questo numero involva contraddizione; poichè, dopo che si è detto non poter essere $M = N$, concludesi che: *se le* y', y'' *sono eguali fra loro, tali sono ancora le* M, N.

Ma con qualche riflessione vedremo non esistere quivi contraddizione alcuna, ed essere verissimo quanto si asserisce: mentre abbiamo detto non poter essere $M = N$, abbiamo inteso di parlare nel caso delle x', x'', x''' considerate in generale, e questo pel n° 238 e sua nota; allorquando poi abbiamo asserito risultare $M = N$ nel mentre che $y' = y''$, abbiamo considerato un caso delle x', x'', x''' particolare.

Difatti pel n° 242 sappiamo che, nella ipotesi di $x'' = x'''$, deve risultare $y' = y''$; dunque è questa ipotesi particolare che ci dà $M = N$, siccome abbiamo anche veduto nella nota del n° 238 dover succedere; e per conseguenza non abbiamo contraddizione alcuna.

Digitized by Google

N° 253.

Per provare che, *nella ipotesi di* $p < m$, *niuno dei valori di* λ *è* $< m$, osservo che abbiamo

$$\lambda = \frac{m(m-1)(m-2)\ldots[m-(p-1)]}{p(p-1)(p-2)\ldots 2}$$

ed

$$m = \frac{mp(p-1)(p-2)\ldots 2}{p(p-1)(p-2)\ldots 2},$$

e frattanto, non potendo essere $p > m-1$, non può essere neppure $p-1 > m-2$, $p-2 > m-3$, ... risultando tanti di numero i fattori $m-1$, $m-2$, ..., $m-(p-1)$ quanti sono gli altri p, $p-1$, $p-2$, ..., 2.

Dunque non potendosi avere

$$\frac{m(m-1)(m-2)\ldots[m-(p-1)]}{p(p-1)(p-2)\ldots 2} < \frac{mp(p-1)(p-2)\ldots 2}{p(p-1)(p-2)\ldots 2},$$

non potrà essere neppure $\lambda < m$.

N° 266.

Nel presente Teorema deve farsi una correzione: *esso non è vero generalmente che quando le permutazioni componenti sono due.* Imperciocchè, se le componenti sono due, allora, essendo q numero primo, anche b, c sono numeri primi fra sè; ma se le permutazioni componenti sono più di due, per es. tre, allora b, c, d sono tre numeri primi bensì tra loro considerati insieme; ma possono non essere primi a due a due, può b non essere primo con c, e c non primo con d, come se sia $b = mg$, $c = mnh$, $d = ni$; in tal caso potrà risultare $p = mnghi$ e quindi non si verificherà più l'esposto teorema. Se sia per es. $q = 43$, $b = 15$, $c = 6$, $d = 22$, avendosi $m = 3$ divisore comune dei numeri 15, 6, ed $n = 2$ divisore dei due 6, 22, potrà essere $p = 3.2.5.11$, $p = 330$, e però, etc.

Il teorema adunque dovrà enunciarsi così:

Chiamato q il numero totale delle radici che impiegansi in una data permutazione formata di due sole componenti, se questo numero q sia primo, etc.

Questa correzione nulla turba il teorema della impossibilità della risoluzione, etc.

N° 271.

1°, 2°) Gli altri casi, ove la seconda permutazione riguarda due sole radici, che resterebbero a considerarsi, quei sono, in cui si permutano fra loro le x', x^{IV}, oppure le x', x^{V}, o le x'', x''', o le x'', x^{IV}, o le x''', x^{IV}, o le x''', x^{V}, o le x^{IV}, x^{V}; ma su del 3°, 5°, 7°, di questi casi si replica evidentemente lo stesso raziocinio del 1°) (n° 271).

Digitized by Google

Riguardo poi al caso primo, poichè il risultato 1° resta il medesimo alla permutazione delle radici che occupano il 1° ed il 4° luogo, per la permutazione medesima dovrà restare lo stesso anche il risultato 49°, e questo però non cambierà al cambiarsi fra loro delle x', x'''; ma questo 49° per la prima permutazione componente (n° 271) è identico col risultato 1°; dunque neppure questo risultato 1° cambierà al permutarsi fra loro delle x', x'''; ciò dunque essendo, la permutazione delle x', x^{IV} conduce a quella fra loro delle x', x''', e però questo caso riducesi al 2°) (n° 271).

Se il risultato 1° rimane lo stesso al cambiarsi fra loro delle x', x^{V}, ossia della radice prima nella quinta, dovrà pel cambiamento istesso della radice prima nella quinta rimanere lo stesso ancora il risultato 25° e però pel cambiamento di x' in x''; ma per la permutazione prima (n° 271) il risultato 25° è eguale al 1°, dunque anche questo 1° non cambierà alla permutazione di x' in x'', e quindi in questo caso ci riduciamo al 1°) (n° 271).

Se vogliasi il risultato 1° non cambiarsi alla mutazione di x'' in x^{IV}, si vede che non cambierà neppure il 97° alla mutazione di x' in x'''; ma questo $97° = 1°$; dunque nemmeno il 1° si muterà al cambiarsi fra loro delle x', x''' e però ci ridurremo al 2°) (n° 271).

Lo stesso discorso si fa se il risultato 1° resta il medesimo al cambiamento di x''' in x^{V}, imperciocchè per questo il 73° resta il medesimo al cambiamento di x' in x''', e però, a cagione del $73° = 1°$, veniamo a cadere nel 2°) (n° 271).

N° 271.

3°) Per le permutazioni delle radici che occupano i luoghi:

I) primo, secondo e quarto;

II) primo, terzo e quarto;

III) secondo, terzo e quarto;

abbiamo i risultati:

$$(a)\qquad \begin{cases} 1°\ f(x')(x'')(x''')(x^{IV})(x^{V}), & 17°\ f(x'')(x^{IV})(x''')(x')(x^{V}), \\ 12°\ f(x^{IV})(x'')(x')(x''')(x^{V}), & 10°\ f(x')(x''')(x^{IV})(x'')(x^{V}). \end{cases}$$

Pratico ora sopra ciascuno di questi la permutazione supposta nel 3°) (n° 271), quella cioè fra le radici dei luoghi primo, secondo e terzo, e replicata questa permutazione quanto si può, vedesi che otterremo i risultati

$$(b)\qquad \begin{cases} 1°\ f(x')(x'')(x''')(x^{IV})(x^{V}), & 17°\ f(x'')(x^{IV})(x''')(x')(x^{V}), \\ 3°\ f(x'')(x''')(x')(x^{IV})(x^{V}), & 24°\ f(x^{IV})(x''')(x'')(x')(x^{V}), \\ 4°\ f(x''')(x')(x'')(x^{IV})(x^{V}), & 19°\ f(x''')(x'')(x^{IV})(x')(x^{V}), \\ 12°\ f(x^{IV})(x'')(x')(x''')(x^{V}), & 10°\ f(x')(x''')(x^{IV})(x'')(x^{V}), \\ 22°\ f(x'')(x')(x^{IV})(x''')(x^{V}), & 8°\ f(x''')(x^{IV})(x')(x'')(x^{V}), \\ 14°\ f(x')(x^{IV})(x'')(x''')(x^{V}), & 21°\ f(x^{IV})(x')(x''')(x'')(x^{V}). \end{cases}$$

Digitized by Google

Nei risultati (*a*) esistendo nel quarto luogo nel risultato 1° la radice x^{IV}
» » 17° » » x'
» » 12° » » x'''
» » 10° » » x'',

è chiaro che i risultati (*b*) nati dagli (*a*) per la permutazione fra le prime tre radici saranno tutti di forma tra loro diversa; ma essendo i risultati (*a*) in numero di quattro, e a ciascuno di questi per la permutazione supposta [3°) (n° 271)] corrispondendone tre, ne viene che i risultati (*b*) dovranno essere in numero di 12.

Per le precedenti permutazioni I, II, III, ottengonsi ancora dal risultato 1° i risultati 21°, 19°, 14°; ma se nella linea (*a*) invece dei risultati 17°, 12°, 10°, scritti avessimo questi 21°, 19°, 14°, e avessimo poscia su di essi praticate le permutazioni precedenti, vedremo facilmente che non si avrebbe ricavato risultato alcuno diverso dagli esposti in (*b*); e per conseguenza gli accennati (*b*) sono i soli che si ottengono per la esposta permutazione, e tutti, come si dimostra nel 3°) (n° 271), sono uguali fra loro.

N° 271.

4°) Poichè alla permutazione fra le x^{IV}, x', x'' non cangiansi i risultati 1°, 19°, 12°, il risultato 1° rimarrà il medesimo alla permutazione delle radici che occupano i luoghi primo, secondo e quarto; il risultato 19° rimarrà lo stesso permutandosi le radici dei luoghi secondo, terzo e quarto, ed il risultato 12° non si cangerà al permutarsi delle radici dei luoghi primo, secondo e terzo. Ma pel n° 97 queste proprietà spettanti ai risultati 19°, 12°, devono competere anche al risultato 1°. Dunque questo risultato 1° non solo resterà il medesimo alla permutazione fra le radici esistenti nei posti primo, terzo e quarto (come per la ipotesi) e all'altra permutazione fra le radici dei posti primo, secondo e quarto; ma non cambierà neppure di valore alla mutazione fra le radici dei luoghi secondo, terzo e quarto e per la mutazione delle radici dei luoghi primo, secondo e terzo.

Ciò dunque essendo, potremo proseguire lo stesso raziocinio del 3°) (n° 271) e nota, e ne dedurremo la stessa conseguenza.

Non considero particolarmente gli altri casi, nei quali la permutazione seconda contiene tre radici; perchè su tutti si pratica sempre evidentemente lo stesso precedente raziocinio.

N° 271.

6°) Se sia il risultato $1° = 22°$, per questa permutazione ne verrà il $25° = 69°$; ma per la prima permutazione componente il $69° = 21°$, dunque sarà ancora il $1° = 21°$,

Digitized by Google

epperò esso 1° restando il medesimo al cambiamento fra le tre radici x', x'', x^{IV}, questo caso si ridurrà all'altro del 3°) (n° 271).

Nella ipotesi del risultato $1° = 24°$; avremo per questa permutazione il risultato $25° = 120°$; il risultato $49° = 96°$; il $73° = 72°$, ed il $97° = 48°$.

Inoltre, poichè per la prima permutazione componente abbiamo il $1° = 25°$, ed il $24° = 120°$, sarà ancora il $1° = 120°$. Ma per questa nuova permutazione ne viene il risultato $25° = 96°$, il $49° = 72°$, il $73° = 48°$ ed il $97° = 24°$.

Dunque, tanto per la equazione del risultato $1° = 24°$, quanto per l'altra del $1° = 120°$, combinate con la terza del $1° = 25°$, sempre divengono eguali fra loro solamente i risultati della prima e dell'ultima fila.

Lo stesso in egual modo si ritrova dal considerare la permutazione che nasce dal dover essere ancora il risultato $1° = 96°$, esso $1° = 72°$, e finalmente esso $1° = 48°$.

Dunque dovrà essere $p = 10$.

N° 271.

8°) Nella supposizione del risultato $1° = 11°$, risultandoci il $1° = 22°$, pel precedente 6°) sarà il risultato $1° = 3°$, e per conseguenza la nostra funzione restando la medesima per la permutazione fra tre radici, pel caso 3°), dovrà non cambiar di valore per la mutazione fra le tre radici che occupano gli ultimi luoghi; e avremo perciò il risultato $59° = 2°$; ma per la prima permutazione componente abbiamo questo $59° = 11°$ e per la permutazione seconda il risultato $11° = 1°$. Dunque dovrà essere il risultato $1° = 2°$ e per conseguenza $p = 120$ [caso 1°)].

Praticando su tutti i risultati della fila 1ª la permutazione indicata dalla equazione: risultato $1° = 13°$, ottiensi il risultato $25° = 61° = 120° = 92°$, il $49° = 109° = 96° = 44°$, il $73° = 37° = 72° = 116°$, ed il $97° = 85° = 48° = 68°$.

Dunque, a cagione dell'equazione: risultato $1° = 13°$, unita all'altra: risultato $1° = 25°$, diventano uguali fra loro tutti i risultati che occupano le righe 1ª, 13ª, 20ª, 24ª; ma l'equazione: risultato $1° = 24°$ dandoci il risultato $25° = 120°$, il risultato $49° = 96°$, il $73° = 72°$, il $97° = 48°$, e dandoci il risultato $13° = 20°$, il $37° = 116°$, il $61° = 92°$, il $85° = 68°$ ed il $109° = 44°$, non fa che rendere eguali fra loro a due a due i risultati medesimi delle quattro righe 1ª, 13ª, 20ª, 24ª. Dunque, essendo tali risultati tutti in numero di 20, ne viene che la supposizione del risultato $1° = 13°$ unita all'altra del $1° = 25°$ non potrà darci che $p = 20$.

N° 273.

2°) Poichè il risultato $3° = 25°$ ed il $1° = 3°$, ne verrà il $1° = 25°$.

3°) Essendo il risultato $113° = 52°$, ed il $1° = 113°$, sarà il $1° = 52°$. Ora il $52°$

Digitized by Google

resta il medesimo per la permutazione fra le x''', x^{IV}, x^{V}, poichè esso $52° = 80°$. Dunque per la permutazione fra le radici istesse dovendo rimanere il medesimo anche il risultato $1°$, ne verrà questo $1° = 28°$ e però il $3° = 25°$; ma il $3° = 1°$. Dunque ancora il $1° = 25°$.

4°) Per l'equazione $26° = 29°$, il risultato $1°$, che per la ipotesi è eguale al $26°$, deve non cambiarsi alla permutazione fra le x', x'', x'''; dunque sarà il $1° = 3°$.

Nella maniera medesima, per l'equazione $40° = 57°$, il risultato $1°$, che è eguale al $40°$, deve conservarsi lo stesso pel cangiamento fra le x''', x^{IV}, x^{V}. Dunque sarà il $1° = 28°$; ma per quest'ultima uguaglianza abbiamo il $3° = 25°$: dunque a cagione del $1° = 3°$, risulterà esso $1° = 25°$.

5°) Dal $62° = 104°$ ne viene il $34° = 43°$. Dunque il $1°$, eguale per la ipotesi al $34°$, resterà il medesimo alla permutazione fra le x', x'', x''', e quindi avremo $1° = 3°$.

Pel $52° = 62°$ si ha il $43° = 82°$. Dunque il $1° = 34° = 43°$ rimanendo lo stesso alla permutazione fra le x''', x^{IV}, x^{V}, ci darà esso $1° = 28°$, e però, ricavandosi il $3° = 25°$, ne verrà $1° = 25°$.

6° *A*) Allorchè si suppone il $1° = 6° = 23° = 66° = 15° = 83°$, pel $6° = 66°$, si ottiene $83° = 92°$, e però il $1° = 83°$ dovrà non cambiarsi al cambiamento fra le x', x'', x''', onde avremo $1° = 3°$; per la stessa equazione $6° = 66°$ ottiensi eziandio $15° = 71°$. Dunque dovendo per quest'ultima equazione il $1°$, eguale per la ipotesi al $15°$, risultare eguale al $28°$, ci darà il $3° = 25°$, e però esso $1° = 25°$.

Se si supponga succedere la nostra uguaglianza per la permutazione fra la 1^a e la 4ª radice, si ha il $1° = 15° = 83° = 6° = 23° = 66°$. Dunque questo caso riducesi al precedente 6° *A*).

Se vogliasi l'eguaglianza pel cambiamento fra le radici 1^a e 5^a, ne viene il

$$1° = 103° = 2° = 5° = 16° = 33°,$$

onde questo caso si rapporta al $1°$).

È facile a vedersi che tutti gli altri casi, in cui si cambiano due radici, si riducono al $1°$) e al precedente 6° *A*).

6° *B*) Mentre si suppone il risultato $1° = 17° = 60° = 19° = 46° = 69°$, dall'uguaglianza $17° = 19°$ si ricava il $1° = 3°$; ma dall'uguaglianza $19° = 69°$ ritraesi il $3° = 25°$. Dunque sarà il $1° = 25°$.

Tutti gli altri casi, in cui tre sono le radici che si cambiano, riduconsi al precedente *B*) ed al 2°).

6° C_1) Nella ipotesi del risultato $1° = 8° = 51° = 58° = 76° = 86°$. Per l'uguaglianza $8° = 51°$, il risultato $86°$ resta il medesimo alla permutazione fra le x', x'', x'''; dunque succedendo lo stesso anche al $1°$, che è $= 86°$, ne verrà esso $1° = 3°$. Per l'equazione $8° = 86°$, il risultato $51°$ rimane il medesimo alla permutazione fra le x''', x^{IV}, x^{V}; dunque ancora il $3°$, che è $= 1°$, epperò $= 51°$, farà lo stesso, e però avremo il $3° = 25°$ e quindi il $1° = 25°$.

Digitized by Google

C_2) Supponendo il $1^\circ = 24^\circ = 96^\circ = 48^\circ = 120^\circ = 72^\circ$, per l'uguaglianza $24^\circ = 48^\circ$ ne viene immediatamente il $1^\circ = 25^\circ$.

Gli altri casi, ne' quali la permutazione contiene quattro radici ed è semplice del 2° genere, riduconsi tutti ai precedenti 3°), 6°), C_1), C_2).

6° D_1) Sia il risultato $1^\circ = 11^\circ = 54^\circ = 71^\circ = 114^\circ = 63^\circ$. A cagione del $54^\circ = 114^\circ$, avremo il risultato $11^\circ = 20^\circ$; ma il $1^\circ = 11^\circ$; dunque il 1° restando lo stesso al permutarsi delle x', x'', x''', sarà eguale al 3°. Dall'equazione $11^\circ = 114^\circ$, verrà il $71^\circ = 15^\circ$; ma $1^\circ = 71^\circ$; dunque il 1° non cangiandosi al permutarsi delle x''', x^{IV}, x^V, sarà $= 28^\circ$. Quindi dal $1^\circ = 28^\circ$ avendosi il $3^\circ = 25^\circ$, sarà ancora il $1^\circ = 25^\circ$.

D_2) Abbiasi il $1^\circ = 13^\circ = 37^\circ = 61^\circ = 85^\circ = 109^\circ$.

Pel $13^\circ = 37^\circ$ ne nasce immediatamente il $1^\circ = 25^\circ$.

Se il $1^\circ = 18^\circ = \cdots$; replicando la permutazione $1^\circ = 18^\circ$ quanto si può, ne viene il $1^\circ = 18^\circ = 22^\circ = 11^\circ$. Dunque risultandoci il $1^\circ = 11^\circ$, questo caso si riduce al D_1).

Così se il $1^\circ = 20^\circ = \cdots$; dal replicare la permutazione $1^\circ = 20^\circ$, avendosi il $1^\circ = 20^\circ = 24^\circ = 13^\circ$, questo caso si ridurrà al D_2).

6°) Facciamo una permutazione qualunque fra due, o tre, o quattro delle radici del risultato 1°, e fra queste radici entri la x^V. Sia per es. tale permutazione fra quattro radici, e vogliasi il risultato $1^\circ = 57^\circ$.

Eseguendo questa permutazione in quello dei risultati della prima fila, nel quale la x^V resta immobile, nel nostro esempio in quello in cui la x^V occupa il quarto luogo, cioè nel 73°, resteranno smosse dal loro luogo solamente le radici x', x'', x''', x^{IV}. Ma per le condizioni del Teorema il risultato 1° deve restare il medesimo anche per la permutazione fra le radici che vengono mosse nel risultato 73°, dunque rimanendo il medesimo per la permutazione fra le x', x'', x''', x^{IV}, ne viene che la supposizione fatta che nella nostra permutazione entri la x^V, equivale ad una delle altre in cui questa x^V non entra; ma in queste ultime abbiamo sempre ritrovato risultarci il $1^\circ = 25^\circ$; dunque ci risulterà sempre lo stesso ancora quando nella permutazione ha luogo la x^V.

6°) Tutti i risultati che nascono dal 1° per tutte le permutazioni semplici del 1° genere fra tutte cinque le radici, vedesi dalla tavola essere in numero di 24. Ora se nei risultati 27°, 34°, 52°, 62°, 104°, [5°), n° 273] replichiamo quanto si può la rispettiva permutazione, ne vengono $4.5 = 20$ risultati, ciascuno dei quali proviene dal 1° per una permutazione semplice del 1° genere fra tutte cinque le radici; e della stessa natura sono ancora i quattro risultati della prima riga 25°, 49°, 73°, 97°.

Dunque, unendo questi a quelli, ne verranno appunto tutti i 24 risultati sovraccennati della Tavola; e per conseguenza qualunque altra supposizione possa farsi per cui nella permutazione semplice del 1° genere entrino tutte cinque le radici, questa si ridurrà sempre al caso 5°) onde troveremo risultarne sempre il $1^\circ = 25^\circ$.

Digitized by Google

N° 274.

Dimostro primieramente che, nella fatta ipotesi, *non può il numero p acquistare alcun valore multiplo del 5 e non minore di 30.*

Imperciocchè, se si volesse per es. $p=30$: dovendo allora i risultati della Tav. VI essere fra loro eguali a 30 a 30, potremo considerare questi come divisi in tre classi, in ciascuna delle quali contengansi i 30 uguali fra loro.

La prima di queste tre classi contenga il risultato 1°; in essa non potrà aver luogo alcun altro dei risultati esistenti nella prima linea della nostra tavola; poichè, se si contenesse per es. il risultato $1° = 25°$, la funzione y resterebbe la medesima ancora per una permutazione semplice fra tutte cinque le radici x', ..., x^v, contro la supposizione.

Esista questo risultato 25° nella classe 2ª; ciò essendo, tal classe non potrà contenere alcuno dei risultati 49°, 73°, 97°; poichè se contenesse per es. il risultato 97°, ne verrebbe il risultato $25° = 97°$, e però il $1° = 73°$, nuovamente contro della supposizione.

Esista questo risultato 97° nella classe 3ª; dovranno in questa classe contenersi ancora gli altri due 49°, 73°; ma ciò è impossibile, poichè ne verrebbe il risultato $97° = 49°$ e però il $1° = 73°$, contro quello che abbiamo dimostrato poc'anzi.

Dunque sarà ancora impossibile che nella nostra supposizione risulti $p = 30$.

Lo stesso discorso ha luogo mentre si voglia $p > 30$.

Ma se si vuole

$$p < 30,$$

allora rifletto che, dovendo essere p multiplo del 5, *dovrà la y restare la medesima per una permutazione fra le* x', x'', x''', x^{iv}, x^v *composta;* poichè se rimanesse la stessa per una permutazione semplice, non potendo questa, per la supposizione e pel n° 267, contenere tutte cinque le radici x', x'', ..., x^v, ne conterrebbe tutt'al più quattro, e quindi p non potendo pel n° 262 risultare maggiore di 4, molto meno potrebbe divenire multiplo del 5.

Aggiungo inoltre che, nella ipotesi di $p < 30$, l'accennata permutazione *non potrebbe che essere composta del primo genere in cui due sieno le permutazioni componenti, e ciascuna di queste contenga due sole radici.*

Imperciocchè se si volesse altrimenti, se la nostra permutazione si volesse per es. formata di due componenti, l'una fra due radici e l'altra fra tre; in questo caso p dovendo per la prima permutazione componente risultare multiplo del due, e per la permutazione seconda risultare multiplo del 3, diverrebbe multiplo del $2.3 = 6$; ma per la supposizione prima deve esso p risultare multiplo del 5, dunque diverrebbe multiplo del numero $6.5 = 30$, e non potrebbe essere $p < 30$, contro della ipotesi.

In egual modo se la nostra permutazione si volesse bensì formata di due componenti, cadauna delle quali contenesse due sole radici, ma si volesse poi composta del 2° genere (n° 259) come se fosse $y = f[(x', x'')][(x''', x^{iv})](x^v)$, o del genere 3°,

Digitized by Google

come se fosse $y = f(x', x'')(x''', x^{IV})(x^{V}) = f(x', x''')(x'', x^{IV})(x^{V})$, troveremo sempre, come precedentemente, non potere risultare $p < 30$ contro la supposizione.

Ma se la nostra permutazione è composta del 1° genere, e le due componenti non contengono che due sole radici per cadauna, pel n° 265 il numero p non può che divenire

$$p = 2.2 = 4.$$

Dunque neppure nel caso di $p < 30$ potendo esso p acquistare valore multiplo del 5 ne viene che, etc.

N° 277.

Per dimostrare che i cinque valori della Z nella

$$Z^5 - M = 0,$$

possono venire espressi dalle funzioni

$$1^a, \quad 25^a, \quad 49^a, \quad 73^a, \quad 97^a$$

(Tav. VI), faccio il seguente discorso:

Poichè abbiamo

$$Z'' = \alpha Z', \quad Z''' = \alpha Z'', \quad Z^{IV} = \alpha Z''', \quad Z^{V} = \alpha Z^{IV}, \quad Z' = \alpha Z^{V};$$

ne viene che nel modo medesimo che da Z' ricavasi Z'', così da Z'' si ottiene Z''', da Z''' si ricava Z^{IV}, da Z^{IV} si ha Z^{V}, e da Z^{V} si ritorna a Z'.

Dunque quella permutazione fra le

$$x', \quad x'', \quad x''', \quad x^{IV}, \quad x^{V}$$

che praticata sulla

$$Z' = f(x')(x'')(x''')(x^{IV})(x^{V})$$

mi dà Z'', ripetuta sulla Z'' mi somministrerà Z''', etc. e sulla Z^{V} mi tornerà a Z'.

Ora è chiaro che una simile permutazione non può essere che una semplice del 1° genere fra tutte cinque le $x', x'', \ldots, x^{V}$; e una permutazione semplice del 1° genere fra tutte cinque le $x', x'', x''', x^{IV}, x^{V}$, pel n° 269 sappiamo che può sempre ridursi alla indicata dall'equazione (VII).

Dunque, espresso col risultato 1° della Tavola VI il valore Z', gli altri 25°, 49°, 73°, 97° mi potranno rappresentare i valori Z'', Z''', Z^{IV}, Z^{V}.

Lo stesso raziocinio servirà egualmente a dimostrare che le radici

$$Z', \quad Z'', \quad \ldots, \quad Z^{VI}$$

della equazione $Z^6 - M = 0$ supposta nel n° 286 potranno rappresentarsi con i risultati

$$f(x')(x'') \ldots (x^{V})(x^{VI}), \quad f(x'')(x''') \ldots (x^{VI})(x'), \quad f(x''')(x^{IV}) \ldots (x')(x''), \ldots.$$

Lo stesso dicasi ancora di tutti gli altri casi simili a questi.

Avvertasi che pel n° 241 la Z quivi supposta deve essere una funzione delle

Digitized by Google

x', x'', x''', x^{IV}, x^{V} *razionale,* e che deve la

$$Z^5 - M = 0$$

essere un'equazione di quinto grado essenzialmente tale ricavatasi col mezzo di una trasformazione della (Q); onde, essendo

$$Z = f(x')(x'')(x''')(x^{IV})(x^{V}),$$

i diversi valori della Z devono dipendere dalle diverse permutazioni della funzione.

Se si supponesse per es.

$$M = A = -(x' + \cdots + x^{V})$$

per cui ci venisse

$$Z^5 - A = 0,$$

allora avendosi

$$Z = \sqrt[5]{(x' + \cdots + x^{V})}$$

la Z sarebbe irrazionale; e se si facesse

$$M = A^5,$$

e però

$$Z^5 - A^5 = 0,$$

i valori della Z sarebbero bensì funzioni delle x', ..., x^{V} razionali; ma per qualunque permutazione fra le stesse x', ..., x^{V}, non cambiando mai la A^5 di valore, la $Z^5 - A^5 = 0$ non sarebbe già un'equazione ricavata dalla (Q) di 5° grado ma lo sarebbe del 1° cosicchè, supposto $Z^5 = V$, equivarrebbe alla $V - A^5 = 0$.

N° **280.**

2°) I valori della

$$N = \varphi(x')(x'')(x''')(x^{IV})(x^{V})$$

dipendono da valori della M, dunque ai dodici valori

$$M_1, \quad M_3, \quad M_4, \ldots, M_{22}$$

corrisponderanno i 60 risultati che provengono dalle permutazioni in N, e che esistono nelle file 1ª, 3ª, 4ª, ..., 22ª.

Ora questi M_1, M_3, M_4, ..., M_{22}, i valori sono della M dipendenti da y'; dunque i 60 risultati della N dipendenti da y', quelli saranno delle file 1ª, 3ª, 4ª, ..., 22ª.

Nella maniera medesima si trova che i risultati dipendenti dalla y'' quelli sono delle file 2ª, 5ª, 6ª, ..., 16ª.

Tutti i risultati della N per la permutazione semplice fra tutte e cinque le radici riduconsi al numero di $\frac{120}{5} = 24$; ma per tale permutazione sola i risultati della prima colonna verticale debbono essere tutti diseguali fra loro; dunque essendo questi in numero di 24, a questi solamente si ridurranno tutti i valori della N.

Digitized by Google

Se i dodici valori della N,

$$1^0,\ 3^0,\ 4^0,\ \ldots,\ 22^0,$$

devono essere fra loro uguali a quattro a quattro, converrà che il risultato 1^0 si eguagli a qualcuno dei risultati

$$3^0,\ 4^0,\ 17^0,\ 21^0,\ 19^0,\ 12^0,\ 10^0,\ 14^0,$$

od a qualcuno degli altri

$$8^0,\ 24^0,\ 22^0.$$

Ora se esso 1^0 è uguale ad alcuno dei primi di questi risultati, pei 3^0, 4^0 (n° 271) sappiamo che combinandosi la permutazione per cui succede una tale eguaglianza con l'altra supposta a principio (semplice fra tutte e cinque le radici), sappiamo, dissi, che i 60 valori della N devono diventare tutti eguali fra loro.

Dunque, se i superiori 12 valori della N devono diventare eguali fra loro solamente a 4 a 4, non potrà aver luogo l'uguaglianza del risultato 1^0 con alcuno dei 3^0, 4^0, $\ldots$, 14^0.

Che, se si faccia il 1^0 eguale ad uno dei tre 8^0, 24^0, 22^0, allora, combinandosi sempre questa permutazione con l'altra fra tutt'e cinque le radici, vi saranno due casi in cui i 60 valori della N diventeranno parimenti tutti uguali fra loro [5°), 6°), n° 271] ed uno ve ne sarà [pel cit. 6°), n° 271] in cui quei 60 valori diventando fra loro eguali a 10 a 10, i dodici valori 1^0, 3^0, $\ldots$, 22^0 non potranno uguagliarsi fra loro che a due a due.

Dunque, neppure quando si faccia il risultato 1^0 eguale ad uno dei tre 8^0, 24^0, 22^0, potrà ottenersi che gli accennati 12 valori della N sieno tra loro eguali soltanto a quattro a quattro.

N° 286.

Per la nota del n° 277, supposto

$$Z' = 1^0, \quad f(x')(x'')(x''')(x^{IV})(x^V)(x^{VI}),$$

sarà

$$Z'' = 121^0, \quad f(x'')(x''')(x^{IV})(x^V)(x^{VI})(x'),$$

$$Z''' = 241^0, \quad f(x''')(x^{IV})(x^V)(x^{VI})(x')(x''),$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$Z^{VI} = 601^0, \quad f(x^{VI})(x')(x'')(x''')(x^{IV})(x^V).$$

Se M non ha che un solo valore, e però la Z non ne ha che sei differenti fra loro, i primi 120 di questa Z, cioè i segnati nella Tavola VI, dovranno essere tutti eguali fra loro: dunque [pel 1°), n° 271] dovrà essere il risultato $1^0 = 2^0 = 25^0$.

Che se la M ha due soli valori, e quindi la Z ne ha dodici fra loro diversi, i primi 120 valori della Z si ridurranno a due soli, e perciò dovrà essere [pel 2°), n° 271] il risultato $1^0 = 3^0 = 25^0$.

Digitized by Google

1° Sia ora la nostra Z, quale si suppose la

$$Z = f(x')(x'')(x''')(x^{iv})(x^{v})$$

nel 1°), n° 273: in tale ipotesi replicando quivi quel discorso medesimo del citato 1°), n° 273 ne verrà il risultato

$$2^\circ = 3^\circ = 7^\circ = 25^\circ = 121^\circ;$$

ma il $1^\circ = 2^\circ$, dunque sarà ancora il $1^\circ = 121^\circ$.

2° Si verifichi nella nostra Z l'ipotesi fatta sulla

$$Z = f(x')(x'')(x''')(x^{iv})(x^{v})$$

nel 2°), n° 273.

Poichè quindi ne viene il risultato

$$1^\circ = 3^\circ = 4^\circ,$$

replico, giusta il citato 2°), n° 273, su del risultato 4° la permutazione seconda, e mi verrà il risultato

$$4^\circ = 19^\circ = 8^\circ;$$

ripeto su dell'8° la permutazione terza e avrò il risultato

$$8^\circ = 34^\circ = 49^\circ;$$

e finalmente con la permutazione quarta applicata sul risultato 49°, otterrò esso

$$49^\circ = f(x''')(x^{iv})(x^{v})(x'')(x^{vi})(x') = 241^\circ.$$

Dunque, risultandoci il risultato

$$1^\circ = 241^\circ,$$

sarà ancora esso

$$1^\circ = 121^\circ.$$

Ciò posto, se la M non avesse che un solo valore, o due soli valori diseguali, replicato lo stesso stessissimo discorso del n° 277 troveremmo nel primo caso pel 1°) (n° presente) nel caso secondo pel 2°) (n° presente)

$$Z' = Z'' = Z''' = \cdots$$

N° 287.

Per vedere non esservi ragione per cui da $y' = f(x')(x'')(x''')(x^{iv})(x^{v})(x^{vi})$ dipendano tre piuttosto o tre altre delle x', x'', x''', x^{iv}, x^{v}, x^{vi}, faccio il seguente discorso. Poichè abbiamo

$$x' = x' + o(x'' + x''' + x^{iv} + x^{v} + x^{vi}),$$

chiamo questa espressione t', e faccio su di essa le permutazioni istesse, per cui dal risultato 1° ottengonsi i risultati 3°, 4°, 12°, 97°, 601°; quindi otterremo:

$$t' = x' + o(x'' + x''' + x^{iv} + x^{v} + x^{vi}), \qquad t'' = x'' + o(x''' + x' + x^{iv} + x^{v} + x^{vi}),$$
$$t''' = x''' + o(x' + x'' + x^{iv} + x^{v} + x^{vi}), \qquad t^{iv} = x^{iv} + o(x'' + x' + x''' + x^{v} + x^{vi}),$$
$$t^{v} = x^{v} + o(x' + x'' + x''' + x^{iv} + x^{vi}), \qquad t^{vi} = x^{vi} + o(x' + x'' + x''' + x^{iv} + x^{v}).$$

Digitized by Google

Ora se da $y' =$ risultato 1°, cerco il valore di t'; giacchè abbiamo $y' =$ risultato $1° = 3° = 4° = 12° = 97° = 601°$ [3°), n° 271, n° 284], dovrò pel n° 147 cadere nella determinazione simultanea di tutte le quantità t', t'', t''', t^{IV}, t^{V}, t^{VI}; ma queste in fine non sono che le x', x'', ..., x^{VI}. Dunque queste radici dipendendo tutte egualmente dalle y', ne viene che, etc.

Se si volesse che la y, giusta il n° 285, avesse i suoi valori eguali a sei a sei non per la ipotesi del risultato $1° = 121°$, ma per un'altra permutazione, dovendo questa, pel citato n° 285, essere sempre semplice del 1° genere, ne viene che per essa, quantunque non si ricavi il risultato $1° = 601°$, pure dovrà ritraersi un risultato il quale avrà le x^{VI} nel primo luogo e che sarà $= 1°$.

Colloco ora questo risultato in luogo del 601° nel precedente discorso, e vedesi facilmente che ne procede la medesima conseguenza.

N° 287.

Supponiamo che la M dipenda da una equazione

$$M^n + NM^{n-1} + PM^{n-2} + \cdots + V = 0:$$

acciocchè si conosca il valore di M, converrà, o che sia $n < 5$, o che questa equazione sia riducibile ad un'altra di un grado < 5, o finalmente che, essendo $n = 5$ ed essendo uguali allo zero tutti i coefficienti intermedi, la supposta equazione si riduca alla $M^5 + V = 0$. Ma, rinnovati i discorsi medesimi dei n^i 280, 281, 282, si vede non essere possibile nè il primo, nè il secondo di questi casi, e, rapporto al terzo, la M deve acquistare 120 valori diversi fra loro; imperciocchè ad ogni sei valori della Z dovendone corrispondere uno della M, questa M, per la nota del n° 277, sarà una funzione delle x', x'', x''', x^{IV}, x^{V}, x^{VI}, che resterà la medesima per una permutazione semplice del 1° genere fra tutte e sei le accennate radici. Quindi i 720 valori della M si ridurranno subito ai primi 120 della Tavola VI.

Equivalendo così la $M^5 + V = 0$ perfettamente alla $Z^5 - M = 0$ del n° 277, potrò fare su quella equazione gli stessi discorsi che abbiamo fatti nel citato n° 277 su questa, e però, etc.

Dunque, risultando 120 di numero e tutti fra loro differenti i valori della M, potrò su questa M replicare gli stessi raziocinî che abbiamo fatti nei n^i 278, 279, 280 intorno alla Z del n° 277, e sempre ne risulterà essere il suo valore indeterminabile.

FINE DEI RISCHIARIMENTI E RISPOSTE ALLE OBBIEZIONI.

Digitized by Google

DELLA SOLUZIONE DELLE EQUAZIONI ALGEBRAICHE DETERMINATE PARTICOLARI DI GRADO SUPERIORE AL QUARTO

[Dalle Memorie di Matematica e di Fisica della Società Italiana delle Scienze — Tomo IX (Modena 1802), pp. 444-526 (Ricevuta il 21 Ottobre 1801)].

Digitized by Google

Digitized by Google

DELLA SOLUZIONE DELLE EQUAZIONI ALGEBRAICHE DETERMINATE PARTICOLARI DI GRADO SUPERIORE AL QUARTO.

Dopo avere dimostrata impossibile la soluzione delle equazioni algebraiche determinate generali di grado superiore al quarto (RUFFINI: Teoria delle equazioni, Cap. XIII) non resta che di fissar l'attenzione sulle equazioni particolari. Nella nostra Teoria, seguendo le tracce dell'immortale LAGRANGE, abbiamo nel Cap. XV veduto che un'equazione data di grado maggiore del quarto non può abbassarsi opportunamente alla sua soluzione se non in conseguenza di un qualche particolare rapporto fra le sue radici: in seguito, dopo aver fatte su questo punto delle considerazioni generali, abbiamo determinati alcuni casi particolari, nei quali può attualmente ottenersi una simile riduzione (Cap. XX); ma tutto questo non giunge, anzi è ben lontano dal determinare in tutta la sua estensione quanto concerne la soluzione e l'abbassamento delle equazioni algebraiche determinate.

Proposta un'equazione particolare, e di grado maggiore del quarto, converrebbe saper conoscere:

1° I casi in cui questa non è capace di abbassamento opportuno alla sua soluzione.

2° I casi nei quali può essa opportunamente abbassarsi.

3° Finalmente i metodi pratici per cui possiamo ottenere attualmente un simile abbassamento, e per cui possiamo, in seguito, dalle radici della equazione ridotta dedurre le radici della proposta.

Se giungere si potesse ad ottenere lo scioglimento di questo problema in tutte le accennate tre parti; allora è chiaro che sarebbesi pienamente soddisfatto a quanto riguarda la soluzione algebraica delle equazioni, e potrebbesi dire perfezionato questo ramo troppo importante delle Matematiche. Nella presente Memoria, stabiliti a principio i fondamenti necessarî a sciogliere l'accennato problema, vedremo in seguito fin dove ci sia permesso di spingere rapporto ad esso le nostre ricerche, e di arrivare con le nostre determinazioni.

PARTE PRIMA.

1. Rappresenti la

$$(A) \qquad x^m + Ax^{m-1} + Bx^{m-2} + \cdots + Px^{m-b} + \cdots + V = 0$$

una qualunque equazione algebraica, determinata, particolare, e i suoi coefficienti A,

Digitized by Google

B, C, ... siano tante quantità commensurabili. Ora, o il primo suo membro ha dei fattori razionali, o no; se li ha, a tale equazione attribuisco il nome di *equazione composta*, altrimenti le dò quello di *semplice*. La $x^3 - 38x - 12 = 0$ ci dà l'esempio di un'equazione composta, poichè il suo primo membro è risolubile nei due fattori $x + 6$, $x^2 - 6x - 2$; l'altra $x^3 - 15x + 4 = 0$ ci dà l'esempio di un'equazione semplice, non contenendo il suo primo membro fattore alcuno commensurabile.

2. Poichè coi noti principî dell'algebra una qualunque equazione composta può sempre dividersi in tante semplici, quanti sono i fattori razionali del primo suo membro; noi fisseremo l'attenzione solamente sulle equazioni semplici, e supponendo che la (A) sia tale, stabilito $m > 4$, supporremo che questa equazione sia capace di un abbassamento opportuno alla sua soluzione. Il rapporto particolare, che per la seconda di queste ipotesi esister deve fra alcune o tutte le radici della (A) (Capitoli XIII, XV, Teoria delle equazioni) venga, come nel n° 321 della Teoria delle equazioni, espresso per

$$(B) \qquad f(x')(x'')(x''') \ldots (x^{(\lambda-1)})(x^{(\lambda)}) = K.$$

Giacchè poi, cercando immediatamente o mediatamente da questa quantità K il valore di x', sappiamo dal citato Cap. XV che si deve necessariamente cadere in un'equazione di cui sono radici alcune o tutte le x', x'', x''', ..., $x^{(\lambda)}$, sia

$$(C) \qquad x^{\mu} + tx^{\mu-1} + \tau x^{\mu-2} + \cdots + u = 0,$$

una tale equazione. Dovendo finalmente i coefficienti t, τ, ..., u dipendere da equazioni, delle quali conoscasi immediatamente o mediatamente la soluzione, e nelle quali i coefficienti siano funzioni della K, supponiamo che il coefficiente u sia radice della

$$(D) \qquad u^n + au^{n-1} + bu^{n-2} + \cdots = 0,$$

e che questa equazione sia appunto dotata delle qualità ora accennate.

3. Il valore K dovrà essere quantità sempre determinabile dipendentemente da equazione che noi sappiamo risolvere. Imperciocchè essendo questa K, per ciò che si è detto nel citato Cap. XV, quella quantità appunto, per mezzo della quale restano immediatamente o mediatamente determinate alcune o tutte le radici della (A); se essa fosse indeterminabile, sarebbero indeterminabili ancora queste radici, il che è contro la supposizione.

4. [34] *Se esiste un'equazione di relazione* (B) *opportuna alla soluzione della* (A), *nella quale la* K *sia quantità irrazionale, sempre esisterà ancora un'altra equazione di relazione,*

$$(I) \qquad F(x')(x'')(x''') \ldots (x^{(\lambda)}) = H,$$

in cui la quantità H *sarà commensurabile, e pel cui mezzo la* (A) *potrà abbassarsi di grado opportunamente alla sua soluzione.*

Suppongo

$$f(x')(x'')(x''') \ldots (x^{(\lambda)}) = y,$$

sostituisco nella (B), e tolti dalla equazione $y = K$ gli irrazionali, sia

$$(II) \qquad y^n + Ey^{n-1} + Gy^{n-2} + \cdots = H$$

l'equazione che da questa operazione risulta. Si collochi ora nella (II) in luogo della y

Digitized by Google

il suo valore, e chiamisi (I) il risultato che ne nasce. Ciò fatto, essendo pel n° 3 attualmente determinabile il valore K, sarà attualmente solubile l'equazione (II), ed $y' = K$ ne sarà la radice; ora essendo la (I) identica con la (II), e la (B) identica con la $y' = K$, è chiaro che si dovrà potere ottenere il valore della (B) dalla (I); ma la (B) per la ipotesi è opportuna alla soluzione della (A); dunque la (I), essendo tale, che può sempre da essa ottenersi attualmente questa (B), dovrà dirsi ella pure opportuna alla soluzione medesima; ma nell'accennata (I) il secondo membro H è razionale. Dunque, etc.

In conseguenza di quanto abbiamo ora dimostrato, riterremo in avvenire, quando non si avverta il contrario, che nella equazione di rapporto (B) atta alla soluzione della (A) (n° 2), la quantità cognita K sia sempre razionale.

5. [35] Dovendo, come vedremo in seguito, il primo membro della (B) conservarsi $= K$ sotto certe permutazioni fra le radici, e dovendosi prendere queste in considerazione, noi per maggiore chiarezza cominceremo dal distinguere le permutazioni, le quali nella (B) si effettuano fra le sole λ radici x', x'', x''', ..., $x^{(\lambda)}$ che vi si contengono, dalle permutazioni, le quali nella (B) medesima effettuansi introducendovi delle radici nuove, e denomineremo quelle *permutazioni primitive,* queste *permutazioni secondarie.*

Perciò le permutazioni della

$$f(x')(x'')(x''') \dots (x^{(\lambda)})$$

nelle

$$f(x'')(x')(x''') \dots (x^{(\lambda)}),$$
$$f(x''')(x'')(x^{(\lambda)}) \dots (x')$$

saranno del genere delle primitive, e le permutazioni della stessa

$$f(x')(x'')(x''') \dots (x^{(\lambda)})$$

nelle

$$f(x'')(x''')(x^{IV}) \dots (x^{(\lambda+1)}),$$
$$f(x^{(\lambda+1)})(x^{(\lambda+2)})(x^{(\lambda+3)}) \dots (x^{(2\lambda)})$$

saranno delle secondarie.

Diremo poi *risultati primitivi* quelli che si ottengono dalle permutazioni primitive, *secondari* quei che nascono dalle permutazioni secondarie.

6. *Con un numero qualunque π delle m radici x', x'', x''', ..., $x^{(m)}$ vogliasi formare una nuova funzione*

$$F(x')(x'') \dots (x^{(\pi-1)})(x^{(\pi)}),$$

la quale conservi uno stesso valore determinabile dalla K, che chiamerò H, e lo conservi costantemente, e solamente sotto quelle permutazioni, per cui nella (B) la

$$f(x')(x'')(x''') \dots (x^{(\lambda)})$$

si conserva $= K$.

Potendo essere $\pi = \lambda$, $\pi < \lambda$, $\pi > \lambda$,

1° Abbiasi $\pi = \lambda$; in simile caso, supposto che tutti i risultati, i quali, provenendo dal primo membro della (B) per le nostre permutazioni sì primitive che secondarie, conservano il valore K, siano di numero n, prendansi le radici x', x'', ..., $x^{(\pi)}$, e con esse si formi una funzione ad arbitrio, tale però che cambi di valore ad una qualun-

Digitized by Google

que permutazione fra loro; e chiamata questa

(III) $$\varphi(x')(x'') \dots (x^{(n-1)})(x^{(n)}) = y,$$

se ne cerchi dalla (B) il valore.

Eseguite nella (III) tutte le permutazioni che corrispondono ai precedenti n risultati, chiaminsi y', y'', y''', ... le funzioni che ne provengono, e saranno queste pure di numero n. Formiamo ora un'equazione:

(II) $$y^n + Ey^{n-1} + Gy^{n-2} + \dots = H,$$

di cui siano radici le funzioni y', y'', ..., $y^{(n)}$; i coefficienti di questa, sappiamo dal Cap. XV della Teoria delle equazioni essere funzioni razionali della K, e però da essa determinabili razionalmente. Supposta pertanto determinata una tale equazione, colloco in essa in luogo della y il suo valore (III), chiamo

(E) $$F(x')(x'') \dots (x^{(n-1)})(x^{(n)}) = H$$

il risultato che ne viene; e questo io dico che sarà una funzione tale appunto, che si conserverà $= H$ per tutte, e sole le permutazioni, sì primitive che secondarie, per cui la (B) conserva il valore K.

Facciamo di fatti nel primo membro della (E) una permutazione qualunque, quella per esempio di

$$F(x')(x'') \dots (x^{(n-1)})(x^{(n)})$$

in

$$F(x^{(n-1)})(x') \dots (x^{(n)})(x'');$$

facciasi la permutazione medesima nella (III), e si sostituisca la funzione

$$\varphi(x^{(n-1)})(x') \dots (x^{(n)})(x''),$$

che si ottiene, nella (II) invece della y. Come dalla sostituzione nella (II) della (III) è nata la

$$F(x')(x'') \dots (x^{(n-1)})(x^{(n)}),$$

è chiaro che dalla sostituzione della

$$\varphi(x^{(n-1)})(x') \dots (x^{(n)})(x'')$$

dovrà nascere la

$$F(x^{(n-1)})(x') \dots (x^{(n)})(x'')$$:

dunque si otterrà lo stesso risultato, o eseguendo una data permutazione nel primo membro della (E), od eseguendo la permutazione medesima nella (III), e sostituendo la funzione che ne viene nella (II). Ora o la nuova funzione

$$\varphi(x^{(n-1)})(x') \dots (x^{(n)})(x''),$$

corrisponde ai risultati nati dalla (B) per le supposte permutazioni primitive e secondarie, e però non è che il valore di una delle y', y'', ..., $y^{(n)}$, o non vi corrisponde; se sì, allora essendo essa una radice della (II), farà verificare questa equazione, e però avremo

$$F(x^{(n-1)})(x') \dots (x^{(n)})(x'') = H,$$

Digitized by Google

se no, non essendone radice, non potrà darci

$$F(x^{(\pi-1)})(x') \dots (x^{(\pi)})(x'') = H;$$

ma questa funzione non è che il risultato il quale ricavasi dalla

$$F(x')(x'') \dots (x^{(\pi-1)})(x^{(\pi)})$$

per la permutazione ultimamente supposta. Dunque essendo essa $= H$ ogniqualvolta corrisponda ai risultati che nascono dalla (B) per le supposte permutazioni primitive e secondarie, e non avendo tal valore mentre non vi corrisponda, ne segue che in questo primo caso avremo ottenuto quanto è stato richiesto nell'enunciato del problema.

2° Che, se si abbia $\pi < \lambda$ oppure $\pi > \lambda$: nel primo di questi due casi riduco la (III) alla forma

$$\varphi(x')(x'') \dots (x^{(\pi-1)})(x^{(\pi)}) + o(x^{(\pi+1)} + \dots + x^{(\lambda)}) = H,$$

nel secondo riduco la (B) alla forma

$$f(x')(x'')(x''') \dots (x^{(\lambda)}) + o(x^{(\lambda+1)} + \dots + x^{(\pi)}) = K,$$

opero come precedentemente, ed otterrò nella maniera medesima la (E) la quale, come nel caso 1°, vedremo essere dotata delle proprietà cercate nel nostro problema.

Se K è razionale, è chiaro che ancora H è razionale.

7. Supponiamo $\pi < \lambda$. In tale ipotesi potremo esprimere la (B) per

$$f(x')(x'')(x''') \dots (x^{(\pi)})(x^{(\pi+1)}) \dots (x^{(\lambda)}) = K,$$

e la (E) per

$$F(x')(x'') \dots (x^{(\pi-1)})(x^{(\pi)}) + o(x^{(\pi+1)} + \dots + x^{(\lambda)}) = H.$$

Ora, o le permutazioni primitive per cui la (B) conserva il valore K, sono tali che nessuna delle radici, le quali occupano i primi π luoghi, può in alcuno dei risultati secondarii passare per loro mezzo ad occupar veruno dei $\lambda - \pi$ luoghi ulteriori, e viceversa, cosicchè per es. i luoghi occupati nel primo risultato dalle $x', x'', x''', \dots, x^{(\pi)}$ non possono per le supposte permutazioni primitive venire occupati dalle $x^{(\pi+1)} \dots x^{(\lambda)}$, e viceversa; oppure sono tali, che possono le $\lambda - \pi$ radici ulteriori passare nei luoghi delle prime π, come se si abbia per es.

$$f(x')(x'') \dots (x^{(\pi-1)})(x^{(\pi)})(x^{(\pi+1)}) \dots (x^{(\lambda)}) = f(x')(x'') \dots (x^{(\pi+1)})(x^{(\lambda)})(x^{(\pi-1)}) \dots (x^{(\pi)}) = K.$$

In amendue questi casi si verificherà sempre che, per le permutazioni medesime fra le radici per cui la (B) mantiene il valore K, ancora la (E) manterrà il valore H (Problema prec.); ma nel caso secondo succederà che, mentre alcuni risultati rapporto alla (B) procedevano da permutazioni primitive, i corrispondenti riguardo alla (E) dipenderanno da permutazioni secondarie, come apparisce nel supposto esempio, poichè

$$F(x')(x'') \dots (x^{(\pi-1)})(x^{(\pi)}) + o(x^{(\pi+1)} + \dots + x^{(\lambda)}),$$

$$F(x')(x'') \dots (x^{(\pi+1)})(x^{(\lambda)}) + o(x^{(\pi-1)} + \dots + x^{(\pi)}),$$

ossia

$$F(x')(x'') \dots (x^{(\pi-1)})(x^{(\pi)}), \qquad F(x')(x'') \dots (x^{(\pi+1)})(x^{(\lambda)})$$

sono i risultati della (E) corrispondenti ai due supposti della (B), e frattanto il secondo

Digitized by Google

dei risultati della (B) procede dal primo per una permutazione primitiva, e il secondo dei risultati della (E), contenendo le radici $x^{(\pi+1)}$, $x^{(\lambda)}$ non esistenti nel primo, nasce da questo per una permutazione secondaria.

Nel primo poi dei casi ora supposti, per poco che si considerino le precedenti forme della (B) e della (E), è facile a vedersi che le permutazioni le quali sono primitive rapporto alla (E) sono primitive ancora riguardo alla (B), e quelle che sono secondarie relativamente alla prima di queste equazioni, sono secondarie eziandio rapporto alla seconda. Anzi, a cagione della porzione

$$o(x^{(\pi+1)} + \cdots + x^{(\lambda)}),$$

che sempre svanisce, i risultati, in quest'ultimo caso, che si hanno dalla (E) per le supposte permutazioni primitive, potranno essere in minor numero dei risultati provenienti per la stessa ragione dalla (B), ma non mai in numero maggiore; e lo stesso si dice dei risultati che si ottengono per le permutazioni secondarie.

Che, se si abbia $\pi = \lambda$, allora vedremo agevolmente che quelle le quali sono permutazioni primitive o secondarie nella (B), sono corrispondentemente primitive o secondarie nella (E); e il numero dei risultati, che nascono per le permutazioni primitive, sarà lo stesso riguardo ad amendue le (B), (E); e lo stesso sarà il numero dei risultati provenienti per le permutazioni secondarie.

Se finalmente $\pi > \lambda$, si applicherà alle nostre equazioni di relazione ciò stesso che abbiamo asserito nel caso di $\pi < \lambda$, rovesciando però il discorso, e applicando alla (B) quello che si è detto della (E), ed alla (E) ciò che abbiamo detto della (B).

8. *Finora abbiamo supposto che la* (III) *sia una funzione tale che cambi di valore a qualunque permutazione fra le* x', x'', $\ldots$, $x^{(\pi)}$. *Suppongasi presentemente che essa si prenda in modo che conservi lo stesso valore sotto alcune permutazioni.* In questa ipotesi la (E) conserverà il valore H non solamente per tutte le permutazioni per cui la (B) mantiene il valore K, ma potrà conservarlo ancora per quelle permutazioni per cui non cambia di valore la (III); e per conseguenza in questo caso il numero dei risultati provenienti dalla (E) che sono $= H$, potrà essere maggiore del numero dei risultati che nascono dalla (B) e sono $= K$.

9. Supponiamo per es., che avendosi nella (A) $m = 8$, l'equazione di relazione (B) divenga:

$$x'x'' + x'''x^{iv} = K$$

e che per le permutazioni secondarie abbiansi i soli due risultati

$$x'x'' + x'''x^{iv} = K, \qquad x^{v}x^{vi} + x^{vii}x^{viii} = K.$$

1° Volendosi in questa ipotesi la soluzione del precedente problema, cominciamo dal supporre $\pi = 2$, e potendo dare alla funzione (III) una forma qualunque, purchè sia tale che cambi di valore ad una permutazione qualsivoglia (n° 6), supponiamo $y = x' - x''$. Eseguendo in questa le dovute permutazioni, poichè abbiamo

$$y = x' - x'' + o(x''' + x^{iv}),$$

Digitized by Google

pel 2°, n° 6 otterremo pei valori della y i risultati

$$y' = x' - x'' + o(x''' + x^{iv}) = x' - x'', \qquad y'' = x'' - x' + o(x''' + x^{iv}) = x'' - x',$$

$$y''' = x''' - x^{iv} + o(x' + x'') = x''' - x^{iv}, \qquad y^{iv} = x^{iv} - x''' + o(x' + x'') = x^{iv} - x''',$$

$$y^{v} = x^{v} - x^{vi} + o(x^{vii} + x^{viii}) = x^{v} - x^{vi}, \qquad y^{vi} = x^{vi} - x^{v} + o(x^{vii} + x^{viii}) = x^{vi} - x^{v},$$

$$y^{vii} = x^{vii} - x^{viii} + o(x^{v} + x^{vi}) = x^{vii} - x^{viii}, \qquad y^{viii} = x^{viii} - x^{vii} + o(x^{v} + x^{vi}) = x^{viii} - x^{vii}.$$

Formo ora l'equazione

$$y^8 + Ey^7 + Gy^6 + \cdots = H,$$

determino, mediante il Cap. XV della Teoria delle equazioni, dalla $x'x'' + x'''x^{iv} = K$ il valore dei coefficienti E, G, ..., e nella equazione in y così determinata colloco la quantità $x' - x''$, mi risulterà in tal modo l'equazione di rapporto

$$(x' - x'')^8 + E(x' - x'')^7 + G(x' - x'')^6 \cdots = H.$$

Ora in questa, per la natura della funzione supposta $x' - x''$, i coefficienti delle potenze dispari 7, 5, ... divengono evidentemente zero: dunque tale equazione diverrà

$$(x' - x'')^8 + G(x' - x'')^6 + \cdots = H,$$

ossia, corrispondentemente alla (E),

$$F(x' - x'')^2 = H,$$

e questa, rinnovati i discorsi del n° precedente, vedremo restare la medesima, e cambiarsi a quelle permutazioni istesse, per cui rimane la medesima, e si cambia la

$$x'x'' + x'''x^{iv} = K.$$

2° Vogliasi $\pi = 3$, e nella (III) vogliasi $y = \frac{x' - x''}{x'''}$. Essendo

$$y = \frac{x' - x''}{x'''} + o x^{iv},$$

col fare le necessarie permutazioni, corrispondentemente al primo risultato

$$x'x'' + x'''x^{iv} = K$$

otterremo

$$y' = \frac{x' - x''}{x'''} + o x^{iv} = \frac{x' - x''}{x'''}, \qquad y'' = \frac{x'' - x'}{x'''} + o x^{iv} = \frac{x'' - x'}{x'''},$$

$$y''' = \frac{x' - x''}{x^{iv}} + o x''' = \frac{x' - x''}{x^{iv}}, \qquad y^{iv} = \frac{x'' - x'}{x^{iv}} + o x''' = \frac{x'' - x'}{x^{iv}},$$

$$y^{v} = \frac{x''' - x^{iv}}{x'} + o x'' = \frac{x''' - x^{iv}}{x'}, \qquad y^{vi} = \frac{x^{iv} - x'''}{x'} + o x'' = \frac{x^{iv} - x'''}{x'}$$

$$y^{vii} = \frac{x''' - x^{iv}}{x''} + o x' = \frac{x''' - x^{iv}}{x''}, \qquad y^{viii} = \frac{x^{iv} - x'''}{x''} + o x' = \frac{x^{iv} - x'''}{x''}.$$

In egual modo si otterranno corrispondentemente al risultato secondo

$$x^{v}x^{vi} + x^{vii}x^{viii} = K$$

Digitized by Google

altri otto valori della y, e con questi uniti a quelli faccio un'equazione:

$$y^{16} + Ey^{15} + Gy^{14} + \cdots = H$$

i coefficienti della quale determinerò come precedentemente dalla $x'x'' + x'''x^{IV} = K$. Ciò fatto pongo in luogo della y il valore $\frac{x' - x''}{x'''}$, e ricaveremo così un'equazione

$$F\left(\frac{x' - x''}{x'''}\right) = H$$

corrispondente alla (E) e dotata delle condizioni richieste dal problema del n° 6.

3° Sia

$$\pi = 4, \quad \text{ed} \quad y = ax' + bx'' + cx''' + dx^{IV}.$$

Coll'eseguire le solite permutazioni, riguardo al primo risultato

$$x'x'' + x'''x^{IV} = K,$$

ci verrà

$$y' = ax' + bx'' + cx''' + dx^{IV}, \qquad y'' = ax'' + bx' + cx''' + dx^{IV},$$
$$y''' = ax' + bx'' + cx^{IV} + dx''', \qquad y^{IV} = ax'' + bx' + cx^{IV} + dx''',$$
$$y^{V} = ax''' + bx^{IV} + cx' + dx'', \qquad y^{VI} = ax^{IV} + bx''' + cx' + dx'',$$
$$y^{VII} = ax''' + bx^{IV} + cx'' + dx', \qquad y^{VIII} = ax^{IV} + bx''' + cx'' + dx'.$$

Altrettanti valori della y otterremo riguardo al risultato secondo

$$x^{V}x^{VI} + x^{VII}x^{VIII} = K:$$

dunque, proseguito su questi il calcolo come precedentemente, ci risulterà in fine un'equazione di relazione

$$F(ax' + bx'' + cx''' + dx^{IV}) = H,$$

che soddisfa alle condizioni del problema.

4° Supponiamo $\pi = 5$, ed

$$y = \frac{ax' + bx'' + cx''' + dx^{IV}}{x^{V}}.$$

Ridotta in questo caso la

$$x'x'' + x'''x^{IV} = K$$

alla

$$x'x'' + x'''x^{IV} + 0x^{V} = K,$$

eseguisco nella y le permutazioni tutte, per cui la quantità

$$x'x'' + x'''x^{IV} + 0x^{V}$$

mantiene il proprio valore. Ciò facendo rapporto alle prime quattro radici x', x'', x''', x^{IV}, otterremo evidentemente gli otto valori della y espressi nel caso 3° divisi tutti per x^{V}; ora la x^{V} nella

$$x'x'' + x'''x^{IV} = K$$

può permutarsi in tutte le radici x^{VI}, x^{VII}, x^{VIII}, senza che si cambi il valore K; dunque effettuando questa permutazione della x^{V} nelle x^{VI}, x^{VII}, x^{VIII} in ciascuno degli accennati otto valori della y, si otterranno $4.8 = 32$ risultati, e questi saranno i valori tutti della

Digitized by Google

y, che corrispondono al primo risultato

$$x'x'' + x'''x^{IV} = K:$$

corrispondentemente al secondo

$$x^{V}x^{VI} + x^{VII}x^{VIII} = x^{V}x^{VI} + x^{VII}x^{VIII} + 0x' = K$$

si otterranno altri 32 valori della y e da tutti questi 64 insieme uniti, dopo il solito calcolo ricaveremo per l'equazione di rapporto domandata la

$$F\left(\frac{ax' + bx'' + cx''' + dx^{IV}}{x^{V}}\right) = H.$$

5° Se si vuole $\pi=8$, ed $y = ax' + bx'' + \cdots + px^{VIII}$, ridotta la $x'x'' + x'''x^{IV} = K$ alla

$$x'x'' + x'''x^{IV} + 0(x^{V}x^{VI} + x^{VII}x^{VIII}) = K,$$

eseguisco sulla y le permutazioni tutte per cui la $x'x'' + x'''x^{IV} + 0(x^{V}x^{VI} + x^{VII}x^{VIII})$ mantiene il valore K, proseguo il solito calcolo, e la funzione infine ottenuta

$$F(ax' + bx'' + \cdots + px^{VIII}) = H$$

ci scioglierà il nostro problema.

6° Finalmente, se in uno qualunque dei casi ora considerati la funzione y si suppone, giusta il n° 8, tale che non cambi di valore per qualche sua permutazione particolare; se per es. nel caso 2° supponesi $y = \frac{x'x'''}{x''}$ = funzione la quale non cambiasi alla mutazione di x' in x'''; allora la equazione di relazione infine ricavata, nel nostro esempio la $F\left(\frac{x'x'''}{x''}\right) = H$, manterrà il proprio valore non solo sotto le permutazioni sotto cui non cambia il proprio la $x'x'' + x'''x^{IV}$, ma lo manterrà eziandio sotto delle altre.

Considerando questi casi, vedesi che a norma delle riflessioni fatte nel n° 7 nel caso 3° i risultati secondarii provenienti dalla $F(ax' + bx'' + cx''' + dx^{IV}) = H$ tanti sono, quanti sono i secondarii che nascono dalla $x'x'' + x'''x^{IV} = K$, che simili risultati nei casi 1°, 2, 4°, 6°, sono in numero maggiore; essendo quattro nel caso 1°, ed otto nei casi 2°, 4° e 6°; e che finalmente non ve n'ha che uno solo nel caso 5°.

Nel caso 4° la $F\left(\frac{ax' + bx'' + cx''' + dx^{IV}}{x^{V}}\right)$ conserva il valore H per quelle permutazioni medesime, per cui la $x'x'' + x'''x^{IV} = x'x'' + x'''x^{IV} + 0x^{V}$ mantiensi $= K$; ora in quest'ultima funzione le permutazioni delle x', x'', x''', x^{IV} fra loro sono disgiunte dalle permutazioni della x^{V} nelle x^{VI}, x^{VII}, x^{VIII}, ed inoltre questa x^{V} è moltiplicata per lo zero: dunque in essa i risultati che nascono dal cambiamento dell'accennata x^{V} nelle x^{VI}, x^{VII}, x^{VIII} possono considerarsi come non esistenti: lo stesso non può già dirsi dei risultati, che per le permutazioni medesime nascono dalla

$$F\left(\frac{ax' + bx'' + cx''' + dx^{IV}}{x^{V}}\right);$$

Digitized by Google

le permutazioni fra le x', x'', x''', x^{IV} sono bensì qui pure separate dalle permutazioni della x^V nelle x^{VI}, x^{VII}, x^{VIII}, ma non essendo la x^V moltiplicata per lo zero, i risultati corrispondenti a queste ultime permutazioni non si potranno considerare come non esistenti, e per conseguenza potremo dire giusta il n° 7, che il numero dei risultati provenienti dalla

$$F\left(\frac{a x' + \cdots + d x^{IV}}{x^V}\right) = H$$

per le permutazioni sì primitive che secondarie è sempre maggiore del numero di quelli che nascono dalla

$$x' x'' + x''' x^{IV} = K.$$

10. Sonovi dei casi nei quali, *quantunque si verifichi l'equazione* (B), *pure non può essa, come tale, servire all'opportuno abbassamento della* (A); e questi casi devono succedere ogniqualvolta, cercando dalla (B) il valore della x, trovasi la (C) oppure la (D) di grado necessariamente non $< m$, ovvero trovasi dipendente da altre equazioni, il grado delle quali è necessariamente non $< m$. Tali casi pertanto si avranno:

1° Allorquando la (B) pel valore particolare delle radici o per la forma della funzione diviene, giusta il n° 3 della Teoria delle equazioni,

$$f(x', x'', x''', \ldots, x^{(m)}) = K.$$

2° *) Mentre, posto $\lambda = 2$, ovvero $= 3$, ovvero $=$, etc., la (B) è tale, che risulta corrispondentemente

$$f(x')(x'') = f(x'')(x''') = f(x''')(x^{IV}) = \cdots = f(x^{(m-1)})(x^{(m)}) = f(x^{(m)})(x') = K,$$

oppure

$$f(x')(x'')(x''') = f(x'')(x''')(x^{IV}) = f(x''')(x^{IV})(x^V) = \cdots$$
$$\cdots = f(x^{(m-2)})(x^{(m-1)})(x^{(m)}) = f(x^{(m-1)})(x^{(m)})(x') = f(x^{(m)})(x')(x'') = K,$$

oppure

$$f(x')(x'')(x''')(x^{IV}) = f(x'')(x''')(x^{IV})(x^V) = f(x''')(x^{IV})(x^V)(x^{VI}) = \cdots$$
$$\cdots = f(x^{(m-3)})(x^{(m-2)})(x^{(m-1)})(x^{(m)}) = f(x^{(m-2)})(x^{(m-1)})(x^{(m)})(x')$$
$$= f(x^{(m-1)})(x^{(m)})(x')(x'') = f(x^{(m)})(x')(x'')(x''') = K, \ldots.$$

---

*) « Nel n° 10 di detta Memoria, può succedere che l'equazione di relazione sia quale si suppone « nel 2° caso (n° 10) e che l'equazione data sia ciò non ostante capace di soluzione: questo succederà « per es. se, posto

$$f(x')(x'')(x''') \ldots (x^{(m)}) = y,$$

« abbiasi $y^m = k$; perchè, ottenuti con l'estrazione della radice k^{esima} i valori y', y'', $\ldots$, $y^{(m)}$, dipen- « dentemente da cadauno di questi, potremo avere i corrispondenti valori x', x'', $\ldots$, $x^{(m)}$. In conse- « guenza di questo bisogna correggere il n° 12; e bisogna determinare:

« 1° quali sono i casi tutti simili al precedente di $y^m = k$,

« 2° quale sarà la funzione (B) in tali casi,

« 3° quando tali casi hanno luogo in una data equazione particolare,

« 4° come potremo ottenere la soluzione della (A) in somiglianti casi ».

[Nota di P. RUFFINI (con la data *1803-10 Agosto*, ed il titolo: *Riflessioni da farsi nella Memoria sulla risoluzione delle equazioni particolari*), trovata in un suo quaderno di studi ed appunti. — E. B.].

Digitized by Google

3° In generale, mentre, avendo λ un valore qualunque, dal primo membro della (B) si ottiene con le permutazioni secondarie, quando $\lambda < m$, e con le primitive, quando $\lambda = m$, un numero per lo meno m di risultati, i quali tutti siano $= K$, e ne' quali entrino o contemporaneamente, o successivamente in egual modo tutte le m radici x', x'', x''', ..., $x^{(m)}$.

Difatti nel 1° di questi casi, per l'uguaglianza di rapporto che hanno fra loro tutte le x', x'', x''', ..., $x^{(m)}$, non essendovi ragione per cui una di loro possa venir determinata piuttosto che l'altra, ne viene che, come si è veduto nella Teoria delle equazioni, o la (C) diverrà identica con la (A), e ciò mentre dalla

$$f(x', x'', x''', \ldots, x^{(m)}) = K$$

tutte si cercano in una volta le radici che vi si contengono; o se alcune solamente si cercano di queste radici, allora non già la (C), ma bensì la (D) acquisterà un grado non $< m$, poichè cercandone per esempio un numero μ, pel n° 252 della Teoria delle equazioni, il suo esponente n sarà $= \frac{m(m-1)(m-2)\ldots(m-\mu+1)}{\mu(\mu-1)(\mu-2)\ldots 1}$.

Nel caso 2°, prese per maggiore semplicità a considerare le funzioni che formano di sopra la terza fila, in cui $\lambda = 4$; o si vuole nella (C) $\mu = 4$, o $\mu < 4$, oppure $\mu > 4$. Sia $\mu = 4$: in questa supposizione, nella maniera medesima con cui la

$$u' = x'x''x'''x^{IV}$$

dipende da

$$K = f(x')(x'')(x''')(x^{IV}),$$

vedesi che dipendono ancora dalla stessa K, a cui si uguagliano le funzioni tutte della terza fila, le

$$u'' = x''x'''x^{IV}x^{V}, \qquad u''' = x'''x^{IV}x^{V}x^{VI}, \qquad \ldots.$$

Dunque, essendo di numero m le funzioni accennate, di grado m risulterà necessariamente l'equazione (D).

Che, se abbiamo $\mu < 4$, supposto per es. $\mu = 2$, onde abbiasi $u = x'x''$: chiamati u' i valori di u che possono determinarsi dalla

$$f(x')(x'')(x''')(x^{IV}),$$

chiamati u'' quelli che dipendono dalla

$$f(x'')(x''')(x^{IV})(x^{V}),$$

e così di seguito, se vogliamo che per es. $x'x''$, $x'''x^{IV}$ siano i valori tutti di u', e però $x''x'''$, $x^{IV}x^{V}$ i valori di u'', etc., vedesi che, cercando dalla

$$f(x')(x'')(x''')(x^{IV}) = K$$

la quantità u, caderemo in un'equazione

$$u'^2 + pu' + q = 0,$$

in cui uno qualunque dei coefficienti, per es. il coefficiente p essendo $= -(x'x'' + x'''x^{IV})$, per la ragione istessa che abbiamo accennata nella ipotesi di $\mu = 4$, non potrà in conseguenza della (B) essere determinabile che dipendentemente da un'equazione di grado m.

Digitized by Google

Se finalmente si vuole $\mu > 4$; fatto a cagion di esempio $\mu = 5$, e però

$$u = x' x'' x''' x^{IV} x^{V},$$

i valori di u determinabili dal primo risultato $f(x')(x'')(x''')(x^{IV})$ saranno i seguenti

$$x' x'' x''' x^{IV} x^{V}, \quad x' x'' x''' x^{IV} x^{VI}, \quad x' x'' x''' x^{IV} x^{VII}, \quad \ldots, \quad x' x'' x''' x^{IV} x^{(m)}.$$

Dunque cercando dalla

$$f(x')(x'')(x''')(x^{IV}) = K$$

i valori della u che vi corrispondono, essendo questi evidentemente di numero $m - 4$, caderemo in un'equazione

$$u^{m-4} + p u^{m-5} + \cdots = 0,$$

nella quale uno qualunque dei coefficienti, per es. p, dipenderà come precedentemente da un'equazione di grado m.

Finalmente nel caso generale per le qualità supposte nella

$$f(x')(x'')(x''') \ldots (x^{(\lambda)}),$$

non essendovi ragione per cui siano determinabili, dipendentemente dal valore K comune a tutti i risultati supposti, piuttosto i valori della u che corrispondono al primo, che non gli altri valori i quali sono corrispondenti agli altri risultati, ne segue, come di sopra, che, o la stessa equazione (D), o la equazione da cui immediatamente o mediatamente procede uno qualunque dei coefficienti della (D), sarà essenzialmente di un grado non $< m$.

11. Supponiamo che, cercando immediatamente dalla (B) il valore della x, ottengansi per essa delle equazioni di grado non $< m$. In tale ipotesi si determini la (E) (n^i 6, 8), e si osservi se questa (E) va ella pure soggetta, qualunque siasi il numero π, alla condizione medesima che abbiamo supposta nella (B), o no. Se no, si verificherà bensì che la (B) non può, come tale, servire alla cercata riduzione della (A); ma però potremo da essa determinare una nuova equazione di relazione, la quale potrà darci l'abbassamento richiesto. Che se poi sotto qualunque valore del numero π, la (E) non meno della (B) resta sempre compresa sotto gli accennati casi del n° precedente, allora diremo che la (B), nè nello stato in cui si ritrova, nè ridotta in qualsivoglia maniera, potrà mai servire ad abbassare opportunamente l'equazione proposta.

12. **) Acciocchè la (B) sia opportuna alla soluzione della (A), o dovrà dunque

---

**) « 12. Nella (A) *sia m numero primo;* la $T' = h$ mantenga il valore h per una permutazione « semplice di 1° genere fra tutte le radici. Cercando la y (n° 30) dalla $T' = h$, cadremo in un'equa- « zione di grado m: tale equazione può contenere il primo e l'ultimo termine, onde con l'estrazione « della radice può essere risolubile. Sia $y^m = P$ tale equazione. Conviene dimostrare che può sempre « supporsi

$$P = p(x' + \alpha x'' + \ldots + \alpha^{m-1} x^{m})^{m}.$$

« Trovata la trasformata in P, che supporrò $P'' + \ldots = 0$; questa dovrà avere un fattore razionale « di grado non $> m$. Col mezzo di questo fattore determino il valore di P, lo sostituisco nella $y^m = P$ « ed avrò, etc. ».

{Nota di P. RUFFINI, con la stessa data e lo stesso titolo della nota *) al n° 10 [36]. — E. B.}.

Digitized by Google

esser tale immediatamente, dandoci il valore della x per equazioni di grado $< m$, o dovrà esserlo mediatamente, potendosi da essa determinare un'altra equazione (E) capace di somministrarci il valore della medesima x nell'accennata maniera. Noi per la necessaria riduzione della (A) dovendo tener conto solamente dei rapporti che ne sono o immediatamente o mediatamente opportuni, tralasceremo gli altri.

13. Riflettendo sulla natura delle permutazioni primitive, veggo che per queste *può la* (B) *conservare il valore* K *in conseguenza della forma della funzione,* come nell'esempio del n° 9, in cui la $x'x'' + x'''x^{IV}$ mantiene il valore K pei cambiamenti di x' in x'', di x''' in x^{IV}, e per l'altro simultaneo di amendue le x', x'' nelle x''', x^{IV}; *oppure essa* (B) *mantiensi* $= K$ *pel valore particolare delle radici,* come nella ipotesi che, posto

$$x' + ax''^2 + bx'''^3 = K,$$

vogliasi ancora

$$x' + ax'''^2 + bx''^3 = K.$$

Nel primo di questi due casi quelle permutazioni istesse che lasciano $= K$ il primo risultato

$$f(x')(x'')(x''') \ldots (x^{(\lambda)}),$$

pei n^{i} 97, 98 della Teoria delle equazioni lasceranno $= K$ ancora tutti i risultati secondarii, ma nel caso secondo può questo verificarsi e no (n° 98 della Teoria delle equazioni): nell'esempio di

$$x'x'' + x'''x^{IV} = K,$$

ancora il risultato secondario

$$x^{V}x^{VI} + x^{VII}x^{VIII} = K$$

dovrà necessariamente conservare il proprio valore per quelle permutazioni medesime, per cui lo mantiene l'altro; nell'esempio secondo, supposto che

$$x' + ax''^2 + bx'''^3 = K, \qquad x^{IV} + ax^{V\,2} + bx^{VI\,3} = K$$

siano i due risultati secondarii, può succedere che, come si ha per la ipotesi

$$x' + ax'''^2 + bx''^3 = K,$$

abbiasi ancora

$$x^{IV} + ax^{VI\,2} + bx^{V\,3} = K,$$

e può succedere che quest'ultima uguaglianza non si verifichi, quantunque abbiano luogo le altre di

$$x' + ax'''^2 + bx''^3 = K, \qquad x^{IV} + ax^{V\,2} + bx^{VI\,3} = K.$$

Che, se le permutazioni primitive, altre riguardano la forma della

$$f(x')(x'')(x''') \ldots (x^{(\lambda)}),$$

ed altre il valore particolare delle radici; allora diremo che, dipendentemente dalle prime di queste permutazioni, i risultati secondarii tutti manterranno il valore K, e dipendentemente dalle seconde potranno mantenerlo, e no.

Rapporto poi alle permutazioni secondarie vedremo facilmente potersi dire che queste non riguardano mai la forma della funzione. Se la

$$x'x'' + x'''x^{IV}$$

Digitized by Google

conserva il valore K cambiandosi nella

$$x^{v}x^{vi} + x^{vii}x^{viii},$$

ciò non dipende, nè perchè il prodotto $x'x''$ riesce il medesimo, tanto dicendosi $x'x''$, che dicendosi $x''x'$, nè perchè la somma $x'x'' + x'''x^{iv}$ resta la medesima, mentre si scrive $x'''x^{iv} + x'x''$.

14. Tanto le permutazioni primitive, come le secondarie, per cui la (B) conserva il valore K, possono essere in un numero uguale, e maggiore di uno.

La solita funzione $x'x'' + x'''x^{iv}$ del n° 9 mantiene il valore K per una permutazione composta, ossia per due semplici primitive, per quella cioè di x' in x'', e per l'altra di $x'x''$ in $x'''x^{iv}$, e mantiene il valore medesimo per una sola secondaria, cioè per quella di tutte le radici x', x'', x''', x^{iv} nelle x^{v}, x^{vi}, x^{vii}, x^{viii}. La funzione $F\left(\frac{x' - x''}{x'''}\right)$ del caso 2°, n° 9, conserva il valore H per una sola permutazione primitiva, cioè per quella di x' in x'', e lo conserva per tre permutazioni secondarie, per quella cioè di x''' in x^{iv}, onde da y' nasce il risultato y''', per quella di x' in x''', di x'' in x^{iv} e di x''' in x', onde da y' ottienesi y^{v}, e per la terza delle x', x'', x''' corrispondentemente nelle x^{v}, x^{vi}, x^{vii}, per cui y' ci produce il risultato y^{ix}.

Quando poi una permutazione primitiva riguarda la forma della funzione, essa in allora ci darà necessariamente tanti risultati della (B) uguali a K, quante volte può replicarsi fra le radici che entrano nella medesima, ma nelle permutazioni primitive riguardanti il valore particolare delle radici, e nelle permutazioni secondarie non può asserirsi lo stesso. Se nella precedente

$$x' + ax''^{2} + bx'''^{3} = K$$

(n° 13) si vuole che le radici siano tali, che si abbia

$$x'' + ax'''^{2} + bx'^{3} = K,$$

replicando su questo secondo risultato la permutazione medesima semplice, come si vede, del 1° genere (n° 257 della Teoria delle equazioni), il risultato nuovo

$$x''' + ax'^{2} + bx''^{3},$$

che ne viene, potrà essere, e non essere $= K$. Così, supposto $m = 6$, $\lambda = 3$, se si vuole che, in conseguenza delle permutazioni secondarie, dalla

$$f(x')(x'')(x''') = K$$

abbiasi

$$f(x')(x'')(x^{iv}) = K, \qquad f(x')(x'')(x^{v}) = K,$$

potendo questi risultati esser nati dalla

$$f(x')(x'')(x''') = f(x')(x'')(x''') + o\,x^{iv}x^{v}x^{vi}$$

per una permutazione semplice fra le x''', x^{iv}, x^{v}, x^{vi}, cosicchè si abbia

$$f(x')(x'')(x^{iv}) + o\,x^{v}x^{vi}x''' = f(x')(x'')(x^{iv}),$$
$$f(x')(x'')(x^{v}) + o\,x^{vi}x'''x^{iv} = f(x')(x'')(x^{v}),$$
$$f(x')(x'')(x^{vi}) + o\,x'''x^{iv}x^{v} = f(x')(x'')(x^{vi}),$$

Digitized by Google

può succedere che quest'ultimo risultato $f(x')(x'')(x^{vi})$, quantunque nato da una permutazione medesima, sia, e non sia esso pure $= K$.

15. *Supponiamo che una data funzione*

$$f(x')(x'')(x''') \cdots = t$$

non si cambi di valore per una qualunque permutazione riguardante la forma della funzione, e che, dipendentemente da questa, vogliasi il valore di un'altra funzione qualsivoglia

$$\varphi(x')(x'')(x''') \cdots = y.$$

Effettuata in quest'ultima, e replicata quanto si può, la permutazione per cui abbiamo supposto che la prima delle funzioni date conservi il proprio valore, e chiamato n il numero dei risultati che ne vengono, pel n° 147 della Teoria delle equazioni sappiamo che la y dipenderà da un'equazione

$$y^n + g\,y^{n-1} + \cdots + h = 0,$$

in cui ciascuno dei coefficienti, per es. il coefficiente h, avrà tanti valori diversi quanti sono i diversi valori della t; e cadauno dei valori di h sarà determinabile razionalmente e immediatamente dal valore corrispondente della t.

16. [37] *Supponiamo ora che, sotto una data permutazione qualunque siasi, semplice o composta, la t conservi il proprio valore in conseguenza del valore particolare delle radici* x', x'', x''', ..., *e chiamati* t', t'', t''', ..., $t^{(\alpha)}$ *i risultati tutti, che quindi si hanno fra loro uguali, vogliasi riconoscere come, dipendentemente da essi, possiamo ottenere i valori* y', y'', y''', ..., $y^{(\alpha)}$ *corrispondenti della* y.

A tal fine osservo che, pel n° 151 della Teoria delle equazioni, una sola equazione

$$y^\alpha + g\,y^{\alpha-1} + \cdots + h = 0$$

tutti può riunire gli accennati valori della y, e non resta che da esaminarsi la determinazione dei coefficienti g, ..., h.

Per maggiore semplicità suppongasi che la precedente

$$x' + a\,x''^2 + b\,x'''^3$$

sia la funzione data $= t$; che vogliasi

$$y = \frac{x' - x''}{x'''},$$

e che la permutazione supposta sia semplice, e sia fra tutte e tre le radici x', x'', x'''. In simile ipotesi, o tutti e tre i valori

$$x' + a\,x''^2 + b\,x'''^3 = t', \qquad x'' + a\,x'''^2 + b\,x'^3 = t'', \qquad x''' + a\,x'^2 + b\,x''^3 = t''',$$

provenienti dalla permutazione ripetuta quanto si può, sono uguali fra loro, o no; se lo sono, allora nella corrispondente equazione

$$y^3 + g\,y^2 + \cdots + h = 0$$

ciascuno dei coefficienti g, ..., h essendo $= f(y', y'', y''')$, avrà un solo valore dipendente razionalmente dal valore $t' = t'' = t'''$, e potrà da esso determinarsi, come è

Digitized by Google

stato indicato nei n^{i} 147, 151 della Teoria delle equazioni. Che, se non tutti e tre i valori t', t'', t''' sono fra loro uguali, ed abbiamo soltanto $t' = t''$, in tal caso ai due risultati t', t'' corrisponderà bensì l'equazione

$$y^2 + gy + h = 0, \quad \text{in cui} \quad y' = \frac{x' - x''}{x'''}, \qquad y'' = \frac{x'' - x'''}{x'},$$

ma i coefficienti g, h non saranno determinabili dalla t', come si è accennato nel primo caso. Imperciocchè avendosi

$$y' = \frac{x' - x''}{x'''}, \qquad y'' = \frac{x'' - x'''}{x'}, \qquad y''' = \frac{x''' - x'}{x''},$$

e però

$$h' = y'y'' = \frac{x'x'' - x'x''' + x''x''' - x''^2}{x'x'''},$$

$$h'' = y'y''' = \frac{x'x''' - x''x''' + x'x'' - x'^2}{x''x'''},$$

$$h''' = y''y''' = \frac{x''x''' - x'x'' + x'x''' - x'''^2}{x'x''},$$

il coefficiente h' non avrà già due valori uguali corrispondenti ai due $t' = t''$, ma avendo tutti e tre i valori h', h'', h''' tra loro differenti, la stessa difficoltà che ho incontrata nel cercare il valore y' dipendentemente da t', l'incontrerò egualmente cercandone il valore h'.

Ciò non ostante, potremo anche in questo caso ottenere dipendentemente da t' il chiesto valore di h', ma converrà operar come segue: facciasi con le t', t'' una funzione della forma $f(t', t'')$ per es. la somma

$$t' + t'' = x' + x'' + a(x''^2 + x'''^2) + b(x'''^3 + x'^3),$$

chiamisi questa T, e, dipendentemente da essa, si cerchi il valore di h. Come alle quantità t', t'', t''' corrispondono le y', y'', y''', così alle

$$T' = t' + t'', \qquad T'' = t' + t''', \qquad T''' = t'' + t'''$$

corrisponderanno le altre

$$h' = y'y'', \qquad h'' = y'y''', \qquad h''' = y''y''',$$

e ciascuna di queste seconde potrà ricercarsi col solito metodo (n° 144 della Teoria delle equazioni) dalla corrispondente delle prime. È vero che a cagione di $t' = t''$ risulta $T'' = T'''$, e però che la determinazione delle h'', h''' dalle T'', T''' incontrerà lo stesso inconveniente che incontrava la determinazione della y' e della h', mentre queste quantità cercavansi dalla $t' = t''$; ma nel caso presente a noi non importa di determinare che il valore $h' = y'y''$, e questo può sempre aversi da T', non avendo T' alcun valore uguale.

Consideriamo il caso in generale.

Chiamato n il numero di tutti i risultati che si hanno dalla t ripetendo la supposta permutazione quanto è mai possibile, o abbiamo il precedente numero $\alpha = n$, o ab-

Digitized by Google

biamo $\alpha < n$. Se $\alpha = n$, allora ciascun coefficiente $g, \ldots, h$, per es. l'ultimo h, potrà aversi dalla t' come viene insegnato nei n^i 147, 151 della Teoria delle equazioni, ma se $\alpha < n$, è necessaria una variazione. Supposto difatti attualmente $\alpha < n$, e supposto per maggior chiarezza che la permutazione sia semplice del 1° genere, e che si abbia

$$t' = f(x')(x'')(x''') \ldots (x^{(n-1)})(x^{(n)}),$$
$$t'' = f(x'')(x''')(x^{IV}) \ldots (x^{(n)})(x'),$$
$$t''' = f(x''')(x^{IV})(x^{V}) \ldots (x')(x''),$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

onde, replicandosi essa quanto si può, t' ci somministri t'', t'' ci dia t''', t''' ci dia t^{IV}, $\ldots$, $t^{(\alpha-1)}$ produca $t^{(\alpha)}$, $t^{(\alpha)}$ si cambi in $t^{(\alpha+1)}$, e così di seguito fino a $t^{(n)}$; e in egual modo y' si cambi corrispondentemente in y'', y'' in y''', y''' in y^{IV}, $\ldots$, $y^{(\alpha-1)}$ in $y^{(\alpha)}$, $y^{(\alpha)}$ in $y^{(\alpha+1)}$, etc. fino ad $y^{(n)}$; eseguiscasi attualmente in t' ed in

$$h' = \pm y'y''y''' \ldots y^{(\alpha-1)}y^{(\alpha)}$$

la permutazione supposta, e fermiamoci a considerarne i primi risultati. A cagione di t'' per la ipotesi $= t'$, potremo dire che t' conserva per questa prima operazione il proprio valore, ma non potremo già dire lo stesso di h': mutandosi perciò

$$y' \text{ in } y'', \quad y'' \text{ in } y''', \quad y''' \text{ in } y^{IV}, \ldots, y^{(\alpha-1)} \text{ in } y^{(\alpha)}, \quad \text{ed} \quad y^{(\alpha)} \text{ in } y^{(\alpha+1)},$$

il valore di h diverrà

$$y''y'''y^{IV} \ldots y^{(\alpha)}y^{(\alpha+1)}$$

valore, il quale è ben diverso dal primo

$$y'y''y''' \ldots y^{(\alpha-1)}y^{(\alpha)} = h'.$$

Proseguendo tanto in t che in h la nostra permutazione, mentre da t otteniamo $t''' = t'$, la h diventerà

$$y'''y^{IV}y^{V} \ldots y^{(\alpha+1)}y^{(\alpha+2)}$$

valore, come vedesi, differente dall'altro

$$y'y''y''' \ldots y^{(\alpha-1)}y^{(\alpha)} = h';$$

lo stesso si ritrova in seguito. Ora, acciocchè a norma dei n^i 147, 151 della Teoria delle equazioni potesse da t' ottenersi razionalmente il valore h', bisognerebbe che questa funzione h' non cambiasse di valore a quelle permutazioni medesime fra le x', x'', x''', $\ldots$, per cui non cambiasi la t; ma ciò non succede, dunque il metodo dei citati n^i 147, 151 della Teoria delle equazioni non potrà nella ipotesi di $\alpha < n$ servirci per determinare h' immediatamente da t'.

Facciamo con le t', t'', t''', $\ldots$, $t^{(\alpha)}$ una funzione della forma

$$f(t', t'', t''', \ldots, t^{(\alpha)}),$$

per es. la somma

$$t' + t'' + t''' + \cdots + t^{(\alpha)};$$

chiamisi questa T, e cerchiamo da essa il valore h'. Poichè, essendo per la ipotesi le quantità $t^{(\alpha+1)}$, $t^{(\alpha+2)}$, $\ldots$, $t^{(n)}$ di valore differente dal valore delle

$$t' = t'' = t''' = \cdots = t^{(\alpha)},$$

Digitized by Google

il risultato

$$T' = t' + t'' + t''' + \cdots + t^{(\alpha)},$$

mentre non abbiansi nuove supposizioni, è diverso dagli altri tutti

$$T'' = t' + t'' + t''' + \cdots + t^{(\alpha+1)}, \qquad T''' = t' + t'' + t''' + \cdots + t^{(\alpha+2)}, \ \ldots,$$

cosicchè dalla T non può con le permutazioni prodursi altro risultato a lui uguale; poichè le

$$y'', \quad y''', \ \ldots, \ y^{(\alpha)}, \quad y^{(\alpha+1)}, \ \ldots, \ y^{(n)}$$

sono nate dalla y', come le

$$t'', \quad t''', \ \ldots, \ t^{(\alpha)}, \quad t^{(\alpha+1)}, \ \ldots, \ t^{(n)}$$

dalla t'; e poichè finalmente

$$h' = \pm y' y'' y''' \ \ldots \ y^{(\alpha)}$$

è una funzione delle

$$y', \quad y'', \quad y''', \ \ldots, \ y^{(\alpha)}$$

affatto simile alla funzione T' delle

$$t', \quad t'', \quad t''', \ \ldots, \ t^{(\alpha)};$$

è chiaro che, dipendentemente dalla T', la quantità h' avrà, in conseguenza delle sole precedenti supposizioni, un solo valore, e quindi che potrà determinarsi da essa T' col solito metodo. Dunque, *nell'ipotesi fatta, affine di avere il valore delle* $y', y'', y''', \ldots, y^{(\alpha)}$, *radici della equazione*

$$y^{\alpha} + g y^{\alpha-1} + \cdots + h = 0,$$

dovremo cercare il valore dei coefficienti $g, \ldots, h$ *non già dal valore* t', *ma bensì dall'altro* T' *in generale* $= f(t', t'', t''', \ldots, t^{(\alpha)})$.

L'esposto metodo poi, vedesi facilmente che avrà sempre luogo, qualunque siasi la natura e qualunque il numero delle permutazioni per cui produconsi le quantità tra loro uguali $t', t'', t''', \ldots, t^{(\alpha)}$. Imperciocchè, se tali permutazioni si volessero di un numero > 1, o si volessero composte (n° 256 della Teoria delle equazioni); allora ripetendosi contemporaneamente o esse per intiero, o qualcuna delle loro componenti (n° 258 della Teoria delle equazioni) sopra dei risultati $t', t'', t''', \ldots, t^{(\alpha)}$, e sopra degli altri $y', y'', y''', \ldots, y^{(\alpha)}$, tanto i primi quanto i secondi fra questi non farebbero che mutarsi corrispondentemente fra loro o cambiarsi nelle

$$t^{(\alpha+1)}, \quad t^{(\alpha+2)}, \ \ldots, \ t^{(n)}, \qquad y^{(\alpha+1)}, \quad y^{(\alpha+2)}, \ \ldots, \ y^{(n)};$$

e per conseguenza le funzioni T', h', mentre non abbia luogo qualche nuova supposizione, sotto la medesima permutazione o si conserverebbero amendue dello stesso valore, o si cambierebbero contemporaneamente.

17. Nel n° precedente ho detto che i valori $T'', T''', \ldots$ della T sono tutti diversi dal valore T', *mentre non esista qualche nuova supposizione diversa dalle precedenti.* Poniamo ora che abbia luogo questa nuova supposizione, e che, *in conseguenza di certi particolari valori delle* $x', x'', x''', \ldots$, *o della forma della funzione, alcuni dei risultati* $T'', T''', \ldots$, *siano* $= T'$.

Digitized by Google

Questa circostanza sembra intorbidare il metodo precedente; ma vedremo non essere ciò vero, poichè, se dessa accade nella funzione

$$T = t' + t'' + t''' + \cdots + t^{(\alpha)},$$

vedremo potersene sempre determinare un'altra $f(t', t'', t''', \ldots, t^{(\alpha)})$, nella quale il risultato corrispondente a T' sarà disuguale da tutti i risultati corrispondenti a T'', T''', ..., e la quale per conseguenza potrà, giusta il n° precedente, servire in vece della

$$t' + t'' + t''' + \cdots + t^{(\alpha)}$$

alla determinazione razionale dei coefficienti g, ..., h.

Supponiamo pertanto che, eseguite nella

$$t = f(x')(x'')(x''') \ldots$$

tutte le possibili permutazioni, di numero p siano i risultati t', t'', t''', ..., $t^{(p)}$ che ne vengono; supponiamo che, facendo le permutazioni tutte nella

$$T = t' + t'' + t''' + \cdots + t^{(\alpha)},$$

chiamisi q il numero dei risultati T', T'', T''', ..., $T^{(q)}$ che se ne hanno, onde sia

$$q = \frac{p(p-1)(p-2)\ldots[p-(\alpha-1)]}{1.2.3.\ldots\alpha};$$

e supposto finalmente, per maggiore semplicità, di scrivere

$$t' + t'' + t''' + \cdots + t^{(\alpha)} = T_1, \qquad t'^2 + t''^2 + t'''^2 + \cdots + t^{(\alpha)2} = T_2,$$
$$t'^3 + t''^3 + t'''^3 + \cdots + t^{(\alpha)3} = T_3, \ldots, t'^\varepsilon + t''^\varepsilon + t'''^\varepsilon + \cdots + t^{(\alpha)\varepsilon} = T_\varepsilon$$

sia

$$T'_\varepsilon = t'^\varepsilon + t''^\varepsilon + t'''^\varepsilon + \cdots + t^{(\alpha-3)\varepsilon} + t^{(\alpha-2)\varepsilon} + t^{(\alpha-1)\varepsilon} + t^{(\alpha)\varepsilon},$$
$$T''_\varepsilon = t'^\varepsilon + t''^\varepsilon + t'''^\varepsilon + \cdots + t^{(\alpha-3)\varepsilon} + t^{(\alpha+1)\varepsilon} + t^{(\alpha+2)\varepsilon} + t^{(\alpha+3)\varepsilon},$$
$$T'''_\varepsilon = t'^\varepsilon + t''^\varepsilon + t'''^\varepsilon + \cdots + t^{(\alpha-3)\varepsilon} + t^{(\alpha-2)\varepsilon} + t^{(\beta)\varepsilon} + t^{(\beta+1)\varepsilon},$$
$$T^{\text{IV}}_\varepsilon = t'^\varepsilon + t''^\varepsilon + t'''^\varepsilon + \cdots + t^{(\gamma)\varepsilon} + t^{(\gamma+1)\varepsilon} + t^{(\gamma+2)\varepsilon} + t^{(\gamma+3)\varepsilon},$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$T^{(q)}_\varepsilon = t^{(q-\alpha+1)\varepsilon} + t^{(q-\alpha+2)\varepsilon} + t^{(q-\alpha+3)\varepsilon} + \cdots + t^{(q-3)\varepsilon} + t^{(q-2)\varepsilon} + t^{(q-1)\varepsilon} + t^{(q)\varepsilon},$$

rappresentandosi dalla ε i successivi numeri 1, 2, 3, 4, ...

Ciò fatto, suppongasi che, posto $\varepsilon = 1$, la T_1 sia tale che divengano fra loro uguali i due risultati T'_1, T''_1: avendosi perciò

$$t' + t'' + t''' + \cdots + t^{(\alpha-3)} + t^{(\alpha-2)} + t^{(\alpha-1)} + t^{(\alpha)}$$
$$= t' + t'' + t''' + \cdots + t^{(\alpha-3)} + t^{(\alpha+1)} + t^{(\alpha+2)} + t^{(\alpha+3)},$$

risulterà

$$t^{(\alpha-2)} + t^{(\alpha-1)} + t^{(\alpha)} = t^{(\alpha+1)} + t^{(\alpha+2)} + t^{(\alpha+3)},$$

e quindi a cagione di $t^{(\alpha-2)} = t^{(\alpha-1)} = t^{(\alpha)}$, avremo

$$3\,t^{(\alpha)} = t^{(\alpha+1)} + t^{(\alpha+2)} + t^{(\alpha+3)},$$

equazione nella quale ciascuna delle quantità $t^{(\alpha+1)}$, $t^{(\alpha+2)}$, $t^{(\alpha+3)}$ per la ipotesi è disuguale

Digitized by Google

dalla $t^{(\alpha)}$. Ora, o si vuole che, supposto successivamente $\varepsilon = 2, 3, 4, \ldots$, un'uguaglianza a questa simile abbia luogo ancora in altre delle $T_2, T_3, T_4, \ldots$, o no; se si vuole, io dico che ciò non potrà succedere tutt'al più che in quattro delle medesime; imperciocchè, se si volesse che accadesse in cinque, per esempio nelle prime cinque, venendone

$$T'_1 = T''_1, \quad T'_2 = T''_2, \quad T'_3 = T''_3, \quad T'_4 = T''_4, \quad T'_5 = T''_5,$$

otterrebbesi

$$3t^{(\alpha)} = t^{(\alpha+1)} + t^{(\alpha+2)} + t^{(\alpha+3)}, \qquad 3t^{(\alpha)^2} = t^{(\alpha+1)^2} + t^{(\alpha+2)^2} + t^{(\alpha+3)^2},$$

$$3t^{(\alpha)^3} = t^{(\alpha+1)^3} + t^{(\alpha+2)^3} + t^{(\alpha+3)^3}, \qquad 3t^{(\alpha)^4} = t^{(\alpha+1)^4} + t^{(\alpha+2)^4} + t^{(\alpha+3)^4},$$

$$3t^{(\alpha)^5} = t^{(\alpha+1)^5} + t^{(\alpha+2)^5} + t^{(\alpha+3)^5},$$

e però con quattro incognite $t^{(\alpha)}, \ldots, t^{(\alpha+3)}$ si dovrebbe soddisfare a cinque equazioni, niuna delle quali, e a cagione della sua forma, e a cagione di non essere $t^{(\alpha)}$ uguale ad alcuna delle $t^{(\alpha+1)}, t^{(\alpha+2)}, \ldots$, può risultare identica all'altra, il che è impossibile.

Ciò dunque essendo, escludiamo dalle nostre considerazioni quelle funzioni nelle quali ha luogo l'esposta uguaglianza, e supposto tali essere le prime quattro T_1, T_2, T_3, T_4, nelle altre che rimangono, $T_5, T_6, \ldots$, essa non potrà più verificarsi.

Supponiamo che nella T_5 succeda un'altra uguaglianza diversa dalla precedente, e al risultato T'_5 sia per esempio uguale l'altro T'''_5, onde risulti

$$t'^5 + t''^5 + t'''^5 + \cdots + t^{(\alpha-3)^5} + t^{(\alpha-2)^5} + t^{(\alpha-1)^5} + t^{(\alpha)^5} = t'^5 + t''^5 + t'''^5 + \cdots$$
$$\cdots + t^{(\alpha-3)^5} + t^{(\alpha-2)^5} + t^{(\beta)^5} + t^{(\beta+1)^5},$$

ossia

$$2t^{(\alpha)^5} = t^{(\beta)^5} + t^{(\beta+1)^5},$$

in cui cadauna delle $t^{(\beta)}, t^{(\beta+1)}$ è disuguale dalla $t^{(\alpha)}$. In questo caso, esistendo nella equazione risultata le tre quantità $t^{(\alpha)}, t^{(\beta)}, t^{(\beta+1)}$, potranno bensì esistere tra le funzioni $T_5, T_6, T_7, \ldots$ tre di loro, nelle quali succeda l'eguaglianza medesima, ma non ne potranno esistere di più, e la ragione ne è la stessa che quella del caso precedente. Supposto pertanto che tale uguaglianza si verifichi nelle funzioni T_5, T_6, T_7, onde risulti $T'_5 = T'''_5$, $T'_6 = T'''_6$, $T'_7 = T'''_7$, in tutte le altre $T_8, T_9, \ldots$ che rimangono, non potrà aver più luogo nè la prima delle uguaglianze supposte, nè la seconda, cioè nè la $T' = T''$, nè la $T' = T'''$.

Vogliasi ora che nella T_8, i due risultati T_8, T_8^{IV} siano uguali fra loro: avendosi perciò

$$4t^{(\alpha)^8} = t^{(\gamma)^8} + t^{(\gamma+1)^8} + t^{(\gamma+2)^8} + t^{(\gamma+3)^8},$$

viene ad ottenersi un'equazione, nella quale esistono le cinque quantità $t^{(\alpha)}, t^{(\gamma)}, \ldots, t^{(\gamma+3)}$, e cadauna delle $t^{(\gamma)}, \ldots, t^{(\gamma+3)}$ è differente dalla $t^{(\alpha)}$: dunque tra le funzioni $T_8, T_9, \ldots$ ne potranno esistere cinque, le quali ammettano simile eguaglianza; ma per quanto abbiamo detto poc'anzi non potendone esistere di più, supponiamo che tali siano le cinque funzioni $T_8, T_9, \ldots, T_{12}$: nelle ulteriori $T_{13}, T_{14}, T_{15}, \ldots$ non potrà succedere nè la prima, nè la seconda, nè la terza delle uguaglianze accennate.

Digitized by Google

Proseguendo nella stessa maniera, vedesi facilmente che, se succedono nella T_{13} e nelle funzioni che seguono, delle uguaglianze nuove fra i risultati T^{v}, T^{vi}, ... ed il primo T', potremo sempre determinare delle funzioni ulteriori, nelle quali non abbiano luogo nè questa, nè alcuna delle uguaglianze precedenti.

Ora per quante di simili uguaglianze si suppongano, il loro numero è sempre finito; imperciocchè queste non possono mai superare il numero delle combinazioni che provengono paragonando i risultati T'', T''', ..., $T^{(q)}$ col primo T', ed il numero di tali combinazioni è finito, perchè essendo finito il numero m delle x', x'', x''', ..., $x^{(m)}$, e però il numero p delle t', t'', t''', ..., $t^{(p)}$, è finito ancora il numero q delle T', T'', T''', ..., $T^{(q)}$; ma le funzioni T_1, T_2, T_3, T_4, ... si possono evidentemente estendere all'infinito. Dunque, proseguendo il precedente raziocinio quanto è necessario, potrò sempre giungere ad una funzione, che chiamerò T_ε, nella quale tutte restino escluse le uguaglianze che si possono supporre, e nella quale per conseguenza niuno dei risultati T_ε', T_ε'', ..., $T_\varepsilon^{(q)}$ sia $= T_\varepsilon'$. Dunque, etc.

18. Formata la funzione T_ε giusta il n° precedente, e supposta tale che, nè in essa, nè in alcuna delle ulteriori $T_{\varepsilon+1}$, $T_{\varepsilon+2}$, ... il risultato T' uguagli alcuno degli altri T'', T''', T^{iv}, ... il che, per quanto si è detto nel n° precedente, può sempre farsi; osserviamo poter succedere un nuovo accidente, il quale, pei nostri raziocinii e i nostri calcoli sarà ben di evitare: *potrebbe accadere che la* T_ε *conservasse il proprio valore per qualche nuova permutazione, sotto cui non lo conservava la t.* Se per esempio, avendosi $\varepsilon = 1$, ed $\alpha = 2$, sia

$$t' = x'^2 + x''^2, \qquad t'' = x'''^2 + x^{iv\,2},$$

risultando

$$T_1' = t' + t'' = x'^2 + x''^2 + x'''^2 + x^{iv\,2},$$

questa funzione conserverà il proprio valore pel cambiamento di x' in x''' ed in x^{iv}, e per quello di x'' in x''' ed in x^{iv}, permutazioni, sotto cui non lo conservavano le t', t''. In egual modo, ritenuto $\alpha = 2$, se sia $\varepsilon = 3$, se ω rappresenta una delle radici cubiche immaginarie della unità, e se sia

$$t' = x' + \omega x'' + \omega^2 x''', \qquad t'' = x^{iv} + \omega x^{v} + \omega^2 x^{vi};$$

nella $T_3' = t'^3 + t''^3$ risultando

$$t'^3 = (x' + \omega x'' + \omega^2 x''')^3, \qquad t''^3 = (x^{iv} + \omega x^{v} + \omega^2 x^{vi})^3,$$

le t'^3, t''^3, e quindi la T_3' conserveranno il proprio valore per la permutazione semplice, la prima delle tre radici x', x'', x''', e la seconda delle altre x^{iv}, x^{v}, x^{vi} fra di loro, il che non succedeva nelle t', t''.

Per formare con le t', t'', t''', ..., $t^{(\alpha)}$ la

$$T_\varepsilon' = t'^\varepsilon + t''^\varepsilon + t'''^\varepsilon + \cdots + t^{(\alpha)\varepsilon},$$

non dobbiamo che elevare alla potenza ε-*sima* ciascuna delle t', t'', t''', ..., $t^{(\alpha)}$, e in seguito farne la somma; in questa somma poi, mentre fannosi delle permutazioni fra le x', x'', x''', ... non può la T_ε' conservare il proprio valore se non perchè sotto di esse

Digitized by Google

1° O ciascuna delle quantità t'^{ε}, t''^{ε}, t'''^{ε}, ..., $t^{(\alpha)^{\varepsilon}}$ rimane la medesima senza cangiarsi in altre, come si vede nel secondo esempio.

2° O perchè le t'^{ε}, t''^{ε}, t'''^{ε}, ..., $t^{(\alpha)^{\varepsilon}}$ si cambiano in altre uguali, o disuguali da esse, la cui somma risulta $= T'_{\varepsilon}$, come apparisce nell'esempio primo.

Ora nella nostra T'_{ε}, può bensì accadere l'accennato accidente per la prima delle esposte ragioni, come nell'esempio secondo; ma non potrà accadere per la seconda ragione, come nell'esempio primo. Imperciocchè, se accadesse per questa seconda ragione, sotto una data permutazione le t'^{ε}, t''^{ε}, t'''^{ε}, ..., $t^{(\alpha)^{\varepsilon}}$ si dovrebbero o in tutto o in parte cambiare in altre da lor disuguali, e la somma di tutti i risultati che ne verrebbero, dovrebbe essere $= T'_{\varepsilon}$. Supposto, per esempio, che le t'^{ε}, t''^{ε}, t'''^{ε}, ... si cambiassero rispettivamente nelle t'''^{ε}, $t^{\text{IV}\,\varepsilon}$, $t^{\text{V}\,\varepsilon}$, ..., e le $t^{(\alpha-2)^{\varepsilon}}$, $t^{(\alpha-1)^{\varepsilon}}$, $t^{(\alpha)^{\varepsilon}}$ nelle $t^{(\alpha+1)^{\varepsilon}}$, $t^{(\alpha+2)^{\varepsilon}}$, $t^{(\alpha+3)^{\varepsilon}}$, dovrebbe venirne

$$t'''^{\varepsilon} + t^{\text{IV}\,\varepsilon} + t^{\text{V}\,\varepsilon} + \cdots + t^{(\alpha+1)^{\varepsilon}} + t^{(\alpha+2)^{\varepsilon}} + t^{(\alpha+3)^{\varepsilon}} = T'_{\varepsilon},$$

e per conseguenza uno dei risultati T''_{ε}, T'''_{ε}, $T^{\text{IV}}_{\varepsilon}$, ... dovrebbe essere $= T'_{\varepsilon}$ il che è contro la supposizione.

19. Prendiamo dunque a considerare piuttosto l'altro caso, e cerchiamo di determinare quando ha luogo il nostro accidente per la prima delle ragioni accennate. Supposto perciò $t'^{\varepsilon} = H$, e chiamato $t^{(\alpha+1)}$ ciò che diventa t' per quella permutazione fra le x', x'', x''', ..., che fa cambiare essa t', e lascia la t'^{ε} del valore medesimo, dovrà essere questa quantità $t^{(\alpha+1)}$ disuguale da t', e dovrà essere $t^{(\alpha+1)^{\varepsilon}} = H$; dunque, risultando tanto t' quanto $t^{(\alpha+1)}$ radici della equazione $t^{\varepsilon} = H$, per la natura di questa dovrà essere $t^{(\alpha+1)} = \omega t'$, chiamata ω quella tra le radici *ε-sime* dell'unità, che corrisponde ai valori t', $t^{(\alpha+1)}$; e per conseguenza, se accade l'indicato caso, la t' dovrà essere tale che moltiplicata, nello stato in cui si trova, per una determinata radice *ε-sima* dell'unità, somministrerà l'altro risultato $t^{(\alpha+1)}$. Nell'esempio precedente, moltiplicato il valore

$$t' = x' + \omega x'' + \omega^2 x'''$$

per ω e per ω^2, otterremo

$$t^{(\alpha+1)} = x''' + \omega x' + \omega^2 x'' = \omega t', \qquad t^{(\alpha+2)} = x'' + \omega x''' + \omega^2 x' = \omega^2 t'.$$

Rappresenti la lettera ζ uno qualunque dei numeri primi, che a norma del n° precedente oltrepassano il valore ε, e questi numeri primi supposto essere per esempio i seguenti 11, 13, 17, 19, 23, ..., rappresenti corrispondentemente ω' una delle radici undecime dell'unità, ω'' ne esprima una delle radici decime terze, ω''' una delle decime settime, ω^{IV} una delle decime none, etc. Ciò posto, supponiamo la t' tale che, cambiandosi di valore sotto certe permutazioni, e producendosi in corrispondenza i risultati

$$t^{(\alpha+1)}, \quad t^{(\alpha+2)}, \quad t^{(\alpha+3)}, \quad t^{(\alpha+4)}, \quad \ldots$$

tutti da t' disuguali, le sue potenze t'^{11}, t'^{13}, t'^{17}, ..., sotto le permutazioni medesime conservino rispettivamente il loro valore per modo che si abbia

$$t'^{11} = t^{(\alpha+1)^{11}}, \quad t'^{13} = t^{(\alpha+2)^{13}}, \quad t'^{17} = t^{(\alpha+3)^{17}}, \quad \ldots;$$

Digitized by Google

in questa ipotesi, estraendo le radici, dovrà risultare

$$t^{(\alpha+1)} = \omega' t', \quad t^{(\alpha+2)} = \omega'' t', \quad t^{(\alpha+3)} = \omega''' t', \quad \ldots .$$

Ora in queste equazioni niuna delle ω', ω'', ω''', ... può essere $= 1$, perchè se fosse per esempio $\omega'' = 1$, ne verrebbe $t^{(\alpha+2)} = t'$, il che è contro la supposizione: per conseguenza niuna delle $t^{(\alpha+1)}$, $t^{(\alpha+2)}$, ... potrà essere uguale ad un'altra delle medesime, perchè se ciò fosse, se per esempio si avesse $t^{(\alpha+1)} = t^{(\alpha+2)}$, oppure $t^{(\alpha+1)} = t^{(\alpha+3)}$, risulterebbe rispettivamente $\omega' t' = \omega'' t'$, $\omega' t' = \omega''' t'$, e però $\omega' = \omega''$, $\omega' = \omega'''$, il che è impossibile, giacchè per la natura delle radici dell'unità è impossibile che una di queste radici di un dato grado un'altra ne uguagli dello stesso, o di grado diverso, mentre esse non siano uguali all'unità, e mentre i loro gradi vengano espressi dai numeri primi, come di fatti si è supposto nel nostro caso. Ma se le quantità $t^{(\alpha+1)}$, $t^{(\alpha+2)}$, ... sono tutte disuguali fra loro, il numero delle precedenti equazioni

$$t'^{11} = t^{(\alpha+1)11}, \quad t'^{13} = t^{(\alpha+2)13}, \quad t'^{17} = t^{(\alpha+3)17}, \quad \ldots$$

deve essere finito, perchè è finito il numero p di tutti i risultati provenienti dalla t per le permutazioni fra le x', x'', x''', ... Dunque, potendosi la serie dei numeri primi 11, 13, 17, 19, 23, ... estendere all'infinito, ne segue che potrò sempre determinare una potenza ζ-*esima* della t' la quale superi tutte quelle in cui succedono l'esposte uguaglianze. Lo stesso si dice della t'', della t''', ... Dunque essendo sempre determinabile una funzione

$$T_\zeta = t'^\zeta + t''^\zeta + t'''^\zeta + \cdots + t^{(\alpha)\zeta}$$

tale che ciascuna delle t'^ζ, t''^ζ, t'''^ζ, ... non conservi il proprio valore se non che sotto quelle permutazioni medesime, sotto delle quali lo conservano le t', t'', t''', ..., se supporremo che essa T_ζ sia attualmente determinata in tal modo, verrà così preso di mezzo affatto l'accidente accennato nel n° 18.

20. Dunque potendosi sempre determinare una funzione

$$T = f(t', t'', t''', \ldots, t^{(\alpha)})$$

tale che abbia il risultato T' disuguale da tutti gli altri T'', T''', ... (n° 17), e tale che non mantenga il proprio valore per altre permutazioni diverse da quelle sotto cui mantiene il proprio la t (n^i 18, 19); noi supporremo che la T, la quale deve servire e per isciogliere il problema del n° 16, e per le considerazioni da farsi in seguito, sia realmente determinata con le condizioni ora indicate.

In conseguenza di quanto abbiamo detto nei n^i 16 *e segg. converrà correggere, o almeno esprimere meglio, quanto si espone nei* n^i 151, 152 *della Teoria delle equazioni.*

21. Ritenute le supposizioni del n° 16, e formata, giusta il n° precedente, la funzione

$$T' = f(t', t'', t''', \ldots, t^{(\alpha)});$$

in questa io dico che: *le permutazioni, per cui essa mantiene il proprio valore, possono considerarsi tutte come riguardanti la forma della funzione.* Eseguiscasi nella T' una qualunque permutazione riguardante il valore particolare delle radici, e vengano in essa

Digitized by Google

comprese per esempio le x', x'', x'''; per simile permutazione la t, supposto che contenga alcune o tutte le x', x'', x''', non potrà già rimanere identicamente la stessa, poichè la permutazione non riguarda la sua forma, ma dovrà cambiarsi in una delle altre t'', t''', ..., $t^{(p)}$; e lo stesso si dice di tutte quelle tra le t'', t''', ..., $t^{(\alpha)}$, in cui esistono le accennate x', x'', x'''.

Ora per fare tale permutazione nella $T' = f(t', t'', t''', \ldots, t^{(\alpha)})$ dovendosi essa eseguire contemporaneamente in tutte quelle tra le t', t'', t''', ..., $t^{(\alpha)}$ che, contenendo le x', x'', x''', la possono ammettere; osservo che, per simile operazione, queste t', t'', t''', ..., $t^{(\alpha)}$ *o si cambiano promiscuamente fra loro, senza produrre nuovi risultati,* come nel caso che la t' produca la t'', la t'' produca la t''', la t''' la t^{iv}, e la t^{iv} somministri di nuovo la t' restando come si trovano le altre t^{v}, t^{vi}, ..., $t^{(\alpha)}$, perchè prive delle x', x'', x'''; *oppure nel mentre che alcune delle* t', t'', t''', ..., $t^{(\alpha)}$ *si cambiano fra loro, da una o da più delle altre che rimangono, produconsi dei risultati dai loro diversi;* come nella ipotesi che, cambiatasi la t' nella t'', la t'' nella t''', la t''' produca il nuovo risultato $t^{(\alpha+1)}$, la t^{iv} produca l'altro $t^{(\alpha+2)}$, e le altre t^{v}, t^{vi}, ..., $t^{(\alpha)}$ o si cambino fra di loro, o, non contenendo le x', x'', x''', si mantengano nel loro stato.

Nella seconda di queste due supposizioni la $f(t', t'', t''', \ldots, t^{(\alpha)})$ divenendo

$$f(t'', t''', t^{(\alpha+1)}, t^{(\alpha+2)}, t^{v}, \ldots, t^{(\alpha)})$$

produrrà un altro valore della T; ma quest'altro valore pel n° precedente non può essere $= T'$. Dunque in questa seconda supposizione la permutazione supposta non producendo un risultato uguale al primo, uscirà dalla nostra considerazione. Nella ipotesi prima poi la $f(t', t'', t''', \ldots, t^{(\alpha)})$ è tale che rimane la medesima ancorchè le quantità t', t'', t''', ..., $t^{(\alpha)}$, le quali per la supposta permutazione cambiansi reciprocamente fra loro, avessero un valore qualunque [2°) n° 3 della Teoria delle equazioni]; ma questo è chiaro che non può succedere, se non nel caso che la permutazione riguardi la forma della funzione. Dunque, etc.

Sia per esempio

$$t = x' + a x''^{2} + b x'''^{3} + c(x^{iv\,2} + x^{v\,2}) + d x^{vi\,4} = K,$$

e sia questa funzione tale che facendo la permutazione semplice fra le x', x'', x''', risulti

$$x' + a x''^{2} + b x'''^{3} + c(x^{iv\,2} + x^{v\,2}) + d x^{vi\,4} = K,$$
$$x'' + a x'''^{2} + b x'^{3} + c(x^{iv\,2} + x^{v\,2}) + d x^{vi\,4} = K,$$

e permutando fra loro le x^{iv}, x^{vi}, dal primo di questi due risultati, si abbia

$$x' + a x''^{2} + b x'''^{3} + c(x^{vi\,2} + x^{v\,2}) + d x^{iv\,4} = K,$$

dal secondo

$$x'' + a x'''^{2} + b x'^{3} + c(x^{vi\,2} + x^{v\,2}) + d x^{iv\,4} = K.$$

In conseguenza di ciò, espressi con le t', t'', t''', t^{iv} simili risultati, avremo

$$T' = t' + t'' + t''' + t^{iv} = 2(x' + x'') + 2a(x''^{2} + x'''^{2})$$
$$+ 2b(x'^{3} + x'''^{3}) + 4c x^{v\,2} + 2c(x^{iv\,2} + x^{vi\,2}) + 2d(x^{iv\,4} + x^{vi\,4}) = 4K,$$

e questa funzione vedesi che, mentre non mantiene il valore $4K$ alla permutazione

Digitized by Google

semplice delle x', x'', x''' fra di loro, lo conserva poi alla permutazione fra le x^{IV}, x^{VI} e lo conserva dipendentemente dalla forma della funzione.

22. Pertanto la T' determinata giusta i n^i precedenti goderà delle proprietà:

1° *Di non conservare il proprio valore per alcun'altra permutazione tra le* x', x'', x''', ..., *che sia diversa dalle permutazioni, per cui mantiene il proprio la* t'.

2° *Che le permutazioni, sotto delle quali la* T' *non si cambia, ponno essere in numero minore di quelle, per cui non si cambia la* t': così nell'esempio precedente la funzione supposta conserva il proprio valore K per tre permutazioni, la prima fra le x', x'', x''', la seconda fra le x^{IV}, x^{V}, la terza fra le x^{IV}, x^{VI}; la funzione T' ottenuta non si conserva $= 4K$ che per la permutazione sola fra le x^{IV}, x^{VI}; permutazione, come vedesi, per cui si mantiene dello stesso valore ancora la supposta funzione.

3° *Che le permutazioni tutte, per cui la* T' *non cambia valore, possono considerarsi, e sono, riguardanti la forma della funzione;* il che non succede nella t'.

4° *Che il numero dei risultati fra loro uguali nella* T' *può essere minore, ma non sarà mai maggiore del numero dei risultati fra loro uguali della* t. Nel precedente esempio i risultati fra loro uguali della T' sono due, quei della t' sono otto.

5° Che, per conseguenza, *volendosi il valore di una funzione* $y = \varphi(x')(x'')(x''')\ldots$ *dipendentemente dalla* t', *oppure dalla* T', *riescirà molto più semplice il cercarlo da quest'ultima funzione, che non dalla prima; e, se cercandosi questa y dalla* T' *si trovasse indeterminabile, perchè la* T' *ci conducesse ad un'equazione di grado necessariamente non* $< m$; *molto più si troverà indeterminabile la y, mentre se ne cerchi il valore dalla* t'.

PARTE SECONDA.

23. Torniamo alla

$$(B) \qquad f(x')(x'')(x''')\ldots(x^{(\lambda-1)})(x^{(\lambda)}) = K;$$

e, *ritenute le supposizioni che la*

$$(A) \qquad x^m + Ax^{m-1} + Bx^{m-2} + \cdots + V = 0$$

sia equazione semplice, e che la K *sia quantità razionale* (n^i 2, 4), *nei risultati che, nascendo dalla* (B) *per le permutazioni secondarie replicate quanto si può, conservano il valor* K, *io dico:*

1° *Che tutte si dovranno contenere successivamente le radici* x', x'', x''', ..., $x^{(m)}$,

2° *Che tutte queste radici vi dovranno essere ripetute un egual numero di volte.*

1° Supponiamo, per maggiore chiarezza, che i supposti risultati secondarii della (B) siano i seguenti

$$(IV) \qquad \begin{cases} f(x')(x'')(x''')\ldots(x^{(\lambda)}) = f(x''')(x^{IV})(x^{V})\ldots(x^{(2\lambda+2)}) \\ \quad = f(x^{(\lambda+3)})(x^{(\lambda+4)})(x^{(\lambda+5)})\ldots(x^{(2\lambda+2)}) = \cdots = K, \end{cases}$$

Digitized by Google

e supponiamo, se è possibile, che da essi restino escluse le radici

$$x^{(m)},\quad x^{(m-1)},\ \ldots,\ x^{(m-\mu)}.$$

Ciò posto, faccio il prodotto

$$x'\,x''\,x'''\,\ldots\,x^{(\lambda)},$$

lo chiamo u, e ne cerco dalla (B) il valore: restando questo sempre lo stesso a tutte le permutazioni fra le x', x'', x''', ..., $x^{(\lambda)}$, resterà il medesimo a tutte le permutazioni primitive della (B), e però la u avrà un solo valore corrispondente al primo dei risultati (IV), uno corrispondente al secondo, uno al terzo, e così di seguito. Dunque se tali risultati son di numero n, la u dipenderà da un'equazione

$$u^n + g\,u^{n-1} + \cdots = 0, \tag{V}$$

nella quale i coefficienti g, ... essendo funzioni razionali della K (n^i 13, 16) sono quantità commensurabili, e le radici non sono che i prodotti

$$u'=x'x''x'''\ldots x^{(\lambda)},\quad u''=x'''x^{IV}x^{V}\ldots x^{(\lambda+2)},\quad u'''=(x^{(\lambda+3)})(x^{(\lambda+4)})(x^{(\lambda+5)})\ldots(x^{(2\lambda+2)}),\ldots$$

Pongasi ora l'equazione

$$x^\lambda + t\,x^{\lambda-1} + \tau\,x^{\lambda-2} + \cdots \pm u = 0.$$

Poichè i coefficienti t, τ, ... sono funzioni simili della u, chiaminsi t', τ', ... i valori di questi che corrispondono ad u', chiaminsi t'', τ'', ... i corrispondenti ad u'', etc., si sostituiscano essi nel primo membro della equazione supposta, si moltiplichino insieme gli n risultati

$$x^\lambda + t'\,x^{\lambda-1} + \tau'\,x^{\lambda-2} + \cdots \pm u',\quad x^\lambda + t''\,x^{\lambda-1} + \tau''\,x^{\lambda-2} + \cdots \pm u'',\quad \ldots, \tag{VI}$$

che quindi provengono, se ne uguagli allo zero il prodotto, e supposto essere

$$x^{\lambda n} + P\,x^{\lambda n-1} + Q\,x^{\lambda n-2} + \cdots = 0 \tag{VII}$$

l'equazione che ne nasce, i coefficienti P, Q, ... di questa essendo funzioni razionali dei coefficienti della (V), saranno essi pure razionali.

Il primo dei risultati (VI), tutte contenendo evidentemente le radici che esistono in u', sarà $=(x-x')(x-x'')(x-x''')\ldots(x-x^{(\lambda)})$; il secondo, tutte contenendo le radici esistenti in u'', sarà $=(x-x''')(x-x^{IV})(x-x^{V})\ldots(x-x^{(\lambda+2)})$; etc., ma le radici esistenti in tutti i valori u', u'', u''', ... sono precisamente le radici esistenti nei risultati (IV); dunque, volendosi da questi (IV), e però dai valori u', u'', u''', ... escluse le radici $x^{(m)}$, $x^{(m-1)}$, ..., $x^{(m-\mu)}$, simili radici rimarranno escluse eziandio dai risultati (VI), e per conseguenxa l'equazione (VII) conterrà tutte le radici della data (A), a riserva di queste ultime $\mu+1$.

Ora cerchiamo il massimo comune divisore tra i primi membri delle due equazioni (A), (VII): dovendo tale comune divisore, per quanto abbiamo ora detto, tutte e solamente contenere le radici

$$x',\quad x'',\ \ldots,\ x^{(m-\mu-1)},$$

una o più volte ripetute, avrà un fattore, o sarà esso medesimo della forma

$$x^{m-\mu-1} + R\,x^{m-\mu-2} + \cdots;$$

Digitized by Google

ma, essendo amendue le equazioni (*A*), (VII) razionali, anche questo fattore è razionale. Dunque, se fosse possibile che nei risultati (IV) non si contenessero tutte le

$$x', \quad x'', \quad x''', \ldots, x^{(m)},$$

la (*A*) avrebbe un fattore commensurabile, e per conseguenza non sarebbe più un'equazione semplice, il che è contro la supposizione.

2° Vogliasi che nei risultati (IV) le

$$x', \quad x'', \quad x''', \ldots, x^{(m)}$$

si contengano un numero disuguale di volte, e suppongasi perciò che le

$$x', \quad x'', \quad x''', \ldots, x^{(\mu)}$$

vi restino comprese un numero di volte a, le altre

$$x^{(\mu+1)}, \quad x^{(\mu+2)}, \ldots, x^{(m)}$$

un numero diverso. Dovendo le radici esistenti nei risultati (IV) esistere tutte, per quanto abbiamo ora detto, e replicate lo stesso numero di volte nelle quantità u', u'', u''', ... e quindi nei risultati (VI) e nella equazione (VII), ne segue che questa (VII), per le proprietà delle radici uguali, dovrà avere un fattore

$$(x - x')(x - x'')(x - x''') \ldots (x - x^{(\mu)})$$

razionale, ma esso è fattore eziandio della (*A*). Dunque ancora nella presente ipotesi la (*A*) avrebbe un fattore commensurabile contro la supposizione. Dunque, etc.

24. Quindi si deduce

1° *che il numero* λ *delle radici esistenti in ciascuno dei risultati secondarii moltiplicato pel numero n dei risultati medesimi, cioè il prodotto* λn, *è sempre uguale, o multiplo dell'esponente m*; onde rappresentando con a un numero intero positivo, in generale avremo $\lambda n = am$.

2° Il precedente Teorema si verifica ancora sulla equazione di relazione

$$(E) \qquad F(x')(x'') \ldots (x^{(n-1)})(x^{(n)}) = H$$

dedotta dalla (*B*) giusta i n^{i} 6, 8. Dunque, espresso con la lettera q il numero dei risultati secondarii, che provenienti dalla (*E*) sono $= H$, e rappresentato con la b un numero intero e positivo, avremo qui pure $\pi q = bm$.

3° Dalle due equazioni $\lambda n = am$, $\pi q = bm$, otterremo $b\lambda n = a\pi q$.

4° Come nei risultati (IV), così nei prodotti u', u'', u''', ..., e nei risultati (VI), e nella equazione (VII) tutte esisteranno le radici x', x'', x''', ..., $x^{(m)}$, e ripetute cadauna un egual numero di volte.

25. *Tutte eseguendo nella* (*B*) *le permutazioni, sì primitive che secondarie, per cui essa conserva il valore K, io dico che, nei risultati quindi ottenuti, entro ciascuno dei luoghi indicati dalle parentesi si conterranno successivamente tutte le radici* $x', x'', x''', \ldots, x^{(m)}$.

Se ciò si nega, supponiamo che in cadauno per esempio dei primi tre luoghi, cioè dei luoghi che nella (*B*) vengono occupati dalle x', x'', x''', non possa mai entrare la $x^{(\mu)}$. In tale ipotesi, sia nella (*E*), determinata giusta il n° 6, $\pi = 3$, e divenga

$$F(x')(x'')(x''') = H.$$

Digitized by Google

Pel n° 6 questa funzione mantiene il valore H solamente sotto quelle permutazioni per cui la (B) mantiene il valore K; ma, in niuno dei risultati della (B) uguali a K si vuole che la $x^{(\mu)}$ possa entrare nei primi tre luoghi; dunque la stessa $x^{(\mu)}$ non potrà entrare ad occupare alcuno dei luoghi medesimi neppure nei risultati che provengono dalla $F(x')(x'')(x''')$ e sono uguali ad H, ma gli accennati tre luoghi altro non sono, se non quei tutti che costituiscono la $F(x')(x'')(x''')$. Dunque, in niuno di essi potendo mai entrare la $x^{(\mu)}$, ne segue che questa radice resterà esclusa affatto da tutti gli esposti risultati della $F(x')(x'')(x''')$; ma ciò è contro il 2° n° precedente. Dunque, etc.

26. Facciamo nella (B)

$$f(x')(x'')(x''') \ldots (x^{(\lambda)}) = t,$$

onde sia $t = K$, chiaminsi, come nel n° 16, t', t'', t''', $\ldots$, $t^{(\alpha)}$ tutti i risultati che provengono dalla t, uguali a K in conseguenza delle permutazioni riguardanti il valore particolare delle radici, e si formi con queste una funzione

$$T' = f(t', t'', t''', \ldots, t^{(\alpha)})$$

dotata delle condizioni indicate nel n° 20. Ciò fatto

1° Avendosi

$$T' = t'^{\varkappa} + t''^{\varkappa} + t'''^{\varkappa} + \cdots + t^{(\alpha)\varkappa}$$

(n° 19), sarà $T' = \alpha K^{\varkappa}$, ossia, fatto $\alpha K^{\varkappa} = h$, avremo $T' = h$, essendo h quantità razionale.

2° Questa funzione T' sarà dotata di tutte le proprietà indicate nel n° 22.

3° Poichè le permutazioni secondarie non riguardano mai la forma della funzione (n° 13), ne viene che la T' pel 3°, n° 22, non resterà $= h$ per alcuna di simili permutazioni, e quindi non avrà essa che un solo risultato secondario.

4° Qualunque siasi il numero dei risultati secondarii di valore costante in una data equazione di relazione, mentre abbian luogo le ipotesi del n° 23, dovendosi sul loro aggregato tutte e sempre contenere le

$$x', \quad x'', \quad x''', \ldots, x^{(m)},$$

pel precedente 3° dovrà essere

$$T' = f(x')(x'')(x''') \ldots (x^{(m)}).$$

5° Verificandosi ancora nella $T' = h$ la proprietà del n° precedente, ne segue che, sotto le varie permutazioni per cui questa equazione si conserva in ciascuno dei luoghi accennati dalle parentesi, potranno entrare successivamente tutte le x', x'', x''', $\ldots$, $x^{(m)}$.

6° Da quanto abbiam detto si deduce

I. *Che la T' non può giammai esser tale che cambi di valore a qualunque permutazione.*

II. *Che nella permutazione intera per cui la T' si conserva $= h$ devono venir comprese tutte le*

$$x', \quad x'', \quad x''', \ldots, x^{(m)}.$$

Digitized by Google

III. *Che questa permutazione non può mai essere solamente o semplice del 2° genere, o composta del genere 1°* (n^i 257, 259 della Teoria delle equazioni); *poichè in tutti questi casi non tutti i luoghi della funzione accennati dalle parentesi potrebbero venire occupati da tutte le radici della* (A) [38].

Prendiamo ad esempio la funzione

$$x'x'' + x'''x^{IV}$$

supposta nel n° 9, e facciamo

$$x'x'' + x'''x^{IV} = t', \qquad x^{V}x^{VI} + x^{VII}x^{VIII} = t'':$$

in questo caso vedesi che ζ deve essere >1; poichè se facessimo $\zeta = 1$ ne verrebbe

$$T' = t' + t'' = x'x'' + x'''x^{IV} + x^{V}x^{VI} + x^{VII}x^{VIII} = 2K,$$

funzione, la quale manterrebbe il valore $2K$ per delle permutazioni diverse da quelle per cui la $x'x'' + x'''x^{IV}$ si mantiene $= K$. Diasi adunque a ζ il valore 2, e risulterà

$$T' = t'^2 + t''^2 = (x'x'' + x'''x^{IV})^2 + (x^{V}x^{VI} + x^{VII}x^{VIII})^2 = 2K^2,$$

funzione, come vedesi, la quale non mantiene il proprio valore $2K^2$ per delle nuove permutazioni. In questa poi tutte si conterranno le 8 radici $x', x'', \ldots, x^{VIII}$, non avrà luogo alcun risultato secondario, eseguendo la permutazione per intero vedremo che ciascun luogo, per esempio il primo, verrà successivamente occupato da tutte le radici $x', x'', x''', \ldots, x^{VIII}$, e finalmente la permutazione intera riguarda tutte le 8 radici, e non è nè semplice del genere 2^{ν}, nè composta del 1°, ma composta del 2°.

27. [39] *Supponiamo che la* T' *conservi il proprio valore per una permutazione composta del 3° genere* (n° 259 della Teoria delle equazioni), *che due siano le permutazioni componenti semplici amendue del genere 1°, che fatto* $m = \alpha + \beta + \gamma$, *e*

(VIII) $T'=f(x')(x'')(x''')\ldots(x^{(\alpha)})(x^{(\alpha+1)})(x^{(\alpha+2)})\ldots(x^{(\alpha+\beta-1)})(x^{(\alpha+\beta)})(x^{(\alpha+\beta+1)})\ldots(x^{(\alpha+\beta+\gamma-1)})(x^{(\alpha+\beta+\gamma)})$,

la prima permutazione componente riguardi le prime $\alpha + \beta$ *radici, la seconda le ultime* $\beta + \gamma$, onde le β radici $x^{\alpha+1}, x^{(\alpha+2)}, \ldots, x^{(\alpha+\beta)}$ siano, pel n° 259 della Teoria delle equazioni, comuni ad amendue le permutazioni, *e che finalmente l'ultima di queste eseguiscasi, pel* n° 269 della Teoria delle equazioni, *portando la radice* $x^{(\alpha+1)}$ *nell'ultimo luogo, e avanzando tutte le altre alla sinistra nello stato in cui si trovano,* cosicchè si abbia

$$T'=f(x')(x'')(x''')\ldots(x^{(\alpha)})(x^{(\alpha+2)})\ldots(x^{(\alpha+\beta-1)})(x^{(\alpha+\beta)})(x^{(\alpha+\beta+1)})\ldots(x^{(\alpha+\beta+\gamma)})(x^{(\alpha+1)}).$$

Ciò supposto, io dico che: *col mezzo delle due permutazioni accennate potremo sempre far passare ed esistere contemporaneamente negli ultimi* γ *luoghi appartenenti alla seconda permutazione un numero* γ *delle radici* $x', x'', x''', \ldots, x^{(m)}$, *qualunque esse siansi.*

Chiaminsi

$$x^{(\delta+1)}, \quad x^{(\delta+2)}, \quad x^{(\delta+3)}, \ldots, x^{(\delta+\gamma)}$$

le γ radici che si vogliono portare negli ultimi γ luoghi. Prendasi la prima $x^{(\delta+1)}$, ed esista essa tra le $\alpha + \beta$ radici della permutazione prima: poichè, per essere tale permutazione semplice del 1° genere, possiamo, replicando la medesima successivamente, condurre la $x^{(\delta+1)}$ in quello qualunque dei primi $\alpha+\beta$ luoghi che a noi più piace (n° 262 della Teoria delle equazioni); conduciamola nel luogo $\alpha + 1^{esimo}$, ove cioè nel risultato

Digitized by Google

(VIII) esiste la $x^{(\alpha+1)}$, e ciò fatto si eseguisca la permutazione seconda; per essa ne verrà un risultato, che dirò T'_1 il quale sarà $= T'$, e conterrà evidentemente la $x^{(\delta+1)}$ nell'ultimo luogo. Esista nel risultato T'_1 la $x^{(\delta+2)}$ tra le prime $\alpha+\beta$ radici; replico in esso, come di sopra, la prima permutazione, finchè questa $x^{(\delta+2)}$ giunga al luogo $\alpha+1^{esimo}$, e allora replico la permutazione seconda; ne nascerà un risultato $T'_2 = T'_1 = T'$, il quale è chiaro, che conterrà la $x^{(\delta+2)}$ nel luogo ultimo, e la $x^{(\delta+1)}$ nel penultimo. Farò l'operazione medesima riguardo alla $x^{(\delta+3)}$, se questa pure esiste in T'_2 tra le prime $\alpha+\beta$ radici, e ci verrà egualmente un risultato T'_3 avente nell'ultimo luogo la $x^{(\delta+3)}$, nel penultimo la $x^{(\delta+2)}$, e nell'antepenultimo la $x^{(\delta+1)}$. Seguitando ad operare nella stessa guisa, se nei primi $\alpha+\beta$ luoghi dei successivi risultati T'_3, T'_4, ..., $T'_{\gamma-\varepsilon-1}$ vanno esistendo le radici $x^{(\delta+4)}$, $x^{(\delta+5)}$, ..., $x^{(\delta+\gamma-\varepsilon)}$ vedesi che otterremo in fine un risultato $T'_{\gamma-\varepsilon}$, il quale conterrà negli ultimi $\gamma-\varepsilon$ luoghi le radici $x^{(\delta+1)}$, $x^{(\delta+2)}$, ..., $x^{(\delta+\gamma-\varepsilon)}$.

Supponiamo ora che in $T'_{\gamma-\varepsilon}$ esista la $x^{(\delta+\gamma-\varepsilon+1)}$ tra le ultime γ radici della permutazione seconda; in questa ipotesi replico tale seconda permutazione, finchè la $x^{(\delta+\gamma-\varepsilon+1)}$ venga ad occupare il luogo indicato dal numero $\alpha+\beta$; allora mediante la permutazione prima porto la radice medesima fuori di questo in uno qualsivoglia dei luoghi 1°, 2°, ..., α^{esimo}, e chiamo $T'_{\gamma-\varepsilon+1}$ il risultato che ne deriva. Poichè nel portare la $x^{(\delta+\gamma-\varepsilon+1)}$ nel luogo $\alpha+\beta^{esimo}$, la permutazione seconda ha portate negli ultimi luoghi delle radici diverse dalle $x^{(\delta+1)}$, $x^{(\delta+2)}$, ..., $x^{(\delta+\gamma-\varepsilon)}$, ripeto nella funzione $T'_{\gamma-\varepsilon+1}$ la permutazione medesima, finchè tutte queste radici escano dai luoghi ultimi, e vi tornino le $x^{(\delta+1)}$, $x^{(\delta+2)}$, ..., $x^{(\delta+\gamma-\varepsilon)}$, il che è manifesto che potrà sempre farsi. Ciò ottenuto, e chiamato $T''_{\gamma-\varepsilon+1}$ il risultato, avremo in questo la $x^{(\delta+\gamma-\varepsilon+1)}$ tra le prime $\alpha+\beta$ radici; dunque potrò toglierla, e condurla nell'ultimo luogo, come ho fatto di sopra delle altre $x^{(\delta+1)}$, $x^{(\delta+2)}$, ..., $x^{(\delta+\gamma-\varepsilon)}$; il risultato che ne viene, chiamato $T'''_{\gamma-\varepsilon+1}$, o contiene la $x^{(\delta+\gamma-\varepsilon+2)}$ tra le radici della prima, o tra quelle della seconda permutazione; se esiste tra le ultime γ di quest'ultima, operando rapporto ad essa come ho fatto riguardo alla $x^{(\delta+\gamma-\varepsilon+1)}$, la porto tra le prime α radici della permutazione prima, e trovato in seguito un risultato, nel quale siano tornate agli ultimi luoghi tutte le $x^{(\delta+1)}$, $x^{(\delta+2)}$, ..., $x^{(\delta+\gamma-\varepsilon+1)}$, operando su questo nella solita maniera, faccio passare la $x^{(\delta+\gamma-\varepsilon+2)}$ nel luogo ultimo della funzione. Ora lo stesso si può praticare riguardo a tutte le altre radici $x^{(\delta+\gamma-\varepsilon+3)}$, $x^{(\delta+\gamma-\varepsilon+4)}$, ..., $x^{(\delta+\gamma)}$; dunque avremo in fine un risultato T_γ, il quale sarà $= T'$, e il quale negli ultimi γ luoghi tutte conterrà le radici $x^{(\delta+1)}$, $x^{(\delta+2)}$, ..., $x^{(\delta+\gamma)}$. Dunque, etc.

Per maggiore facilità ho supposto che la seconda permutazione si eseguisca portando la radice $x^{(\alpha+1)}$ nel luogo ultimo, e portando le altre tutte come si trovano verso la sinistra; il Teorema però ha luogo ancora che la permutazione seconda si eseguisca diversamente, e la dimostrazione ne è la medesima.

Sia per esempio $m = 9$, $\alpha = 2$, $\beta = 3$, $\gamma = 4$,

$$T' = f(x')(x''),\ (x''')(x^{IV})(x^{V}),\ (x^{VI})(x^{VII})(x^{VIII})(x^{IX});$$

Digitized by Google

per la prima permutazione componente sia

$$T' = f(x^{v})(x'),\ (x'')(x''')(x^{iv}),\ (x^{vi})(x^{vii})(x^{viii})(x^{ix})$$

e per la seconda

$$T' = f(x')(x''),\ (x^{iv})(x^{v})(x^{vi}),\ (x^{vii})(x^{viii})(x^{ix})(x'''),$$

e vogliansi negli ultimi quattro luoghi della seconda permutazione portare le quattro radici x', x^{vi}, x^{viii}, x''. Esistendo la x' tra le radici della prima permutazione, ed avendosi nel nostro esempio $2 + 1 = 2 + 1 = 3$ porto nella terza classe, ossia luogo, questa radice, ed al risultato che ne viene

$$f(x^{iv})(x^{v}),\ (x')(x'')(x'''),\ (x^{vi})(x^{vii})(x^{viii})(x^{ix}),$$

applico la permutazione seconda, otterremo così

$$T'_1 = f(x^{iv})(x^{v}),\ (x'')(x''')(x^{vi}),\ (x^{vii})(x^{viii})(x^{ix})(x').$$

In T'_1 la x^{vi} esiste tra le radici della permutazione prima, la porto adunque col mezzo di questa nel terzo luogo, faccio sul risultato

$$f(x'')(x'''),\ (x^{vi})(x^{iv})(x^{v}),\ (x^{vii})(x^{viii})(x^{ix})(x')$$

la seconda permutazione, e ci verrà

$$T'_2 = f(x'')(x'''),\ (x^{iv})(x^{v})(x^{vii}),\ (x^{viii})(x^{ix})(x')(x^{vi}).$$

La x^{viii} in T'_2 è posta tra le ultime quattro radici, ma non opportunamente; mediante adunque la permutazione seconda trasporto la x^{viii} nella quinta classe: nel risultato che ne deriva

$$f(x'')(x'''),\ (x^{v})(x^{vii})(x^{viii}),\ (x^{ix})(x')(x^{vi})(x^{iv})$$

faccio passare tale radice in uno dei primi due luoghi, quindi nel risultato

$$T'_3 = f(x^{vii})(x^{viii}),\ (x'')(x''')(x^{v}),\ (x^{ix})(x')(x^{vi})(x^{iv})$$

tolgo dall'ultimo luogo la x^{iv}, onde avere

$$T''_3 = f(x^{vii})(x^{viii}),\ (x^{iv})(x'')(x'''),\ (x^{v})(x^{ix})(x')(x^{vi}),$$

e condotta in T''_3 la x^{viii} nella terza classe, rinnovo la permutazione seconda: avremo in tal modo

$$T'''_3 = f(x''')(x^{vii}),\ (x^{iv})(x'')(x^{v}),\ (x^{ix})(x')(x^{vi})(x^{viii}).$$

Finalmente la x'' essendo tra le cinque radici della prima permutazione, eseguisco sopra T'''_3 le prime operazioni, e pel risultato richiesto otterremo

$$T'_4 = f(x^{vii})(x^{iv}),\ (x^{v})(x''')(x^{ix}),\ (x')(x^{vi})(x^{viii})(x''),$$

ove infatti si vede che negli ultimi quattro luoghi sono state portate, ed esistono contemporaneamente le quattro radici x', x^{vi}, x^{viii}, x''.

28. Sia

$$m = \alpha + \beta + \gamma + \delta + \varepsilon,$$

e sia

$$\text{(IX)}\quad \begin{cases} T' = f(x')(x'')(x''')\ldots(x^{(\alpha)}),\ (x^{(\alpha+1)})\ldots(x^{(\alpha+\beta)}), \\ (x^{(\alpha+\beta+1)})\ldots(x^{(\alpha+\beta+\gamma)}),\quad (x^{(\alpha+\beta+\gamma+1)})\ldots(x^{(\alpha+\beta+\gamma+\delta)}),\quad (x^{(\alpha+\beta+\gamma+\delta+1)})\ldots(x^{(\alpha+\beta+\gamma+\delta+\varepsilon)}). \end{cases}$$

Digitized by Google

Se la T' mantiene il proprio valore per una permutazione composta del 3° genere, dove tre siano le componenti, semplici tutte e tre del 1° genere, la prima tra le prime $\alpha+\varsigma$ radici, la seconda tra le $\beta+\gamma+\delta$ radici

$$x^{(\alpha+1)},\quad x^{(\alpha+2)},\ \ldots,\ x^{(\alpha+\beta+\gamma+\delta)},$$

e la terza fra le $\delta+\varepsilon$ radici

$$x^{(\alpha+\beta+\gamma+1)},\quad x^{(\alpha+\beta+\gamma+2)},\ \ldots,\ x^{(\alpha+\beta+\gamma+\delta+\varepsilon)};$$

applicando a questo caso il precedente discorso, vedremo che: *col mezzo delle supposte permutazioni potrò far venire negli ultimi $\gamma+\delta$ luoghi della permutazione seconda un numero $\gamma+\delta$ delle m radici x', x'', x''', ..., $x^{(m)}$, qualunque esse siansi, che potrò farne passare un numero $\gamma+\delta+\varepsilon$ negli ultimi $\gamma+\delta+\varepsilon$ luoghi delle due permutazioni seconda e terza, ed un numero ε negli ultimi ε luoghi dell'ultima permutazione.* Difatti che possiamo far venire negli ultimi $\gamma+\delta$ luoghi della permutazione seconda un numero $\gamma+\delta$ delle prime radici x', x'', ..., $x^{(\alpha+\beta+\gamma+\delta)}$, questo il sappiamo dal Teorema precedente: che poi si possano far entrare nei $\gamma+\delta$ luoghi medesimi $\gamma+\delta$ delle radici ulteriori $x^{(\alpha+\beta+\gamma+\delta+1)}$, $x^{(\alpha+\beta+\gamma+\delta+2)}$, ..., $x^{(\alpha+\beta+\gamma+\delta+\varepsilon)}$, ciò apparisce dal riflettere che queste radici possonsi condurre mediante le ultime due permutazioni dalle classi dell'ultima nelle classi della penultima, e in seguito col mezzo delle permutazioni prima e seconda dalle classi di questa alle classi della prima. Anzi questa riflessione medesima quella si è, che unita al precedente Teorema ci fa conoscere la verità di quanto abbiamo ora asserito in tutta la sua estensione.

Lo stesso si dice se le permutazioni componenti siano quattro, cinque, etc.

29. *Vogliasi, dipendentemente dalla $T'=h$, il valore della radice x'.*

1° Potendo la T' conservare il valore h per delle permutazioni diverse, tutte però primitive, appartenenti a tutte le m radici x', x'', x''', ..., $x^{(m)}$, e riguardanti la forma della funzione (2°, 3°, 4°, 5°, n° 26); cominciamo dal supporre che *la permutazione, per cui si mantiene un tal valore h, sia semplice del 1° genere,* cosicchè si abbia, pel n° 269 della Teoria delle equazioni,

$$T'=f(x')(x'')(x''')\ldots(x^{(m-1)})(x^{(m)})$$
$$=f(x'')(x''')(x^{\mathrm{IV}})\ldots(x^{(m)})(x')=f(x''')(x^{\mathrm{IV}})(x^{\mathrm{V}})\ldots(x')(x'')=\cdots=h.$$

Per la natura delle permutazioni semplici del 1° genere, il luogo nella T' occupato dalla x' viene nei successivi risultati occupato da cadauna delle x'', x''', ..., $x^{(m)}$ una sola volta (n° 262 della Teoria delle equazioni, 5°, n° 26). Ora abbiamo

$$x'=x'+o(x''x'''\ldots x^{(m-1)}x^{(m)}),$$

e i valori di questa funzione corrispondenti ai risultati della T' sono i seguenti

$$x'+o(x''x'''\ldots x^{(m-1)}x^{(m)})=x',\qquad x''+o(x'''x^{\mathrm{IV}}\ldots x^{(m)}x')=x'',$$
$$x'''+o(x^{\mathrm{IV}}x^{\mathrm{V}}\ldots x'x'')=x''',\qquad \ldots.$$

Dunque non potendo questi tutti, per la supposta uguaglianza fra i risultati della T', che dipendere in egual modo dalla $T'=h$; ne segue che essi medesimi, e però le m

Digitized by Google

radici

$$x', \quad x'', \quad x''', \ \ldots, \ x^{(m)}$$

dovranno dipendentemente dall'accennata $T' = h$ restar collegate tutte insieme in una sola equazione di grado m; e questa si vede, altro non essere che la data (A). Dunque questa prima supposizione non potrà da sè sola servire alla richiesta determinazione della x'.

Pel 1°, n° 10 lo stesso pienamente si dice e si ottiene, se abbiasi

$$T' = f(x', x'', x''', \ldots, x^{(m)}) = h.$$

2° I. Poichè la permutazione per cui la T' conserva il valore h non può essere nè semplice del 2° genere, nè composta del 1° (6°, n° 26); *supponiamola composta del genere* 2°, e fatto per maggiore chiarezza $m = 12$ sia per esempio

$$T' = [f(x')(x'')(x''')]^2 + [f(x^{iv})(x^{v})(x^{vi})]^2 + [f(x^{vii})(x^{viii})(x^{ix})]^2 + [f(x^{x})(x^{xi})(x^{xii})]^2 = h,$$

supponendo che ciascuna delle funzioni componenti conservi il proprio valore per una medesima permutazione semplice del 1° genere fra le tre radici che vi si contengono.

Fra le radici della $[f(x')(x'')(x''')]^2$ esiste la x', e questa funzione per la ipotesi mantiene il proprio valore per una permutazione semplice del genere 1°: dunque, cercando dalla $T' = h$ il valore di essa x', vedremo, come nel 1° precedente, che si dovrà in conseguenza della funzione $[f(x')(x'')(x''')]^2$ necessariamente cadere in un'equazione di grado 3°, che supporrò essere la

$$x^3 + tx^2 + zx + u = 0;$$

equazione nella quale l'ultimo coefficiente u essendo

$$= -x'x''x''' = -(x'x''x''' + 0x^{iv}x^{v}x^{vi} + 0x^{vii}x^{viii}x^{ix} + 0x^{x}x^{xi}x^{xii}),$$

non cambierà di valore per la permutazione che riguarda cadauna delle funzioni componenti considerata da sè. Ora eseguendo nella T' e nella u la permutazione per cui una delle funzioni componenti si cambia nell'altra, mentre che la T' conserva sempre il proprio valore, la u acquista i quattro valori fra loro diversi

$$u' = -x'x''x''', \quad u'' = -x^{iv}x^{v}x^{vi}, \quad u''' = -x^{vii}x^{viii}x^{ix}, \quad u^{iv} = -x^{x}x^{xi}x^{xii}.$$

Dunque la u dipenderà da un'equazione $u^4 + au^3 + bu^2 + cu + d = 0$, in cui ciascun coefficiente essendo $= f(u', u'', u''', u^{iv})$, avrà un solo valore dipendentemente dalla supposta $T' = h$, e però sarà da lei determinabile per un'equazione di primo grado.

II. Vogliasi che la T' si mantenga $= h$ per una permutazione composta del 2° genere, e in essa la prima permutazione componente sia semplice del genere 2°, o composta del 1°, come nella ipotesi che, essendo $m = 8$, la $T' = h$ divenga riguardo alla permutazione semplice del 2° genere

$$\left(\frac{x'x''^2}{x^{iv}} + \frac{x^{iv}x'''^2}{x'}\right)\left(\frac{x^{v}x^{vi\,2}}{x^{viii}} + \frac{x^{viii}x^{vii\,2}}{x^{v}}\right) = h.$$

Digitized by Google

In questo caso conservando la

$$\frac{x'\,x''^{\,2}}{x^{IV}} + \frac{x^{IV}\,x'''^{\,2}}{x'}$$

il proprio valore solamente per la permutazione simultanea della x' nella x^{IV} e della x'' nella x''', ne segue che il luogo occupato dalla x' non può venire occupato nè dalla x'', nè dalla x'''; ma ciò è contro del 6°, n° 26; e quello che abbiamo ora detto della permutazione semplice del 2° genere, dicesi egualmente della composta del 1°. Dunque la supposizione fatta non potrà aver luogo nella nostra T'.

III. Sia la prima permutazione componente essa pure composta del genere 2°, e sia per esempio

$$T' = (x'\,x'' + x'''\,x^{IV} + x^{V}\,x^{VI})^3 + (x^{VII}\,x^{VIII} + x^{IX}\,x^{X} + x^{XI}\,x^{XII})^3 = h.$$

Da quanto abbiamo detto vedesi facilmente che la x' verrà a dipendere da un'equazione

$$x^2 + p\,x + q = 0,$$

in cui il coefficiente q potendo avere i valori

$$x'\,x'', \quad x'''\,x^{IV}, \quad x^{V}\,x^{VI},$$

sarà radice di un'altra

$$q^3 + t\,q^2 + \tau\,q + u = 0,$$

il coefficiente u della quale dipenderà da una terza

$$u^2 + a\,u + b = 0,$$

determinabile razionalmente dalla $T' = h$, e avente per radici le

$$u' = x'\,x''\,x'''\,x^{IV}\,x^{V}\,x^{VI}, \qquad u'' = x^{VII}\,x^{VIII}\,x^{IX}\,x^{X}\,x^{XI}\,x^{XII}.$$

IV. Supponiamo in generale pel 3° n° 3 della Teoria delle equazioni

$$(F)\quad \begin{cases} T' = f[f(x')(x'')(x''') \dots (x^{(\mu)})],\ [f(x^{(\mu+1)})(x^{(\mu+2)})(x^{(\mu+3)}) \dots (x^{(2\mu)})], \\ \qquad [f(x^{(2\mu+1)})(x^{(2\mu+2)})(x^{(2\mu+3)}) \dots (x^{(3\mu)})],\ \dots = h, \end{cases}$$

e sia

$$f(x')(x'')(x''') \dots (x^{(\mu)}) = f[f(x')(x'') \dots (x^{(\alpha)})],$$
$$[f(x^{(\alpha+1)})(x^{(\alpha+2)}) \dots (x^{(2\alpha)})],\ [f(x^{(2\alpha+1)})(x^{(2\alpha+2)}) \dots (x^{(3\alpha)})],\ \dots,$$
$$f(x')(x'') \dots (x^{(\alpha)}) = f[f(x') \dots (x^{(\beta)})],\ [f(x^{(\beta+1)}) \dots (x^{(2\beta)})],\ [f(x^{(2\beta+1)}) \dots (x^{(3\beta)})],\ \dots.$$

In conseguenza di quest'ultima riga, cercando dalla $T' = h$ il valore x', formerò l'equazione

$$x^{\beta} + g\,x^{\beta-1} + \dots + l = 0.$$

Essendo $l = \pm\, x' \dots x^{(\beta)}$, questo coefficiente avrà tanti valori, quante sono le

$$f(x') \dots (x^{(\beta)}), \qquad f(x^{(\beta+1)}) \dots (x^{(2\beta)}), \qquad \dots;$$

supposto adunque essere queste funzioni di numero π, la quantità l avrà π valori, e sarà quindi radice di un'equazione

$$l^{\pi} + p\,l^{\pi-1} + \dots + q = 0:$$

il coefficiente

$$q = \pm\, l'\,l'' \dots l^{(\pi)}$$

Digitized by Google

avrà evidentemente tanti valori, quante sono le

$$f(x')(x'') \ldots (x^{(\alpha)}), \ldots$$

della seconda riga. Dunque se ν ci esprime il numero di somiglianti funzioni, la q dipenderà da un'equazione

$$q^{\nu} + tq^{\nu-1} + \cdots + u = 0,$$

il coefficiente u della quale sarà radice di un'altra avente un tanto grado, che chiamerò n, quante sono le funzioni componenti nella prima riga, cioè dell'equazione

$$u^n + au^{n-1} + bu^{n-2} + \cdots = 0;$$

quest'ultima poi sarà determinabile razionalmente dalla $T' = h$.

Ottenuta così l'equazione in u razionale, la risolvo; dal valore u' determino i valori corrispondenti dei coefficienti $t, \ldots$, che appartengono all'equazione penultima, cioè alla

$$q^{\nu} + tq^{\nu-1} + \cdots + u = 0,$$

sostituisco questi già determinati in essa equazione, la sciolgo, e dal valore q' trovo il valore di tutti i coefficienti dell'equazione antepenultima, cioè della equazione in l, sostituisco questi pure, sciolgo tale equazione, e dal valore l' determinati i coefficienti $g', \ldots$, la soluzione finalmente della

$$x^{\beta} + g'x^{\beta-1} + \cdots + l' = 0$$

ci darà il domandato valore della x'.

Se il numero delle precedenti righe è diverso dal tre, con metodo uguale potremo sempre giungere ad avere il valore della x'.

V. Che, se la

$$f(x')(x'')(x''') \ldots (x^{(\mu)})$$

conserva il proprio valore per una permutazione qualunque diversa dalla composta del 2° genere, allora supporrò l'equazione

$$x^{\mu} + tx^{\mu-1} + \cdots + u = 0,$$

ed il coefficiente u dipenderà da un'equazione razionale

$$u^n + au^{n-1} + bu^{n-2} + \cdots = 0.$$

La stessa supposizione e lo stesso metodo, vedesi che hanno luogo eziandio nel caso che la

$$f(x')(x'')(x''') \ldots (x^{(\mu)})$$

conservi il proprio valore per una permutazione composta del 2° genere; ma il metodo precedente ci dà il valore della x' con equazioni del minor grado possibile.

VI. Avvertasi che, *mentre la T' conserva il proprio valore per una permutazione composta del genere 2°, quelle radici, le quali entrano in una delle funzioni componenti, non possono entrare nelle altre.* Se la x', la quale nella (F) entra nella prima funzione componente

$$f(x')(x'')(x''') \ldots (x^{(\mu)}),$$

Digitized by Google

entrasse ancora nella seconda, cosicchè questa seconda fosse

$$f(x')(x^{(\mu+2)})(x^{(\mu+3)}) \ldots (x^{(2\mu)});$$

allora, contenendosi la x' in alcune o in tutte le permutazioni che riguardano la prima, e contenendosi in quelle che riguardano la seconda di tali funzioni; ne verrebbe che una delle radici, le quali appartengono ad una permutazione componente, entrerebbe ancora tra le radici di altre, e quindi la T' manterrebbe il proprio valore per una permutazione composta non più del 2°, ma del 3° genere (n° 259 della Teoria delle equazioni) contro la supposizione. In conseguenza di ciò la (F) ci esprimerà in generale la forma della T', allorchè questa funzione rimane $= h$ sotto una permutazione composta del genere 2°.

3° I. La nostra permutazione, per cui la T' conserva il valore h, *sia composta del genere* 3°, siano in primo luogo due sole le permutazioni componenti, semplici entrambe del 1° genere, e la prima di queste abbia luogo tra le prime $\alpha + \beta$ radici, la seconda tra le susseguenti $\beta + \gamma$ in modo che, supposto $m = \alpha + \beta + \gamma$ nel risultato (VIII), la prima permutazione riguardi, come nel n° 27, le radici

$$x' \quad x'', \quad x''', \ldots, x^{(\alpha)}, \quad x^{(\alpha+1)}, \quad x^{(\alpha+2)}, \ldots, x^{(\alpha+\beta)},$$

la seconda le

$$x^{(\alpha+1)}, \quad x^{(\alpha+2)}, \ldots, x^{(\alpha+\beta)}, \quad x^{(\alpha+\beta+1)}, \quad x^{(\alpha+\beta+2)}, \ldots, x^{(\alpha+\beta+\gamma)}.$$

Nella ricerca della x' dalla $T' = h$ vedesi che, come nel 1° e 2° precedente, la prima delle accennate permutazioni ci condurrà ad un'equazione

$$x^{\alpha+\beta} + n x^{\alpha+\beta-1} + \cdots + q = 0, \tag{X}$$

di cui saranno radici le

$$x', \quad x'', \quad x''', \ldots, x^{(\alpha)}, \quad x^{(\alpha+1)}, \ldots, x^{(\alpha+\beta)},$$

e di cui bisogna determinare i coefficienti. Preso perciò l'ultimo

$$q = \pm x' x'' x''' \ldots x^{(\alpha+\beta)},$$

io dico che, cercandone il valore dipendentemente dalla supposta $T' = h$, caderemo necessariamente in un'equazione di tanto grado, quante sono le combinazioni ad $\alpha + \beta$, ad $\alpha + \beta$ di tutte le m quantità

$$x', \quad x'', \quad x''', \ldots, x^{(m)},$$

cioè, supposto

$$\frac{m(m-1)(m-2)\ldots[m-(\alpha+\beta-1)]}{1.2.3.\ldots(\alpha+\beta)} = \rho,$$

in un'equazione

$$q^\rho + e q^{\rho-1} + \cdots + g = 0, \tag{XI}$$

le radici della quale saranno tutti i ρ prodotti

$$\pm x' x'' x''' \ldots x^{(\alpha+\beta)}, \qquad \pm x' x'' x''' \ldots x^{(\alpha+\beta+1)},$$
$$\pm x' x'' x''' \ldots x^{(\alpha+\beta+2)}, \ldots, \qquad \pm x^{(\varepsilon+1)} x^{(\varepsilon+2)} x^{(\varepsilon+3)} \ldots x^{(\varepsilon+\alpha+\beta)}.$$

Prendiamo di fatti uno qualsivoglia di questi prodotti, per es. l'ultimo, che può

Digitized by Google

dirsi generale, e osserviamo quali in esso mancano delle m radici

$$x', \quad x'', \quad x''', \ldots, x^{(m)};$$

veggo che vi mancano le

$$x', \quad x'', \quad x''', \ldots, x^{(\varepsilon)}, \quad x^{(\varepsilon+\alpha+\beta+1)}, \quad x^{(\varepsilon+\alpha+\beta+2)}, \ldots, x^{(m)},$$

e veggo che, a cagione di essere

$$q = \pm x' x'' x''' \ldots x^{(\alpha+\beta)},$$

e di essere $m = \alpha + \beta + \gamma$, le radici mancanti sono di numero γ. Ciò dunque essendo, trovo, giusta il n° 27, dalla T' un risultato T'_ω, il quale contenga le

$$x', \quad x'', \ldots, x^{(\varepsilon)}, \quad x^{(\varepsilon+\alpha+\beta+1)}, \quad x^{(\varepsilon+\alpha+\beta+2)}, \ldots, x^{(m)}$$

negli ultimi γ luoghi; esso conterrà nei primi $\alpha + \beta$ le radici

$$x^{(\varepsilon+1)}, \quad x^{(\varepsilon+2)}, \quad x^{(\varepsilon+3)}, \ldots, x^{(\varepsilon+\alpha+\beta)},$$

e pel citato n° 27 sarà identico con T'. Dunque il prodotto

$$\pm x^{(\varepsilon+1)} x^{(\varepsilon+2)} x^{(\varepsilon+3)} \ldots x^{(\varepsilon+\alpha+\beta)},$$

quello essendo tra i valori della q che dipende da T'_ω, dipenderà ancora in egual modo da T', e quindi sarà una radice della

$$q^\rho + e q^{\rho-1} + \cdots + g = 0.$$

Ora ciocchè si è detto di tal prodotto, dicesi egualmente di tutti gli altri che si possono fare con tutte le $x', x'', x''', \ldots, x^{(m)}$ prese ad $\alpha + \beta$ ad $\alpha + \beta$. Dunque, etc.

Pertanto sapendosi che l'esponente ρ della equazione in q non può giammai essere $< m$, concluderemo che la $T' = h$ nella supposizione ora fatta non potrà servirci mai da sè sola alla determinazione della x', qualunque valore si attribuisca ai numeri α, β, γ.

II. Siano tre le componenti della nostra permutazione composta del genere 3°, semplici tutte e tre del 1° genere, ed espressa la T' siccome in (IX), la prima di queste appartenga alle prime $\alpha + \beta$ radici, la seconda alle $\beta + \gamma + \delta$ radici di mezzo, e la terza alle ultime $\delta + \varepsilon$, nel modo istesso che abbiamo supposto nel n° 28. Pel I, 3° la x', in conseguenza della prima permutazione componente, dipenderà qui pure da un'equazione (X), il coefficiente q della quale a cagione della permutazione seconda sarà radice di un'altra (XI), in cui l'esponente ρ uguagliando il numero delle combinazioni ad $\alpha + \beta$, ad $\alpha + \beta$ delle radici tutte appartenenti alle prime due permutazioni sarà

$$\frac{(\alpha+\beta+\gamma+\delta)(\alpha+\beta+\gamma+\delta-1)(\alpha+\beta+\gamma+\delta-2)\ldots(\gamma+\delta+1)}{1.2.3\ldots(\alpha+\beta)},$$

e l'ultimo coefficiente g, essendo $\pm q' q'' q''' \ldots q^{(\rho)}$, sarà

$$\pm (x' x'' x''' \ldots x^{(\alpha+\beta+\gamma+\delta)\sigma}),$$

supposto

$$\sigma = \frac{(\alpha+\beta+\gamma+\delta-1)(\alpha+\beta+\gamma+\delta-2)\ldots(\gamma+\delta+1)}{1.2.3\ldots(\alpha+\beta-1)}.$$

Ora, cercando dalla $T' = h$ il valore del coefficiente g, con raziocinio uguale a quello

Digitized by Google

che abbiamo fatto nel precedente I per la determinazione del coefficiente q, si trova che in conseguenza della permutazione terza deve esso g dipendere da un'equazione

(XII) $$g^\tau + bg^{\tau-1} + \cdots + d = 0$$

avente l'esponente

$$\tau = \frac{m(m-1)(m-2)\ldots[m-(\alpha+\beta+\gamma+\delta-1)]}{1.2.3\ldots(\alpha+\beta+\gamma+\delta)}.$$

Dunque, non potendo mai risultare $\tau < m$, neppure la supposizione presente potrà da sè sola essere atta alla determinazione della x'.

La stessa conseguenza con raziocinii uguali ricavasi, se le permutazioni componenti del 1° genere siano quattro, cinque, etc.

III. Qualunque siansi le componenti della permutazione ora supposta, poichè esse sono sempre o semplici del 1° genere per sè medesime, o formate da tante semplici del genere istesso (n' 258, 259 della Teoria delle equazioni), potremo sempre supporre che le componenti di tale permutazione siano infine semplici tutte del genere 1°. Ora il genere della permutazione supposta essendo il 3°, le radici di una delle componenti debbono potersi frammischiare con quelle di un'altra, e pel 5°, n° 26 in ciascuna delle classi della funzione T' debbono potere entrare successivamente tutte le radici x', x'', x''', ..., $x^{(m)}$, senza che si cambi il suo valore h. Dunque, supposto

$$\alpha + \beta + \gamma + \delta + \varepsilon + \cdots = m,$$

potremo sempre considerare che l'espressione (IX) ci rappresenti la nostra T', e che tanto la prima delle permutazioni spettante alle radici x', x'', x''', ..., $x^{(\alpha+\beta)}$, quanto la seconda appartenente alle $x^{(\alpha+1)}$, $x^{(\alpha+2)}$, ..., $x^{(\alpha+\beta+\gamma+\delta)}$, e così le altre successive siano tutte semplici del 1° genere; ma in conseguenza di simile considerazione questo caso riducesi al precedente II. Dunque concluderemo che, se la T' conserva il proprio valore per una permutazione composta del genere 3°, qualunque siansi le sue componenti, non potremo giammai dipendentemente dalla sola $T' = h$ determinare il valore domandato della x'.

Dunque il nostro problema non ammette soluzione, se non nel caso 2°; *non potremo cioè ritrovare il valore della radice x' in conseguenza della sola $T' = h$, se non quando la T' conserva il proprio valore per una permutazione composta del 2° genere* [40].

30. Giacchè non possiamo ottenere nei casi 1° e 3° (n° precedente) il valore della x' dalla $T' = h$ cercandolo immediatamente, veggiamo se si possa ottenere mediante una nuova funzione tra le x', x'', x''', ... che supporrò essere $\varphi(x')(x'')(x''')\ldots$.

Chiamata y questa nuova funzione, converrà dunque cercare in primo luogo il valore della y dalla $T' = h$, e in seguito da questa dedurre il valore della x'. Ora, o si vuole altro non essere tale funzione, se non se il primo membro della

(B) $$f(x')(x'')(x''')\ldots(x^{(\lambda)}) = K,$$

oppure della

(E) $$F(x')(x'')\ldots(x^{(m)}) = H,$$

o si vuole da esse diversa. Nel primo di questi due casi, tanto se esprimesi il primo

Digitized by Google

membro della (B), quanto quello della (E), la determinazione della y dalla $T' = h$, dipenderà dalla soluzione di un'equazione di 1° grado; ma pei n° 12, 5° n° 22, nè la (B) nè la (E) così determinate possono essere più opportune della $T' = h$ alla determinazione della x'. Dunque questa prima supposizione non ci recherà alcun vantaggio per isciogliere il problema del n° precedente.

Sia la y funzione diversa dai primi membri delle (B), (E). In tale ipotesi può questa mantenere il proprio valore per una o più di quelle permutazioni componenti (I, II, III, caso 3°), sotto cui mantiene il proprio la T', e può cangiarlo ad una qualsivoglia di simili permutazioni. Ora, supposto che a norma del II e III, caso 3°, la (IX) ci esprima la T', se la y conserva il suo valore solamente per la prima permutazione componente tra le prime $\alpha + \beta$ radici, la sua determinazione dalla $T' = h$ è chiaro non potere risultare più semplice della determinazione dalla stessa $T' = h$ del precedente coefficiente q (caso 3°): se essa y non mutasi di valore per amendue le permutazioni componenti, che nella T' riguardano le prime $\alpha + \beta + \gamma + \delta$ radici; allora tale funzione non potrà venire determinata per equazioni di grado inferiore a quello per cui si determina il precedente coefficiente g (II, caso 3°), e così in progresso. Dunque risultando di un grado sempre troppo alto le equazioni ultime, per cui nel caso 3° si determinano le quantità q, g, ..., vedesi che ancora la supposta y verrà a dipendere da equazioni di troppo alto grado, e quindi che sarà dipendentemente dalla $T' = h$ indeterminabile.

Che, se la y vogliasi tale che conservi il proprio valore per tutte le permutazioni per cui la T' si mantiene $= h$; allora la y sarà determinabile dalla $T' = h$ col mezzo di un'equazione di 1° grado: ma altro questo non essendo che uno dei casi rappresentati dalla (E) o dalla (B), ne segue che quanto abbiamo detto poc'anzi della ricerca della x' dipendentemente dalle (E), (B), dicesi egualmente della ricerca medesima dalla y ora supposta.

Se la y è indeterminabile allorchè conserva il proprio valore per una o alcune delle permutazioni considerate di sopra, molto più lo sarà, se per simili permutazioni cangiasi sempre di valore; quest'ultima condizione aumentando il numero dei risultati della y fra loro diversi, che corrispondono ai varii risultati della T' fra loro uguali, non potrà che renderne meno facile la determinazione.

Potrebbe la y rappresentare quella funzione che abbiamo considerata nel n° 4 $= K$ irrazionale, e da cui abbiamo dedotta l'equazione (I) avente il secondo membro H razionale. Se si cercasse questa y dalla (I), pel citato n° 4 s'incorrerebbe a dovere sciogliere l'equazione (II); ma essa (I) altro non è che la (B), in cui K è quantità razionale (n° 4); e d'altronde cercando dalla $T' = h$ una data funzione qualunque, pel 5°, n° 22 non si deve mai cadere a sciogliere equazione di grado maggiore di quello che ci risulterebbe, cercando la funzione medesima dalla (B), ossia dalla (I). Dunque, allorchè cerchiamo la nostra y dalla $T' = h$, non ci potrà per essa risultare equazione di grado più alto del grado della (II); ma per quanto abbiamo detto poc'anzi, allorchè la T' si mantiene $= h$ per una permutazione composta del 3° genere, la determina-

Digitized by Google

zione dalla $T' = h$ di una qualsivoglia funzione y, viene sempre a dipendere dalla soluzione di un'equazione di grado non $< m$: dunque nella supposizione fatta l'esponente della (II) sarà essenzialmente non $< m$, e quindi essendo indeterminabile la

$$y' = f(x')(x'')(x''') \ldots (x^{(\lambda_1)}) = K,$$

in cui K è quantità irrazionale (n° 4), pel n° 3 sarà ancora dipendentemente dalla y, ora supposta, inabbassabile la (A).

Quanto abbiamo detto presentemente, supponendo la T' conservarsi $= h$ per una permutazione composta del 3° genere, dicesi in egual modo, allorchè la T' si mantiene $= h$ per una permutazione semplice del 1° genere. Dunque, *ogni qualvolta la x' è indeterminabile dalla $T' = h$, mentre se ne cerca il valore immediatamente, ne sarà indeterminabile ancora, mentre se ne cerca il valore dipendentemente da un'altra funzione.*

31. Pertanto concluderemo che il problema del n° 29 non è solubile dipendentemente dalla sola $T' = h$, e però dalla (B), se non nel caso 2°, n° 29, cioè mentre la T' conservasi $= h$ per una permutazione composta del 2° genere; e simile soluzione si avrà risolvendo col metodo colà indicato le equazioni successivamente ottenute, in ciascuna delle quali l'esponente per la natura delle permutazioni composte del genere 2°, e pel VI, caso 2°, n° 29, vedesi facilmente dover essere $< m$, e > 1. L'ultima poi di tali equazioni, cioè la

$$u^n + a u^{n-1} + \cdots = 0$$

sappiamo essere razionale, avere l'esponente n uguale al numero delle funzioni componenti la nostra T', e l'incognita

$$u = \pm x' x'' x''' \ldots x^{(\mu)}.$$

Si potrebbe bensì ancora in questo caso 2°, n° 29 cercare il valore della x' mediante una nuova funzione y, come abbiamo accennato nel n° 30 rapporto al caso 3°; ma è facile a vedersi che neppure quivi l'equazione in y potrebbe risultare di grado inferiore al grado di quelle che abbiamo determinate nel caso 2°, n° 29, e però che quest'artifizio quantunque potesse riuscire opportuno, pure non ci apporterebbe alcun vantaggio nella soluzione del nostro problema.

32. *) Prendendo nuovamente a considerare il caso 3°, n° 29, non potrebbe egli

---

*) Relativamente a questo articolo il RUFFINI ha lasciato scritte le due note seguenti [41]:

« 18 Agosto 1802. Nel n° 32 della Memoria sulle equazioni manca la riflessione che, potendo la « (XI) avere un fattore razionale, potrà la $T'' = l$ conservare il proprio valore anche per una permuta- « zione semplice del 2° genere o per una composta del 1° o in altro modo, mentre poi non contenga « essa che alcuni dei valori q', q'', ..., $q^{(\rho)}$.

« Supposto $\pi < \rho$, sia $q^\pi + \ldots = g$ il fattore della (XI) dipendente dalla $T'' = l$. Fatta l'equa- « zione $q^\pi + \ldots = g$, di cui q', q'', ..., $q^{(\pi)}$ siano le radici, colloco invece di q' il suo valore in x', ...; « mi verrà così una funzione $f(x')$, ... $= g$, la quale conserverà il proprio valore per quelle permu- « tazioni per cui dalla q' nascono le q'', q''', ..., $q^{(\pi)}$, e questa funzione volendosi tale che si possa « determinare infine il valore x' dovrà restare la stessa per una permutazione composta del 2° genere.

« 10 Agosto 1803. *La dimostrazione del* n° 32 *non va bene.*

Digitized by Google

darsi, che le equazioni in q (I, caso 3°), in g (II, caso 3°), in y (n° 30) risultate di grado non $< m$ fossero riducibili ad altre di grado $< m$, la soluzione delle quali potesse poi somministrarci il valore corrispondentemente delle q, g, y? Se questo succede, io dico che dovrà esistere un'altra equazione di relazione tra le $x', x'', x''', \ldots, x^{(m)}$, la quale, conservandosi tale per una permutazione composta del 2° genere, potrà som-

---

« Se sia per es. $m = 4$,

$$q' = x'x'', \quad q'' = x'x''', \quad q''' = x'x^{IV}, \quad q^{IV} = x''x''', \quad q^{V} = x''x^{IV}, \quad q^{VI} = x'''x^{IV};$$

$$Q' = q'q'', \quad Q'' = q'''q^{IV}, \quad Q''' = q^{V}q^{VI},$$

« ne verrà

$$Q' = x'^2x''x''', \quad Q'' = x'x''x'''x^{IV}, \quad Q''' = x''x'''x^{IV\,2},$$

« e quindi le Q', Q'', essendo funzioni delle $x', x'', \ldots$ fra loro diverse, non ha più luogo il discorso « fatto in quel luogo.

« Per dimostrare esattamente un tal teorema, chiamata Q l'incognita della equazione a cui si ri- « duce la (XI), supposto

$$Q^n + \ldots = 0$$

« tale equazione, $n < m$; tra le $q', q'', q''', \ldots$ dovrà esistere una particolare relazione, affinchè la (XI) « possa ridursi alla $Q^n + \ldots = 0$. Sia

$$\varphi(q')(q'') \ldots (q^{(f)}) = l$$

« tale relazione.

« Pongansi in luogo della q i valori corrispondenti espressi per le $x', \ldots$, ci verrà un'equazione « di relazione

$$\varphi'(x')(x'') \ldots (x^{(\eta)}) = l,$$

« ora la Q essendo funzione delle q, è anche funzione delle x, e fatto

$$Q = f(q')(q'') \ldots (q^{(g)}),$$

« e quindi, con la sostituzione,

$$Q = f'(x')(x'') \ldots (x^{(\xi)}),$$

« lo stesso sarà cercare la

$$f(q')(q'') \ldots (q^{(g)}) = Q$$

« dalla

$$\varphi(q')(q'') \ldots (q^{(f)}) = l,$$

« che la

$$f'(x')(x'') \ldots (x^{(\xi)}) = Q$$

« dalla

$$\varphi'(x')(x'') \ldots (x^{(\eta)}) = l;$$

« ma, per la ipotesi, l'esponente n della $Q^n + \ldots = 0$ deve essere $< m$; dunque dovrà essere

$$\varphi'(x')(x'') \ldots (x^{(\eta)}) = l$$

« una funzione dotata di tutte le proprietà della (B), affinchè sia opportuna all'abbassamento della (A).

« Dunque questa

$$\varphi'(x')(x'') \ldots (x^{(\eta)}) = l$$

« potrà, come quella, ridursi alla $T''' = i$, e questa $T''' = i$ dovrà essere dotata delle proprietà della « $T' = h$, e però, etc.

« Avvertasi essere ben vero che la $Q^n + \ldots = 0$ cercasi dalla

$$\varphi(q')(q') \ldots (q^{(f)}) = l$$

« col mezzo della (XI); ma i coefficienti di questa (XI) essendo funzioni razionali dei coefficienti della « (A), si verrà a cercare una tal trasformata $Q^n + \ldots = 0$, eziandio dalla

$$\varphi'(x')(x'') \ldots (x^{(\eta)}) = l$$

« e dai coefficienti della (A), epperò nel modo stesso che, ... ».

Digitized by Google

ministrarci la soluzione del nostro problema indipendentemente dalla $T' = h$, col metodo istesso del caso 2°, n° 29.

Supponiamo difatti, che tra le equazioni sovraccennate la (XI) del I, caso 3°, n° 29

$$q^\rho + eq^{\rho-1} + \cdots + g = 0, \tag{XI}$$

sia riducibile ad altra opportuna alla sua soluzione di un grado che chiamerò c, grado per conseguenza, il quale dovrà essere $< m$ e > 1. Da quanto abbiamo veduto finora sappiamo che una tale riduzione non potrà accadere che dipendentemente da un rapporto particolare fra le q', q'', q''', ..., $q^{(\rho)}$, il quale, eseguiti i raziocinii e i calcoli precedenti, potrà ridursi ad un'equazione $T'' = l$ corrispondente alla $T' = h$, e dotata di tutte le proprietà indicate nel n° 26. Ora per la ipotesi la (XI) è abbassabile ad altra equazione di grado $< m$ e > 1, da cui possiamo in seguito ritrarre il valore della q, e ciò dipendentemente dalla $T'' = l$: dunque la T'' pel n° precedente non potrà conservare il valore l che per una permutazione composta del 2° genere, e dovrà perciò essere

$$T'' = f[f(q')(q'')(q''') \cdots (q^{(a)})], [f(q^{(a+1)})(q^{(a+2)})(q^{(a+3)}) \cdots (q^{(2a)})],$$
$$[f(q^{(2a+1)})(q^{(2a+2)})(q^{(2a+3)}) \cdots (q^{(3a)})], \ldots, [f(q^{[\rho-(a-1)]})(q^{[\rho-(a-2)]})(q^{[\rho-(a-3)]}) \cdots (q^{(\rho)})] = l.$$

Cerchiamo con le q', q'', q''', ..., $q^{(\rho)}$ dalla $T'' = l$ una nuova equazione di rapporto operando giusta il n° 6, e sia questa la

$$F(q')(q'')(q''') \cdots (q^{(a)}) = L.$$

Tale equazione, contenendo le a quantità q', q'', q''', ..., $q^{(a)}$, avrà evidentemente tanti risultati secondarii $= L$, quante sono le funzioni componenti della T'', cioè un numero c, e chiamati Q', Q'', Q''', ..., $Q^{(c)}$ simili risultati, avremo

$$Q' = F(q')(q'')(q''') \cdots (q^{(a)}), \quad Q'' = F(q^{(a+1)})(q^{(a+2)})(q^{(a+3)}) \cdots (q^{(2a)}), \quad \ldots.$$

Ora pel I, caso 3°, n° 29

$$q' = \pm x'x''x''' \ldots x^{(\alpha+\beta)}, \quad q'' = \pm x'x''x''' \ldots x^{(\alpha+\beta+1)}, \quad q''' = \pm x'x''x''' \ldots x^{(\alpha+\beta+2)}, \quad \ldots.$$

Dunque, sostituendo nella Q' questi valori, otterremo

$$Q' = F(q')(q'')(q''') \cdots (q^{(a)})$$
$$= F(\pm x'x''x''' \ldots x^{(\alpha+\beta)})(\pm x'x''x''' \ldots x^{(\alpha+\beta+1)})(\pm x'x''x''' \ldots x^{(\alpha+\beta+2)}) \cdots$$
$$= \Phi(x')(x'')(x''') \cdots (x^{(\eta)}) = X,$$

chiamato

$$\Phi(x')(x'')(x''') \cdots (x^{(\eta)}),$$

ed X, ciocchè diventa Q per la sostituzione fatta, ed η il numero delle radici della (A) che entrano nella X.

Per eseguire una permutazione qualunque nella X è manifesto che basta eseguirla in ciascuna delle funzioni sue componenti

$$\pm x'x''x''' \ldots x^{(\alpha+\beta)}, \quad \pm x'x''x''' \ldots x^{(\alpha+\beta+1)}, \quad \pm x'x''x''' \ldots x^{(\alpha+\beta+2)}, \quad \ldots;$$

ma le diverse permutazioni effettuate in questi prodotti non fanno che somministrarci i diversi valori della q. Dunque i varii risultati che nascono dalla X per le varie per-

Digitized by Google

mutazioni fra le x', x'', x''', ..., saranno uguali ai risultati che si hanno dalla Q per le permutazioni corrispondenti fra le q', q'', q''', ..., e però, fatte nella X le permutazioni che corrispondono ai valori precedenti Q', Q'', Q''', ..., $Q^{(c)}$, e chiamatine X', X'', X''', ..., $X^{(c)}$ i risultati, avremo

$$X' = Q', \quad X'' = Q'', \quad X''' = Q''', \ldots, \quad X^{(c)} = Q^{(c)},$$

ed avremo

$$X' = X'' = X''' = \cdots = X^{(c)} = L.$$

Ora, osservando il valore dell'esponente ρ (I, caso 3°, n° 29), vedesi che la (XI) è quella equazione medesima che si ottiene dalla (A), mentre se ne cerca la trasformata in q col metodo generale delle trasformazioni, indipendentemente da qualsivoglia rapporto particolare fra le x', x'', x''', ..., onde le q', q'', q''', ..., $q^{(c)}$ sono i valori tutti della q tra loro differenti. Dunque, avendosi solamente un numero c di valori della Q uguali ad L, avremo ancora sotto tutte le possibili permutazioni fra le x', x'', x''', ... un numero c solamente di risultati della X uguali ad L.

Ciò posto, riduciamo giusta il n° 20 le $X' = X'' = \cdots = L$ ad una funzione

$$T''' = F(X', X'', X''', \ldots, X^{(c)}) = H,$$

e da questa cerchiamo il valore della x': operando siccome nel V, caso 2°, n° 29, formo l'equazione

$$x^{\eta} + t x^{\eta-1} + \cdots + u = 0,$$

e dalla $T''' = H$ cerco il valore del coefficiente u; per quanto abbiamo detto, otterremo per esso un'equazione razionale

$$u^{c} + a u^{c-1} + \cdots = 0,$$

in cui $c < m$, e > 1; ma ciò non può accadere, che mentre la T''' sia una funzione la quale mantenga il valore H per una permutazione composta del 2° genere (n^{i} 29, 30, 31); e questa $T''' = H$ tale essendo, nel modo ora indicato può darci il valore della x'. Dunque, etc.

Gli stessi raziocinii ci dimostrano la verità del nostro Teorema rapporto ancora alla (XII) ed a tutte le equazioni che infine ci risultano nella ricerca degli altri coefficienti.

Consideriamo presentemente l'equazione che, nella determinazione della

$$y = \varphi(x')(x'')(x''') \ldots$$

dalla $T' = h$, diventa pel n° 30 di un grado non $< m$, e supponiamo che nella nostra permutazione composta del 3° genere (caso 3°, n° 29) siano due soltanto le permutazioni componenti, onde la T' abbia la forma espressa in (VIII), e che la y, cambiando di valore a qualunque permutazione, venga in conseguenza della prima componente nella (VIII) a dipendere da un'equazione

$$y^{\alpha+\beta} + G y^{\alpha+\beta-1} + \cdots + Y = 0,$$

il coefficiente Y della quale sia radice di un'altra

$$Y^{\pi} + Y^{\pi-1} + \cdots + u = 0.$$

Digitized by Google

Essendo due solamente le permutazioni per cui la T' conservasi $= h$, l'equazione in Y ascenderà al grado supposto π in conseguenza della permutazione seconda, sarà razionale, e pel n° 30 dovrà avere l'esponente π non $< m$. Sia pertanto questa equazione in Y giusta l'enunciato del Teorema riducibile ad un'altra

$$V^{\lambda} + a V^{\lambda-1} + \cdots = 0,$$

in cui abbiasi $\lambda < m$ e > 1, e dalla cui soluzione possansi ricavare i valori Y', Y'', Y''', ..., e veggiamo quali conseguenze da ciò si ritraggono.

Cerchisi dalla funzione Y il valore della

$$q = \pm x' x'' x''' \ldots x^{(\alpha+\beta)}$$

(I, caso 3°, n° 29). Sotto la prima permutazione componente tanto la q quanto la Y conservano il proprio valore; per la seconda poi cangiansi tanto l'una quanto l'altra, e il numero ρ dei differenti risultati della q non può essere maggiore del numero π dei risultati tra loro diversi della Y (n° 30). Dunque ad ogni risultato diverso della Y uno soltanto corrispondendone della q, pel n° 144 della Teoria delle equazioni potrò ottenere q' da Y', q'' da Y'', etc. Ora i valori Y', Y'', ... vengono dedotti dalla soluzione della

$$V^{\lambda} + a V^{\lambda-1} + \cdots = 0;$$

dunque dalla soluzione dell'equazione medesima venendo dedotti eziandio i valori q', q'', ..., ne segue che questa

$$V^{\lambda} + a V^{\lambda-1} + \cdots = 0$$

potrà ancora considerarsi come un'equazione, a cui la (XI) si può abbassare opportunamente alla propria soluzione: ma se la (XI) è capace di simile abbassamento, abbiamo veduto verificarsi il nostro Teorema. Dunque il Teorema medesimo si verificherà ancora, mentre sia opportunamente riducibile a grado inferiore l'equazione da cui dipende la supposta funzione y.

Qualunque siasi la y, e qualunque il numero delle permutazioni componenti per cui la T' si mantiene $= h$, con egual raziocinio troveremo essere sempre vera la nostra proposizione.

33. Quanto abbiamo asserito nel n° 31 si verifica adunque in tutta la generalità, e però dovremo dire che: *nella ipotesi di* (A) *equazione semplice, e di* $m > 4$, *la* x' *non è mai determinabile, se non nel caso in cui abbia luogo un'equazione di rapporto particolare fra le* x', x'', x''', ..., $x^{(m)}$, *la quale si conservi tale per una permutazione composta del* 2° *genere.*

Ora il problema di ridurre l'equazione (A) ad altra di grado inferiore, dalla cui soluzione possa in seguito ottenersi la soluzione della stessa (A), è manifestamente identico al problema del n° 29, preso in generale. Dunque non potremo mai abbassare una data equazione semplice di grado > 4 opportunamente alla propria soluzione, se non nel caso che esista l'equazione di rapporto ora indicata; ed esistendo riguardo alla (A) tale equazione, la

$$u^{n} + a u^{n-1} + \cdots = 0$$

Digitized by Google

in cui

$$u = \pm x' x'' x''' \ldots x^{(\mu)}$$

(n° 31), ossia la (*D*), sarà l'equazione ridotta, equazione, dalla soluzione della quale otterremo in seguito la soluzione della (*A*) col metodo del caso 2°, n° 29.

34. *Una qualunque equazione semplice (A) di grado* > 4, *il cui esponente sia numero primo, non è capace di abbassamento opportuno alla sua soluzione.*

Se la (*A*) supposta fosse capace dell'accennato abbassamento, pel n° precedente dovrebbe verificarsi l'equazione di rapporto (*F*), e la (*D*) ne rappresenterebbe l'equazione ridotta. Ora dovendo nella (*F*) tutte esistere le m radici della (*A*) (4°, n° 26); essendo l'esponente n della (*D*) uguale al numero delle funzioni componenti essa (*F*) (n° 31); in ciascuna di queste entrando un numero μ di radici (n° 260 della Teoria delle equazioni); e finalmente non potendo alcuna di queste μ radici aver luogo contemporaneamente in due delle funzioni componenti (VI, caso 2°, n° 29), ne segue che dovrà essere $\mu n = m$, e però $n = \frac{m}{\mu}$; ma a cagione di m numero semplice, e di $\mu > 1$, e $< m$ (n° 31), $\frac{m}{\mu}$ è necessariamente un numero rotto. Dunque, dovendo essere n necessariamente numero intero, l'equazione $n = \frac{m}{\mu}$ sarà impossibile, e per conseguenza, etc.

35. *Determinare se una data equazione (A) è riducibile ad altra di grado inferiore atta alla propria soluzione.*

Ridotta questa ad equazione semplice (n° 1), osservo in primo luogo se il suo esponente m è numero primo, o no: se lo è, decido immediatamente essere la (*A*) incapace della riduzione domandata (n° precedente). Che, se m è numero composto, cerco i suoi divisori esatti, e supposto rappresentarsi uno qualunque di loro col numero μ, faccio il prodotto

$$x' x'' x''' \ldots x^{(\mu)} = u,$$

trovo dalla (*A*) la trasformata in u, e supposto

$$\frac{m(m-1)(m-2)\ldots[m-(\mu-1)]}{1.2.3\ldots\mu} = p,$$

onde tal trasformata venga espressa dalla

$$(G) \qquad u^p + Mu^{p-1} + Nu^{p-2} + \cdots = 0,$$

cerco se essa ha un fattore razionale di grado $\frac{m}{\mu} = n$, o no; se non lo ha, e se, praticato riguardo agli altri fattori tutti di m ciò stesso che abbiamo fatto rapporto a μ, troviamo non esistere mai in alcuna delle trasformate rispettive divisore razionale di grado corrispondente ad n; allora diremo nuovamente, che la data (*A*) non è abbassabile opportunamente alla propria soluzione. Che, se questo fattore esiste, allora diremo che l'equazione data è attualmente riducibile a grado inferiore, e che la (*D*) ne è l'equazione ridotta (n° 31, 33).

Digitized by Google

Che poi questa (D) sia atta alla soluzione della equazione data, cioè che dalle sue radici possansi determinare le radici della (A) col mezzo di equazioni di grado $< m$, vedesi facilmente dal (IV, caso 2°, n° 29). Imperciocchè, supposta l'equazione

$$(C) \qquad x^{\mu} + t x^{\mu-1} + \tau x^{\mu-2} + \cdots + u = 0,$$

se cerco, siccome nel n° 23, da ciascuno dei valori u', u'', ..., $u^{(m)}$ il valore di cadaun coefficiente t, τ, ..., e chiamo

$$(H) \qquad \begin{cases} x^{\mu} + t' x^{\mu-1} + \tau' x^{\mu-2} + \cdots + u' = 0, \\ x^{\mu} + t'' x^{\mu-1} + \tau'' x^{\mu-2} + \cdots + u'' = 0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ x^{\mu} + t^{(m)} x^{\mu-1} + \tau^{(m)} x^{\mu-2} + \cdots + x^{(m)} = 0 \end{cases}$$

le equazioni che ci risultano, la soluzione della prima fra esse ci darà le radici x', x'', x''', ..., $x^{(\mu)}$, la soluzione della seconda ci darà le radici $x^{(\mu+1)}$, $x^{(\mu+2)}$, $x^{(\mu+3)}$, ..., $x^{(2\mu)}$, e così di seguito.

36. Il metodo istesso, che abbiamo indicato doversi seguire per isciogliere il problema del n° precedente, ci servirà ancora per ottenere attualmente l'opportuno abbassamento della (A), allorquando essa ne è capace. Ogniqualvolta la y del n° 31 facciasi uguale ad una funzione delle x', x'', x''', ..., $x^{(\mu)}$, la quale conservi il proprio valore per tutte quelle permutazioni primitive, sotto cui nella (F) conserva il valor proprio la

$$f(x')(x'')(x''') \ldots (x^{(\mu)});$$

vedesi che sempre per la y, dipendentemente dalla $T' = h$, ci risulterà un'equazione razionale di grado n, e quindi che infinite potranno essere le equazioni ridotte: noi però fra queste sceglieremo la (D), come quella che in generale riesce più semplice delle altre, e da cui con facilità maggiore potremo determinare i coefficienti della (C). Il metodo generale poi delle trasformazioni (Capo IV della Teoria delle equazioni) potrà darci la (G), da cui in seguito ottiensi la (D), e il metodo con cui si risolve il problema del n° 142 della Teoria delle equazioni ci somministrerà dipendentemente dalle radici u', u'', ..., $u^{(m)}$ i coefficienti tutti in (H). Non sarà però inconveniente lo stabilirne degli altri, affinchè poi nelle varie circostanze possiamo fare uso di quelli, i quali possonci rendere i calcoli più brevi, e meno laboriosi.

PARTE TERZA.

37. Ritenuta la maniera di scrivere supposta nel Capo II della Teoria delle equazioni, per semplicità ulteriore supponiamo

$$\sum \overline{xx}^{r} = \sum \overline{x^2}^{r}, \quad \sum \overline{xxx}^{r} = \sum \overline{x^3}^{r}, \quad \sum \overline{xxxx}^{r} = \sum \overline{x^4}^{r}, \ \ldots$$

$$\sum x' \overline{xx}^{r} = \sum x' \overline{x^2}^{r}, \quad \sum x' \overline{xxx}^{r} = \sum x' \overline{x^3}^{r}, \quad \sum x' \overline{xxxx}^{r} = \sum x' \overline{x^4}^{r}, \ \ldots,$$

Digitized by Google

pel n° 47 della Teoria delle equazioni dovrà essere

$$(I)\qquad \begin{cases} \sum \overline{x^{2r}} = \dfrac{\sum x^r \sum x^r - \sum x^{2r}}{2}, \\ \sum \overline{x^{3r}} = \dfrac{\sum x^r \sum \overline{x^{2r}} - \sum x^{2r} x^r}{3}, \\ \sum \overline{x^{4r}} = \dfrac{\sum x^r \sum \overline{x^{3r}} - \sum x^{2r} \overline{x^{2r}}}{4}, \\ \sum \overline{x^{5r}} = \dfrac{\sum x^r \sum \overline{x^{4r}} - \sum x^{2r} \overline{x^{3r}}}{5}, \\ \sum \overline{x^{6r}} = \dfrac{\sum x^r \sum \overline{x^{5r}} - \sum x^{2r} \overline{x^{4r}}}{6}, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \sum \overline{x^{\mu r}} = \dfrac{\sum x^r \sum \overline{x^{\mu-1 r}} - \sum x^{2r} \overline{x^{\mu-2 r}}}{\mu}. \end{cases}$$

Dunque sostituendo successivamente, otterremo

$$\sum \overline{x^{2r}} = \frac{(\sum x^r)^2 - \sum x^{2r}}{2},$$

$$\sum \overline{x^{3r}} = \frac{(\sum x^r)^3 - \sum x^r \sum x^{2r} - 2\sum x^{2r} x^r}{2.3},$$

$$\sum \overline{x^{4r}} = \frac{(\sum x^r)^4 - (\sum x^r)^2 \sum x^{2r} - 2\sum x^r \sum x^{2r} x^r - 2.3 \sum x^{2r} \overline{x^{2r}}}{2.3.4},$$

$$\sum \overline{x^{5r}} = \frac{(\sum x^r)^5 - (\sum x^r)^3 \sum x^{2r} - 2(\sum x^r)^2 \sum x^{2r} x^r - 2.3 \sum x^r \sum x^{2r} \overline{x^{2r}} - 2\,3.4 \sum x^{2r} \overline{x^{3r}}}{2.3.4.5}$$

$$\sum \overline{x^{6r}} = [(\sum x^r)^6 - (\sum x^r)^4 \sum x^{2r} - 2(\sum x^r)^3 \sum x^{2r} x^r - 2.3\,(\sum x^r)^2 \sum x^{2r} \overline{x^{2r}} - 2.3.4 \sum x^r \sum x^{2r} \overline{x^{3r}} - 2.3.4.5 \sum x^{2r} \overline{x^{4r}}]\, 2.3.4.5.6.$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\sum \overline{x^{\mu r}} = [(\sum x^r)^\mu - (\sum x^r)^{\mu-2} \sum x^{2r} - 2(\sum x^r)^{\mu-3} \sum x^{2r} x^r - 2.3 (\sum x^r)^{\mu-4} \sum x^{2r} \overline{x^{2r}} - 2.3.4 (\sum x^r)^{\mu-5} \sum x^{2r} \overline{x^{3r}} - 2.3.4.5 (\sum x^r)^{\mu-6} \sum x^{2r} \overline{x^{4r}} - \cdots \cdots - 2.3.4.5 \ldots (\mu-1) \sum x^{2r} \overline{x^{\mu-2 r}}] : 1.2.3.4.5 \ldots \mu.$$

In egual modo avendosi pei n^{i} 41, 46, 47 (Teoria delle equazioni)

$$\sum x^{2r} x^r = \sum x^{2r} \sum x^r - \sum x^{3r},$$

$$\sum x^{2r} \overline{x^{2r}} = \sum x^{2r} \sum \overline{x^{2r}} - \sum x^{3r} x^r,$$

$$\sum x^{2r} \overline{x^{3r}} = \sum x^{2r} \sum \overline{x^{3r}} - \sum x^{3r} \overline{x^{2r}},$$

$$\sum x^{2r} \overline{x^{3r}} = \sum x^{2r} \sum \overline{x^{4r}} - \sum x^{3r} \overline{x^{3r}},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\sum x^{2r} \overline{x^{qr}} = \sum x^{2r} \sum \overline{x^{qr}} - \sum x^{3r} \overline{x^{q-1 r}},$$

Digitized by Google

troveremo risultarci

$$(K)\begin{cases} \sum x^{2r}x^r = \sum x^{2r}\sum x^r - \sum x^{3r}, \\ \sum x^{2r}\overline{x^{2r}} = \sum x^{2r}\sum \overline{x^{2r}} - \sum x^{3r}\sum x^r + \sum x^{4r}, \\ \sum x^{2r}\overline{x^{3r}} = \sum x^{2r}\sum \overline{x^{3r}} - \sum x^{3r}\sum \overline{x^{2r}} + \sum x^{4r}\sum x^r - \sum x^{5r}, \\ \sum x^{2r}\overline{x^{4r}} = \sum x^{2r}\sum \overline{x^{4r}} - \sum x^{3r}\sum \overline{x^{3r}} + \sum x^{4r}\sum \overline{x^{2r}} - \sum x^{5r}\sum x^r + \sum x^{6r}, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \sum x^{2r}\overline{x^{qr}} = \sum x^{2r}\sum \overline{x^{qr}} - \sum x^{3r}\sum \overline{x^{q-1r}} + \sum x^{4r}\sum \overline{x^{q-2r}} \\ -\sum x^{5r}\sum \overline{x^{q-3r}} + \sum x^{6r}\sum \overline{x^{q-4r}} - \cdots \mp \sum x^{(q+1)r}\sum x^r \pm \sum x^{(q+2)r}, \end{cases}$$

prendendosi in quest'ultima formola generale il segno superiore quando q è numero pari, l'inferiore quando q è dispari.

38. Col mezzo delle formole (I), (K), l'andamento delle quali è assai chiaro, noi potremo trasformare la data (A) in altra equazione, le cui radici siano tutti i prodotti delle x', x'', x''', ..., $x^{(m)}$ combinate fra loro a due a due, oppure a tre a tre, oppure a quattro a quattro, e in generale a μ a μ.

Supposto di fatti rappresentarsi dalla (G) la trasformata, vogliasi, a cagione di esempio, che le sue radici siano i prodotti tutti a quattro a quattro delle x', x'', x''', ..., $x^{(m)}$, e però che abbiasi

$$u' = x'x''x'''x^{iv}, \qquad u'' = x'x''x'''x^{v}, \ \ldots, \ u^{(p)} = x^{(m-3)}x^{(m-2)}x^{(m-1)}x^{(m)}.$$

In questa ipotesi essendo

$$p = \frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{2.3.4},$$

non restano a determinarsi che i coefficienti M, N, P, Q, ...: a tal fine prendansi le prime tre delle (I) equazioni, le prime due delle equazioni (K), col loro mezzo si determinino le quantità

$$\sum \overline{x^{2r}}, \quad \sum \overline{x^{3r}}, \quad \sum x^{2r}x^r, \quad \sum x^{2r}\overline{x^{2r}};$$

e otterremo

$$\sum \overline{x^{4r}} = \frac{(\sum x^r)^4 - 6(\sum x^r)^2\sum x^{2r} + 8\sum x^r\sum x^{3r} - 6\sum x^{4r} + 3(\sum x^{2r})^2}{2.3.4},$$

ossia a cagione di $\sum \overline{x^{4r}} = \sum u^r$, otterremo

$$\sum u^r = \frac{(\sum x^r)^4 - 6(\sum x^r)^2\sum x^{2r} + 8\sum x^r\sum x^{3r} - 6\sum x^{4r} + 3(\sum x^{2r})^2}{2.3.4}$$

Quest'ultima è una formola la quale, facendo successivamente $r = 1, 2, 3, \ldots$, ci somministra i valori delle

$$\sum u, \quad \sum u^2, \quad \sum u^3, \quad \sum u^4, \quad \ldots$$

espressi per le

$$\sum x, \quad \sum x^2, \quad \sum x^3, \quad \ldots,$$

ma i valori delle $\sum x$, $\sum x^2$, ... col mezzo dei Teoremi Newtoniani ottengonsi espressi

Digitized by Google

con i coefficienti A, B, C, ... della data. Dunque sostituendo avremo ancora i valori delle $\sum u$, $\sum u^2$, $\sum u^3$, ... espressi con i coefficienti medesimi A, B, C, ... Ora gli stessi Teoremi Newtoniani ci somministrano i valori dei coefficienti M, N, P, Q, ... dipendentemente dalle $\sum u$, $\sum u^2$, $\sum u^3$, ... Dunque, sostituendo di nuovo, otterremo infine i valori delle quantità M, N, P, Q, ... espressi per le altre A, B, C, ..., e quindi determinata avremo la trasformata richiesta.

Lo stesso si dice, e si pratica, qualunque siasi nei prodotti rappresentati dalla u il numero μ delle radici x', x'', x''', ... che li compongono.

Sia per esempio

$$x^4 - 4x^3 - 28x + 13 = 0$$

la data equazione (A), e vogliasi che nella trasformata (G) sia $u = x'x''$. In questo caso avendosi $p = \frac{4 \cdot 3}{2} = 6$, la (G) diverrà

$$u^6 + Mu^5 + Nu^4 + Pu^3 + Qu^2 + Ru + S = 0,$$

e avendosi $\sum u^r = \sum \overline{x^2}^r$, per la determinazione dei coefficienti M, N, P, ... ci serviremo della prima delle formole (I), ponendo $\sum u^r$ in luogo di $\sum \overline{x^2}^r$, ci serviremo cioè della $\sum u^r = \frac{(\sum x^r)^2 - \sum x^{2r}}{2}$. Ora, facendo successivamente $r = 1, 2, 3, 4, \ldots$ ci risulta in corrispondenza

$$\sum u = \frac{(\sum x)^2 - \sum x^2}{2}, \quad \sum u^2 = \frac{(\sum x^2)^2 - \sum x^4}{2}, \quad \sum u^3 = \frac{(\sum x^3)^3 - \sum x^6}{2},$$

$$\sum u^4 = \frac{(\sum x^4)^2 - \sum x^8}{2}, \quad \ldots,$$

e dai Teoremi Newtoniani abbiamo

$$\sum u + M = 0, \quad \sum u^2 + M \sum u + 2N = 0, \quad \sum u^3 + M \sum u^2 + N \sum u + 3P = 0, \ldots.$$

Dunque, sostituiti nelle prime di queste Equazioni in luogo delle $\sum x$, $\sum x^2$, $\sum x^3$, ... i loro valori, ed ottenuti così i valori delle $\sum u$, $\sum u^2$, $\sum u^3$, ... espressi pei coefficienti -4, 0, -28, 13 della data, pongo essi nelle equazioni seconde, da queste così ridotte determino successivamente i valori dei coefficienti M, N, P, ..., e così operando, otterremo

$$M = 0, \quad N = 99, \quad P = -992, \quad Q = 1287, \quad R = 0, \quad S = 2197,$$

onde

$$u^6 + 99u^4 - 992u^3 + 1287u^2 + 2197 = 0$$

sarà l'equazione domandata.

39. Vogliasi sapere se la precedente equazione

$$x^4 - 4x^3 - 28x + 13 = 0$$

sia abbassabile opportunamente alla sua soluzione; e in caso che sì, quale ne sia la ridotta e come dalle radici di questa potremo dedurre le radici della data.

Digitized by Google

Essendo la data un'equazione semplice, ed essendo l'esponente 4 divisibile solamente per 2, non potrà essa abbassarsi che ad un'altra equazione del grado 2° (n° 35). In conseguenza pertanto di ciò che abbiamo detto nel n° 36, suppongo il prodotto $x'x''=u$, determino col metodo insegnato la precedente

$$u^6 + 99u^4 - 992u^3 + 1287u^2 + 2197 = 0,$$

osservo se questa ha fattore razionale di 2° grado, e trovando che lo ha realmente, tale essendo il trinomio

$$u^2 - 8u + 13,$$

dirò che l'equazione data è attualmente abbassabile, e che

$$u^2 - 8u + 13 = 0$$

è l'equazione ridotta, le cui radici sono $u' = x'x''$, $u'' = x'''x^{IV}$.

Presentemente dovendosi dai valori u', u'' dedurre gli altri x', x'', x''', x^{IV}, formo pel n° 35 l'equazione

$$x^2 + tx + u = 0,$$

e dai valori della u dovrò cercare i corrispondenti della t. A tal fine osservo, che altro non essendo le radici della $x^2 + tx + u = 0$ se non se due delle radici della equazione data, il primo membro di questa dovrà essere divisibile esattamente pel primo di quella. Eseguisco pertanto simile divisione, e avuto l'avanzo

$$-(t^3 + 4t^2 - 2tu - 4u + 28)x - (t^2u + 4tu - u^2 - 13),$$

poichè questo deve essere zero indipendentemente dal valore della x, faccio

$$t^3 + 4t^2 - 2tu - 4u + 28 = 0, \qquad t^2u + 4tu - u^2 - 13 = 0.$$

Supponiamo che, risolta la prima di tali equazioni, ottengasi $t = F(u)$; ma in amendue queste equazioni, allorquando si pone $u = u'$, deve risultare $t = t'$; dunque, fatto $u = u'$, la $F(u') = t'$ dovrà essere radice non solamente della prima di esse, ma ancora della seconda, e però i loro primi membri dovranno essere divisibili entrambi esattamente per $t - F(u')$. In conseguenza di ciò, considerando la t come incognita, pratico su di loro l'operazione che si usa a trovare il massimo comun divisore, estendo tale operazione finchè mi risulta un divisore riguardo alla t di 1° grado, pongo in questo u' in luogo della u, lo uguaglio allo zero, e mi verrà un'equazione, il cui primo membro sarà evidentemente il precedente binomio $t - F(u')$, e da cui per conseguenza ricavandosi $t = F(u')$, si avrà $t = t'$; ma ciò stesso che abbiamo detto delle u', t' dicesi in egual modo delle u'', t''. Dunque se nella nostra equazione porremo la u senza apice, la $t = F(u)$ sarà tale, che invece della u collocando u', ci verrà $t' = F(u')$, e collocandovi u'', ci verrà $t'' = F(u'')$.

Effettuata nel nostro esempio l'operazione precedente, poichè pel divisore riguardo alla t di 1° grado ci risulta la quantità

$$-(u^2 - 13)t - (4u^2 - 28u),$$

uguaglio questa allo zero, e riducendo avremo

$$t = \frac{28u - 4u^2}{u^2 - 13},$$

Digitized by Google

onde sarà

$$t' = \frac{28u' - 4u'^2}{u'^2 - 13}, \qquad t'' = \frac{28u'' - 4u''^2}{u''^2 - 13}.$$

Poichè u', u'' sono le radici della ridotta

$$u^2 - 8u + 13 = 0,$$

per maggiore semplicità eliminiamo col mezzo di questa la u^2 dalla

$$t = \frac{28u - 4u^2}{u^2 - 13},$$

avuto il risultato

$$t = \frac{26 - 2u}{4u - 13},$$

collochiamo in esso successivamente i due valori

$$u' = 4 + \sqrt{3}, \qquad u'' = 4 - \sqrt{3},$$

e per tal guisa otterremo

$$t' = \frac{18 - 2\sqrt{3}}{3 + 4\sqrt{3}} = \frac{(3 - 4\sqrt{3})(18 - 2\sqrt{3})}{(3 - 4\sqrt{3})(3 + 4\sqrt{3})} = -\frac{78 - 78\sqrt{3}}{39} = -2 + 2\sqrt{3}$$

$$t'' = \qquad\qquad = -2 - 2\sqrt{3}.$$

Facciansi ora le dovute sostituzioni nella

$$x^2 + tx + u = 0,$$

e avute le due equazioni

$$x^2 - (2 - 2\sqrt{3})x + (4 + \sqrt{3}) = 0, \qquad x^2 - (2 + 2\sqrt{3})x + (4 - \sqrt{3}) = 0,$$

la soluzione della prima di esse ci darà il valore delle due radici x', x'' della equazione data, la soluzione della seconda ci darà il valore delle altre x''', x^{IV}.

40. Passiamo al caso generale, e *dipendentemente dalle* u', u'', u''', ..., $u^{(\mu)}$, *radici della ridotta* (D), *vogliansi determinare i valori corrispondenti delle quantità* t, z, y, ..., u, *coefficienti della* (C).

1° Operando perciò come nel n° precedente, divido il primo membro della (A) pel primo della (C), e chiamo

$$Px^{\mu-1} + Qx^{\mu-2} + Rx^{\mu-3} + Sx^{\mu-4} + \cdots + Y$$

il residuo che ne viene. Poichè la divisione deve risultare esatta, e deve però il risultato divenire $= 0$ indipendentemente dalla x, vedesi che i valori delle t, z, y, v, ..., u fra loro corrispondenti dovranno, mentre siano posti contemporaneamente nei coefficienti P, Q, R, S, ..., Y, produrci le equazioni

$$(L) \qquad P = 0, \quad Q = 0, \quad R = 0, \quad S = 0, \ldots, \quad Y = 0.$$

Ora i valori della u sono già determinati dalla (D); dunque, non restando a determinarsi che i corrispondenti delle t, z, y, v, ..., cominciamo dal porre nelle (L) il valore u', e dipendentemente da questo cerchiamo i valori t', z', y', v', ... Fatta la sostituzione precedente può succedere che qualcuna delle (L) divenga immediatamente

Digitized by Google

zero in conseguenza della sola u', come nella ipotesi che, essendo per esempio

$$P = \varphi'(u)t^3 + \varphi''(u)t^2\tau + \varphi'''(u)\tau^3 + \varphi^{iv}(u)\tau^2 + \varphi^{v}(u),$$

abbiasi

$$\varphi'(u') = 0, \quad \varphi''(u') = 0, \quad \varphi'''(u') = 0, \quad \varphi^{iv}(u') = 0, \quad \varphi^{v}(u') = 0;$$

oppure niuna delle accennate equazioni (L) si verifica in conseguenza di tale sostituzione.

Prendiamo in primo luogo a considerare quest'ultimo caso. Essendo le equazioni (L) di numero μ, e tolta già la u, essendo di numero $\mu - 1$ le incognite $t, \tau, y, v, \ldots$ che vi rimangono, da un numero $\mu - 1$ di tali equazioni per es. dalle $Q = 0$, $R = 0$, $S = 0, \ldots, Y = 0$ elimino le $\mu - 2$ incognite $\tau, y, v, \ldots$ lasciandovi la t, e otterrò così un'equazione $f(t)(u') = 0$. In seguito da un altro numero $\mu - 1$ delle equazioni medesime, compresavi la $P = 0$, elimino le stesse $\mu - 2$ incognite $\tau, y, v, \ldots$, e mi verrà un'altra equazione $f'(t)(u') = 0$. Ottenute queste

$$(M) \qquad f(t)(u') = 0, \qquad f'(t)(u') = 0,$$

supponiamo in primo luogo che le radici della (D) siano tutte disuguali fra loro; in somigliante ipotesi, poichè lo stesso discorso che abbiamo fatto nel n° precedente sulle due equazioni in t ed u colà esistenti, si applica egualmente alle (M); tolto dalla u' l'apice, cerco fra i primi due membri $f(t)(u)$, $f'(t)(u)$ il massimo comun divisore, ponendo la t come incognita, proseguo l'operazione fino ad ottenere un divisore in cui la t non superi il primo grado, faccio questo uguale allo zero, e mi verrà un'equazione $t = F(u)$, dalla quale, ponendo successivamente in luogo della u i valori $u', u'', u''', \ldots, u^{(n)}$, per le ragioni accennate nel n° precedente otterremo

$$t' = F(u'), \quad t'' = F(u''), \quad t''' = F(u'''), \ldots, \quad t^{(n)} = F(u^{(n)}).$$

Qui pure, operando siccome nel n° precedente, potremo col mezzo della (D) eliminare dalla $F(u)$ tutti i termini che contengono delle potenze della u di grado $> n - 1$, e ciò fatto, è chiaro che mi verrà un'equazione della forma

$$(N) \qquad t = \frac{a u^{n-1} + b u^{n-2} + c u^{n-3} + \cdots}{\alpha u^{n-1} + \beta u^{n-2} + \gamma u^{n-3} + \cdots},$$

da cui si avranno i valori $t', t'', t''', \ldots, t^{(n)}$, facendo successivamente $u = u', u'', u''', \ldots, u^{(n)}$.

2° Tornando alle equazioni (L), in cui esista u' in luogo della u, poniamo t' in luogo della t. In conseguenza di tale sostituzione qui pure, come di sopra, o qualcuna delle (L) diviene zero, o no: supponiamo primieramente che no, e in questa ipotesi mediante un numero $\mu - 2$ delle (L), per es. mediante le $R = 0$, $S = 0, \ldots, Y = 0$ si tolgano le $\mu - 3$ quantità $y, v, \ldots$, si faccia l'eliminazione medesima col mezzo di altre $\mu - 2$ delle stesse equazioni, per es. col mezzo delle $P = 0$, $S = 0, \ldots, Y = 0$, e avremo così le due equazioni

$$(O) \qquad f(\tau)(t')(u') = 0, \qquad f'(\tau)(t')(u') = 0.$$

Ora considerando in questa la τ come incognita, e tolti dalle t', u' gli apici, cerco fra

Digitized by Google

i loro primi due membri il massimo comun divisore, estendendo l'operazione insino a che si abbia un divisore di 1° grado, e uguagliato questo allo zero, avremo un'equazione $\chi = F(t)(u)$, nella quale sostituendo invece delle t, u i valori già ritrovati t', u'; t'', u''; t''', u'''; ...; $t^{(n)}$, $u^{(n)}$, otterremo evidentemente

$$\chi' = F(t')(u'), \quad \chi'' = F(t'')(u''), \quad \chi''' = F(t''')(u'''), \ \ldots, \ \chi^{(n)} = F(t^{(n)})(u^{(n)}).$$

Col mezzo della (D), e col mezzo della equazione in t, che potremo sempre determinare moltiplicando insieme i binomj $t - t'$, $t - t''$, $t - t'''$, $t - t^{(n)}$, se toglieremo dalla $F(t)(u)$ tutte le potenze delle t, u di grado $> n - 1$, avremo un'equazione della forma

$$(P) \quad \begin{cases} \chi = [t^{n-1}(a u^{n-1} + b u^{n-2} + \cdots) + t^{n-2}(g u^{n-1} + h u^{n-2} + \cdots) \\ \quad + t^{n-3}(p u^{n-1} + q u^{n-2} + \cdots) + \cdots] : [t^{n-1}(\alpha u^{n-1} + \beta u^{n-2} + \cdots) \\ \quad + t^{n-2}(\zeta u^{n-1} + \eta u^{n-2} + \cdots) + t^{n-3}(\pi u^{n-1} + \rho u^{n-2} + \cdots) + \cdots] \end{cases}$$

da cui otterremo nello stesso modo che dalla $\chi = F(t)(u)$, tutti i successivi valori χ', χ'', χ''', ..., $\chi^{(n)}$.

3° Oltre delle quantità u', t' sostituiscasi nelle (L) invece della χ il valore χ', e supponiamo ancor quivi, che per ciò solo niuna della (L) si verifichi. Operando, ciò posto, nelle equazioni risultate in maniera simile alle precedenti, ricaveremo un'equazione

$$y = F(\chi)(t)(u),$$

la quale col mezzo delle equazioni già ottenute in u, t, χ potrà, come precedentemente, ridursi ad un'altra

$$(Q) \qquad y = \varphi(\chi)(t)(u)$$

priva di tutte le potenze delle u, t, χ di grado $> n - 1$, e sì la

$$y = F(\chi)(t)(u),$$

che l'altra

$$y = \varphi(\chi)(t)(u)$$

ci daranno tutti i valori y', y'', y''', ..., $y^{(n)}$, mentre sostituiscansi in luogo delle χ, t, u, successivamente i valori

$$\chi', \ t', \ u'; \quad \chi'', \ t'', \ u''; \quad \chi''', \ t''', \ u'''; \ \ldots; \ \chi^{(n)}, \ t^{(n)}, \ u^{(n)}.$$

Lo stesso si dice e si pratica per la determinazione degli altri coefficienti v, ...

Abbiamo di sopra determinato il valore della χ mediante i valori delle due quantità t, u, il valore della y mediante le tre χ, t, u, e così in progresso: potevamo però determinare i valori di cadauna di queste χ, y, ... col mezzo dei valori di una sola delle altre incognite, per es. della sola u, e ciò operando rapporto a ciascuna delle χ, y, ... nel modo istesso che abbiamo tenuto, allorquando abbiamo cercato dalla sola u i valori della t. Il più delle volte però il calcolo, se non erro, riuscirà più breve, mentre si esprimano i valori delle χ, y, ... col mezzo di più delle quantità accennate, che quando si esprimano col mezzo di una sola.

41. *Suppongasi in secondo luogo che due delle radici della* (D) *siano uguali fra loro,* sia per es. $u' = u''$. In questa supposizione, la determinazione dei valori delle t,

Digitized by Google

z, y, v, ... corrispondenti alla $u' = u''$ porta necessariamente una variazione. Poichè per l'uguaglianza supposta fra le u', u'' dallo stesso valore u' dipendono egualmente i due t', t'', questi t', t'' dovranno entrambi essere radici di amendue le equazioni (M), e però i primi membri di esse dovranno entrambi essere divisibili per un trinomio

$$t^2 + V_1' t + V_2' = (t - t')(t - t''),$$

in cui a cagione di t' e di t'' funzioni della u', i coefficienti V_1', V_2' saranno essi pure due funzioni della stessa u'. Ciò dunque essendo, nel cercare come di sopra il massimo comun divisore fra i primi membri delle (M), proseguo l'operazione soltanto fino ad un divisore, nel quale la t ascende al 2° grado, e questo uguagliato allo zero, altro non sarà che la

$$(R) \qquad t^2 + V_1 t + V_2 = 0,$$

e ci darà quindi i due valori t', t'', mentre si ponga u' in luogo della u, e poscia si risolva l'ottenuta equazione (R).

Dalla determinazione delle t, t'' passiamo a quella delle z', z'': questi valori della z, o cercansi dipendentemente dalla sola u', oppure dipendentemente dalla u' e dai valori insieme corrispondenti della t. Nel primo di questi due casi, vedremo come precedentemente che, operando come si è fatto riguardo alla t, ci verrà un'equazione

$$z^2 + V_1 z + V_2 = 0,$$

nella quale V_1, V_2 sono funzioni della u, e dalla cui soluzione, posto u' invece di u, otterremo i cercati valori z', z''. Nel caso secondo poi, mentre si ha $u' = u''$, o ci risulta ancora $t' = t''$, o no: se no, questi valori z', z'' vedesi facilmente che si otterranno nel modo istesso del n° precedente; che, se abbiamo $t' = t''$, allora cercando il massimo comun divisore fra i primi due membri delle (O) (n° 40), ed estendendo il calcolo fino ad un risultato, in cui la z ascenda al grado 2°, otterremo un'equazione

$$z^2 + T_1 z + T_2 = 0,$$

i coefficienti T_1, T_2 della quale saranno funzioni di amendue le t, u, e le radici diverranno le z', z'', mentre in luogo delle t, u vengano sostituiti i valori t', u'.

Avvertasi che, cercando i valori della z dalla

$$z^2 + V_1 z + V_2 = 0$$

li otterremo bensì, ma non sapremo poi conoscere quale tra essi sia quello che corrisponde a t', e quale il corrispondente a t'', e quale per conseguenza sia z', quale z''.

Con egual raziocinio, e in egual modo troveremo potersi determinare i valori y', y'' della y, i valori v', v'' della v corrispondenti ad $u' = u''$, e così in progresso.

42. *Sia in terzo luogo* $u' = u'' = u'''$.

Applicandosi a questo caso gli stessi discorsi del n° precedente, vedremo che i tre valori t', t'', t''' corrispondenti al solo u' dovendosi unire necessariamente in una sola equazione di 3° grado

$$(S) \qquad t^3 + V_1 t^2 + V_2 t + V_3 = 0,$$

il primo membro di questa verrà determinato col proseguire la ricerca del massimo

Digitized by Google

comun divisore fra i primi membri delle (M) sino ad un risultato, in cui 3 sia l'esponente della t. Relativamente poi alle z', z'', z''', alle y', y'', y''', etc. vedremo potersi avere la loro determinazione in maniere somiglianti alle accennate nel n° precedente.

Che se i valori della u tra loro uguali sono quattro, cinque, etc, i rispettivi quattro, cinque, etc. valori della t si uniranno in equazioni di 4°, di 5°, etc. grado. La determinazione dei quattro, cinque etc. valori corrispondenti delle z, y, v, ... si avrà come precedentemente.

43. Supponiamo che, *essendo nella* (D) *l'esponente* n *numero pari, i valori della* u *siano tutti uguali fra loro a due a due.* In questa ipotesi, determinata come nel n° 41 l'equazione (R), colloco successivamente nei coefficienti V_1, V_2 invece della u i valori $u' = u''$, $u''' = u^{IV}$, $u^V = u^{VI}$, ..., e avremo così dalla stessa (R) a due a due tutti gli n valori della t. In egual modo se, essendo n multiplo del 3, le radici della (D) sono fra loro uguali a tre a tre; collocando successivamente nei coefficienti della (S) determinata come nel n° 42 i valori diversi della u invece della u medesima, da essa ci risulteranno tutti gli n valori della t insieme congiunti a tre a tre. Lo stesso si dice e si pratica negli altri casi a questi somiglianti. Che se finalmente i valori della u sono tutti uguali fra loro, i valori della t si uniranno tutti in una sola equazione necessariamente di grado n, e questa si determinerà nella solita maniera. Per determinare poi i valori delle z, y, v, ... nelle presenti ipotesi, le operazioni necessarie a farsi si deducono facilmente da quanto si è detto nei n^i 40, e seguenti.

44. 1° Supponiamo presentemente che nel 1° (n° 40) una delle P, Q, R, S, ..., Y, per es. la P, diventi zero per la sola sostituzione di u' invece di u. Scomparsa in questa ipotesi la prima delle equazioni (L), resteranno le altre $Q = 0$, $R = 0$, $S = 0$, ..., $Y = 0$ in numero di $\mu - 1$ con le $\mu - 1$ incognite t, z, y, v, ... Dunque, con eliminare da esse le $\mu - 2$ quantità z, y, v, ..., combinandole in una qualunque maniera, non giungendo infine che ad una sola equazione $f(t)(u') = 0$, i valori della t ricavati da questa uniti agli altri z', y', v', ..., u' tutte faranno verificare le equazioni (L), e però non saranno che tutti quei valori della t corrispondenti ad u' che vengono richiesti dal problema (n° 40). In questa supposizione adunque i valori della t domandati si otterranno dalla $f(t)(u') = 0$ senza la ricerca d'un massimo comun divisore.

2° Cercando in seguito i valori della z; o si vogliono questi dipendentemente dalla sola u', o si vogliono dipendentemente dalla u', e insieme dai rispettivi valori della t: nel primo di questi casi otterremo i valori della z come si sono trovati nel precedente 1° quei della t, eliminando cioè dalle $\mu - 1$ equazioni $Q = 0$, $R = 0$, $S = 0$, ..., $Y = 0$ le incognite t, y, v, ..., e trovando l'equazione finale $f(z)(u') = 0$: nel caso secondo poi, osservo se per la sostituzione nelle Q, R, S, ..., Y dei valori della t determinati, alcuna di queste quantità diventa zero, o no; se no, otterremo i valori della z, operando sulle $\mu - 1$ equazioni come è stato indicato nei n^i 40, e seguenti: che, se una di queste Q, R, S, ..., Y, per es. la Q svanisce alla sostituzione del valore t'; allora sulle $\mu - 2$ equazioni $R = 0$, $S = 0$, ..., $Y = 0$ che restano, opero come nel pre-

Digitized by Google

cedente 1°, eliminando le $\mu - 3$ quantità y, v, ..., e l'equazione finale $f(z)(t')(u') = 0$ ci darà tutti i valori della z corrispondenti alle u', t'.

Lo stesso deve eseguirsi nella ricerca dei corrispondenti valori della y, della v, etc.

45. Suppongasi in terzo luogo che alla sostituzione della u' due delle P, Q, R, S, ..., Y, per es. le due P, Q scompariscano, se è possibile, tostamente. In questo caso resteranno le $\mu - 2$ equazioni $R = 0$, $S = 0$, ..., $Y = 0$ con le $\mu - 1$ incognite t, z, y, v, ...; facendo adunque la precedente eliminazione, giungeremo ad una equazione finale, in cui esisteranno due delle incognite accennate. Sia $f(z)(t)(u') = 0$ una tale equazione; per la sua natura d'indeterminata, una delle t, z resterà necessariamente arbitraria; tale pertanto supposto essere la t, troveremo primamente dalla $f(z)(t)(u') = 0$ il valore della z, e in seguito troveremo come nel n° precedente il valore delle altre y, v, ... espresso per la t medesima, e per quantità note. Chiamati z', y', v', ... somiglianti valori, sostituiscansi nella (C), ed il risultato

$$(\text{XIII}) \qquad x^{\mu} + t x^{\mu-1} + z' x^{\mu-2} + y' x^{\mu-3} + v' x^{\mu-4} + \cdots + u'$$

dovrà essere un divisore esatto del primo membro della (A): ora ciò è impossibile; poichè se il primo membro della (A) fosse divisibile esattamente per (XIII), allora potendo l'indeterminata t ricevere infiniti differenti valori, esso primo membro avrebbe infiniti divisori esatti diversi, il che a cagione di m numero finito è impossibile. Dunque sarà ancora impossibile che due delle P, Q, R, S, ..., Y divengano zero per la sola supposizione di $u = u'$. Lo stesso molto più si dimostra, se per la ipotesi di $u = u'$ si volesse che tre, quattro, etc. delle accennate P, Q, R, S, ..., Y scomparissero.

46. Abbia luogo il caso primo del 2°, n° 40, e si verifichi immediatamente una o più delle equazioni (L) per la sostituzione delle u', t' invece delle u, t. Se delle indicate (L) non se ne verifica che una sola; allora essendo di numero $\mu - 1$ le equazioni, e di numero $\mu - 2$ le incognite che rimangono, otterremo i valori delle z, y, v, ... operando come nei n^{i} 40, 41, 42, 43: se fra le P, Q, R, S, ..., Y quelle che diventano zero sono due, avremo gli indicati valori delle z, y, v, ... operando siccome nel n° 44. La supposizione poi che sia maggiore di due il numero delle P, Q, R, S, ..., Y, che svaniscono alla sola supposizione di $t = t'$, e di $u = u'$ si dimostrerà assurda col fare lo stesso raziocinio del n° precedente.

Le conseguenze medesime e le medesime operazioni si applicano egualmente alle altre incognite z, y, v, ...

47. Date siano le due equazioni

$$(\text{XIV}) \qquad x^6 - 4x^5 - 2x^4 + 18x^3 - 8x^2 - 18x + 9 = 0,$$

$$(\text{XV}) \qquad x^6 - 2x^5 + 3x^4 + x^3 + 3x - 2x + 1 = 0,$$

e vogliasi la lor soluzione.

Riguardo in primo luogo alla (XIV), operando come è stato indicato nei n^{i} 36, 38, troveremo che, fatto $x' x'' x''' = u$, essa è riducibile ad un'equazione di 2° grado $u^2 - bu + 9 = 0$, le cui radici u', u'' sono amendue $= 3$. Ciò essendo, divido il

Digitized by Google

primo membro della (XIV) per

$$x^3 + tx^2 + \zeta x + u,$$

ossia, poichè la u non ha che il valore 3, per

$$x^3 + tx^2 + \zeta x + 3.$$

Dovendo la divisione risultare esatta, uguaglio allo zero i coefficienti delle x^2, x^1, x^0 nell'avanzo corrispondenti ai coefficienti P, Q, Y del n° 40, e avremo

$$\text{(XVI)} \quad \begin{cases} \zeta^2 - (3t^2 + 8t - 2)\zeta + (t^4 + 4t^3 - 2t^2 - 12t + 4) = 0, \\ (2t + 4)\zeta^2 - (t^3 + 4t^2 - 2t - 12)\zeta + (3t^2 + 12t + 12) = 0, \\ (6t + 12)\zeta - (3t^3 + 12t^2 - 6t - 36) = 0. \end{cases}$$

Mediante la prima e la terza di queste equazioni elimino la ζ, faccio l'eliminazione medesima combinando le equazioni seconda e terza: avuti i risultati

$$t^6 + 12t^5 + 44t^4 + 32t^3 - 124t^2 - 240t - 112 = 0,$$
$$t^4 + 8t^3 + 24t^2 + 32t + 16 = 0,$$

trovo fra i loro primi membri il massimo comun divisore, e uguagliato questo allo zero, ci verrà per t l'equazione $t^2 + 4t + 4 = 0$. Ora qui pure entrambe le radici t', t'' hanno il valore medesimo -2, e questo sostituito nelle precedenti tre equazioni ci rende zero i primi membri delle seconde due, indipendentemente dalla ζ; dunque per quanto abbiamo detto nei n^i 44, 46, avrò immediatamente i valori corrispondenti della ζ, col porre -2 in luogo della t nella prima delle (XVI), e da ciò venendoci

$$\zeta^2 + 6\zeta + 4 = 0,$$

e però

$$\zeta' = -3 + \sqrt{5}, \qquad \zeta'' = -3 - \sqrt{5},$$

otterremo i sei valori della x nella (XIV), sciogliendo le due equazioni

$$x^3 - 2x^2 - (3 - \sqrt{5})x + 3 = 0, \qquad x^3 - 2x^2 - (3 + \sqrt{5})x + 3 = 0.$$

Invece della ζ vogliasi dalle precedenti (XVI) eliminare la t: combinando perciò fra loro le ultime due equazioni, veggo che, mentre voglio col loro mezzo togliere la t, mi svanisce ancora la ζ. Ora che significa ciò? ciò mostra che la verità di tali due equazioni non dipende punto dalla ζ, e dipende soltanto dalla t: ma, se questo succede, sappiamo non poter accadere che mentre la t abbia un tale valore, che per esso divenga zero ciascuno dei coefficienti delle potenze ζ^0, ζ^1, ζ^2, ... Dunque, chiamato t' l'accennato valore della t, dovendo cadauno di simili coefficienti essere divisibile esattamente per $t - t'$, potrò trovare assai facilmente questo t' determinando fra due dei coefficienti accennati il massimo comun divisore, ed uguagliando questo allo zero. Esso t' è chiaro che sarà il valore della t richiesto, ed è chiaro che, mentre viene questo determinato, vengono a determinarsi eziandio tutti gli altri valori della t', che corrispondono ad u'. Quello stesso che abbiamo detto nell'esposto esempio, vedesi che si dice egualmente in generale, e però che quando ha luogo l'accennato accidente, allora la determinazione della incognita rispettiva, nel nostro esempio della t, riesce molto più semplice.

Digitized by Google

L'altra equazione (XV) altro non è che una delle così dette equazioni reciproche, in cui per conseguenza abbiamo $x'x'' = x'''x^{IV} = x^{V}x^{VI} = 1$. Dunque, posto $x'x'' = u$, essa sarà riducibile ad un'equazione in u di 3° grado, nella quale ciascuna delle radici u', u'', u''' sarà $= 1$; ora questo valore 1 è già determinato; dunque non abbisognando di cercare la ridotta in u, divido immediatamente il primo membro della (XV) per $x^2 + tx + u$, o più semplicemente per $x^2 + tx + 1$, determino il massimo comun divisore tra le due quantità $t^5 + 2t^4 - t^3 - 2t^2 + 5$, $t^4 + 2t^3 - 5t$, le quali altro non sono che i coefficienti delle x^1, x^0 nel residuo, e fatto uguale allo zero il divisore che si ottiene, l'equazione $t^3 + 2t^2 - 5 = 0$ ci darà i tre valori t', t'', t''' corrispondenti ad $u' = u'' = u''' = 1$, e la soluzione delle

$$x^2 + t'x + 1 = 0, \qquad x^2 + t''x + 1 = 0, \qquad x^2 + t'''x + 1 = 0$$

ci darà le radici della (XV).

L'operazione praticata presentemente rapporto alla (XV) è chiaro che può tenersi egualmente per l'abbassamento di una data equazione reciproca semplice qualunque.

48. Il metodo che abbiamo stabilito per la determinazione dei coefficienti $t, z, \ldots$ dipendentemente dai valori della u (n^i 40 e seguente) potrà servirci a risolvere il problema importantissimo del n° 142 (Teoria delle equazioni) in altra maniera, diversa da quella che ci propone l'immortale LAGRANGE, e che abbiamo colà esposta.

Data difatti la funzione

$$u = f(x')(x'')(x''') \ldots$$

volendosi dipendentemente dai valori di questa i rispettivi valori di un'altra funzione qualunque

$$t = \varphi(x')(x'')(x''') \ldots,$$

suppongo il trinomio

$$(T) \qquad Z^2 + tZ + u,$$

eseguisco nelle u, t tutte le possibili permutazioni fra le x', x'', x''', $\ldots$, $x^{(m)}$, chiamo u', t'; u'', t''; u''', t'''; $\ldots$; $u^{(p)}$, $t^{(p)}$ tutti i risultati che ne vengono fra loro corrispondenti, li sostituisco nel trinomio (T), moltiplico insieme le quantità

$$Z^2 + t'Z + u', \quad Z^2 + t''Z + u'', \quad Z^2 + t'''Z + u''', \ \ldots, \ Z^2 + t^{(p)}Z + u^{(p)},$$

e uguagliato allo zero il prodotto, onde mi venga l'equazione

$$(U) \qquad Z^{2p} + aZ^{2p-1} + bZ^{2p-2} + cZ^{2p-3} + \cdots = 0,$$

colloco nei coefficienti a, b, c, $\ldots$ in luogo delle u', t', u'', t'', $\ldots$, i rispettivi valori in x', x'', x''', $\ldots$. Ciò fatto, è manifesto che questi coefficienti a, b, c, $\ldots$ divengono tante funzioni della forma

$$f(x', x'', x''', \ldots, x^{(m)}),$$

e che però sono determinabili razionalmente con i coefficienti A, B, C, $\ldots$ della data (A): eseguita pertanto una simile determinazione, sieguo ad operare come nei n^i 39, e seguenti, e quindi diviso per (T) il primo membro della (U), ed avuto l'avanzo

$$Pz + Y,$$

Digitized by Google

in cui

$$P = f(t)(u), \qquad Y = f'(t)(u),$$

sostituisco in luogo della u il valore u', osservo se in una delle quantità

$$f(t)(u'), \qquad f'(t)(u')$$

tutti i coefficienti delle t^0, t^1, t^2, ... vanno per questo a divenire zero, o no: se sì, l'altra che rimane, fatta $= 0$, pel 1°, n° 44 ci darà tutti i valori della t corrispondenti ad u'; se no, cerco fra le

$$f(t)(u), \qquad f'(t)(u)$$

il massimo comun divisore, considerando incognita la t, e come nei cit. n^i avrò infine la equazione $t = F(u)$, oppure l'altra $t^2 + V_1 t + V_2 = 0$, oppure la terza

$$t^3 + V_1 t^2 + V_2 t + V_3 = 0, \text{ etc.},$$

secondo che il valore della u che si prende in considerazione, è disuguale dagli altri tutti, oppure ne uguaglia uno solo, o ne uguaglia due, etc. Mediante poi l'equazione in u già determinata potremo come nei n^i 39, 40 eliminare dai coefficienti $F(u)$, V_1, V_2, V_3, ... tutte le potenze della u di grado $> p - 1$, e ciò fatto, la $t = F(u)$ si convertirà nella (N), gli altri coefficienti V_1, V_2, V_3, ... acquisteranno delle forme a questa somiglianti.

Queste ultime equazioni, nei coefficienti delle quali mancano le potenze della u di grado $> p - 1$, come ancor le altre

$$t = F(u), \qquad t^2 + V_1 t + V_2 = 0, \qquad t^3 + V_1 t^2 + V_2 t + V_3 = 0, \quad \ldots$$

quelle saranno che sciolgono il proposto problema del n° 142. (Teoria delle equazioni).

Abbiamo esposta la soluzione presente dell'accennato problema, sì perchè se ne è data l'opportunità, e sì perchè ci è sembrata piuttosto semplice principalmente nel caso in cui due, tre, etc. dei valori della u sono uguali fra loro. Se nel trinomio (T) la t ci esprima la funzione data, e la u la richiesta, troveremo che il calcolo riescirà più semplice, poichè nelle $f(t)(u)$, $f'(t)(u)$ la u ascende ad un grado inferiore al grado, a cui ascende la t.

49. La nostra equazione di rapporto $T' = h$ (n° 26) abbia la forma indicata nel IV, Caso 2°, (n° 29) dalla (F), e trascriviamo quivi le equazioni colà supposte, cioè le

$$\text{(XVII)} \qquad \begin{cases} x^\beta + g x^{\beta-1} + \cdots + l = 0, \\ l^\pi + p l^{\pi-1} + \cdots + q = 0, \\ q^\nu + t q^{\nu-1} + \cdots + u = 0, \\ u^n + a u^{n-1} + b u^{n-2} + \cdots = 0. \end{cases}$$

Suppongasi ora risolta l'ultima di queste equazioni (XVII), equazione la quale, pel III, Caso 2°, (n° 29) sappiamo dovere essere razionale, e dipendentemente dai valori u', u'', u''', ..., $u^{(n)}$ suppongansi trovati i valori corrispondenti dei coefficienti t, ..., si collochino essi nella equazione penultima, e avuti gli n risultati

$$\text{(XVIII)} \qquad \begin{cases} q^\nu + t' q^{\nu-1} + \cdots + u' = 0, \qquad q^\nu + t'' q^{\nu-1} + \cdots + u'' = 0, \\ q^\nu + t''' q^{\nu-1} + \cdots + u''' = 0, \ \ldots, \ q^\nu + t^{(n)} q^{\nu-1} + \cdots + u^{(n)} = 0, \end{cases}$$

Digitized by Google

moltiplichiamo tutti questi insieme; è chiaro che ci verrà un'equazione

$$(V) \qquad q^{n\nu} + Tq^{n\nu-1} + \cdots + V = 0,$$

i coefficienti della quale saranno determinabili razionalmente dai coefficienti della (A). Dai valori q', q'', q''', ..., $q^{(n\nu)}$ supponiamo dedotti i valori rispettivi dei coefficienti p, ..., e fatte le opportune sostituzioni, si moltiplichino fra loro gli $n\nu$ risultati

$$(XIX) \begin{cases} l^n + p' l^{n-1} + \cdots + q' = 0, \quad l^n + p'' l^{n-1} + \cdots + q'' = 0, \\ l^n + p''' l^{n-1} + \cdots + q''' = 0, \ \ldots, \ l^n + p^{(n\nu)} l^{n-1} + \cdots + q^{(n\nu)} = 0, \end{cases}$$

onde si abbia l'equazione

$$(Y) \qquad l^{n\nu\pi} + Pl^{n\nu\pi-1} + \cdots + Q = 0:$$

ancora i coefficienti di questa saranno funzioni commensurabili dei coefficienti della (A). Ricavati finalmente dai l', l'', l''', ..., $l^{(n\nu\pi)}$ i valori corrispondenti delle quantità g, ..., fatta la solita sostituzione nella prima delle equazioni (XVII), e moltiplicate insieme le $n\nu\pi$ equazioni che se ne ottengono,

$$(XX) \begin{cases} x^\beta + g' x^{\beta-1} + \cdots + l' = 0, \quad x^\beta + g'' x^{\beta-1} + \cdots + l'' = 0, \\ x^\beta + g''' x^{\beta-1} + \cdots + l''' = 0, \ \ldots, \ x^\beta + g^{(n\nu\pi)} x^{\beta-1} + \cdots + l^{(n\nu\pi)} = 0, \end{cases}$$

ci verrà in fine un'equazione

$$(Z) \qquad x^{n\nu\pi\beta} + Gx^{n\nu\pi\beta-1} + \cdots + L = 0,$$

i coefficienti della quale saranno anch'essi funzioni razionali dei coefficienti della (A).

Ciò presupposto, riflettasi che pel VI, caso 2°, (n° 29) tanto nella (F), quanto nelle funzioni

$$f(x')(x'')(x''') \ldots (x^{(\mu)}), \qquad f(x')(x'') \ldots (x^{(\alpha)})$$

esposte nel IV, Caso 2°, (n° 29) niuna delle radici che entrano in una delle funzioni componenti può entrare nelle altre. Dunque, tutte le radici delle equazioni (XX) essendo fra loro diverse, l'equazione (Z) non sarà che la (A) medesima, e quindi avremo il suo esponente $n\nu\pi\beta = m$. In conseguenza di ciò dovendo la (A) essere abbassabile ad un'equazione (Y), in cui l'esponente $n\nu\pi = \frac{m}{\beta}$, e la radice $l = x' x'' x''' \ldots x^{(\beta)}$; troverò questa ridotta, operando come è stato insegnato nel n° 39. Poichè la (Y) è riducibile anch'essa ad un'Equazione (V) avente l'esponente $n\nu$, e la radice $q = l' l'' l''' \ldots l^{(\pi)}$, col metodo medesimo (n° 39) determinerò dalla (Y) questa (V). Finalmente essendo ancora la (V) abbassabile alla

$$u^n + a u^{n-1} + b u^{n-2} + \cdots = 0,$$

determinerò da essa (V) quest'ultima equazione operando nella solita maniera (n° 39). Ciò fatto, dalle radici u', u'', u''', ..., $u^{(n)}$ determinate, sciogliendo la

$$u^n + a u^{n-1} + b u^{n-2} + \cdots = 0,$$

determino col mezzo del n° 40, e seguente, le equazioni (XVIII); quindi coi valori q', q'', q''', ..., $q^{(n\nu)}$ ricavati dalle (XVIII) trovo le Equazioni (XIX); e finalmente mediante i valori l', l'', l''', ..., $l^{(n\nu\pi)}$ radici della (XIX) determinate le equazioni (XX), la soluzione di queste ultime ci darà tutte le radici della (A).

Digitized by Google

Dunque, se tale è il rapporto particolare fra le radici della (*A*), che siano determinabili delle equazioni ulteriori di grado sempre inferiore, dalla soluzione delle quali si possa in seguito ottenere più facilmente il valore delle radici x', x'', x''', ..., $x^{(m)}$; anche in allora il nostro metodo servirà pienamente alla soluzione del problema, non avendosi perciò che a replicare sulle equazioni successive le medesime operazioni.

50. Onde poter dire pienamente soddisfatto ai tre importantissimi quesiti che ci siamo proposti a principio, non più rimane, a noi sembra, da considerarsi che un solo caso, e tale è il seguente. Supposte

$$u', \quad u'', \quad u''', \ldots, u^{(n)}, \quad u^{(n+1)}, \quad u^{(n+2)}, \ldots, u^{(p)}$$

le radici tutte della (*C*), e tra queste esprimendosi dalle prime n le radici della (*D*), può succedere che, a cagione dei valori particolari delle x', x'', x''', ..., $x^{(m)}$ alcune delle u', u'', u''', ..., $u^{(n)}$ siano non solamente uguali tra loro, ma che siano uguali ancora ad alcune delle altre $u^{(n+1)}$, $u^{(n+2)}$, ..., $u^{(p)}$, come se per esempio si voglia $u' = u'' = u^{(n+1)} = u^{(n+2)} = u^{(n+3)}$. Per questo accidente esigonsi delle riflessioni ulteriori; ma essendo questa Memoria riuscita già troppo prolissa, serberemo simili riflessioni ad un'altra, nella quale, se per la Dio mercè il potremo, procureremo di aggiungere qualche metodo particolare, onde agevolare maggiormente i calcoli nelle pratiche applicazioni.

Frattanto se mai si voglia che accada l'uguaglianza ora indicata tra i valori della u inservienti alla dimostrazione del Teorema del n° 23; se si voglia cioè che là pure alcune delle u', u'', u''', ..., $u^{(n)}$ radici della equazione (V) non solo si uguaglino fra loro, ma uguaglino ancora alcuni fra gli altri valori $u^{(n+1)}$, $u^{(n+2)}$, ..., $u^{(p)}$ della $u = \pm x'x''x''' \ldots x^{(\alpha)}$, come se per esempio si voglia $u' = u^{(n+1)} = u^{(n+2)}$; sarà necessario osservare, per tutta esattezza, se questo caso altera punto la verità del Teorema indicato. Se sia $u' = u^{(n+1)} = u^{(n+2)}$ allora allo stesso valore u' corrispondendo egualmente i tre valori t', $t^{(n+1)}$, $t^{(n+2)}$ della t, i tre τ', $\tau^{(n+1)}$, $\tau^{(n+2)}$, della τ, ..., non potremo più dire immediatamente che i coefficienti P, ... della (VII) siano funzioni razionali dei coefficienti g, ... della (V). In tal caso però dovremo cercare il valore di questi coefficienti P, ... non già dagli altri g, ..., ma dalla (*B*), o dalla $T' = h$, che da essa deriva (n° 20): essendo solamente di numero n i valori della (*B*) uguali a K, ed essendo i coefficienti P, ... tante funzioni delle x', x'', x''', ..., $x^{(m)}$, che conservano sempre lo stesso valore a tutte quelle permutazioni per cui hanno luogo le uguaglianze (IV), ne segue, che saranno essi tutti determinabili razionalmente dalla K; ora questa K è quantità commensurabile (n° 23); dunque eziandio nell'ipotesi ora fatta le quantità P, ..., e quindi l'equazione (VII) risulteranno razionali. Dunque ancora in questo caso sarà vero il Teorema del n° 23, e però, etc.

51. Da quanto poi abbiamo detto finora concluderemo che, *posta* (*A*) *equazione semplice*:

1° *Essa non è mai riducibile opportunamente alla propria soluzione, ogni qualvolta il suo esponente m sia numero primo* (n° 34).

Digitized by Google

2° *Allorchè la* (A) *è abbassabile, potrà sempre determinarsi un'equazione, l'esponente della quale sia un divisore esatto dell'esponente* m *della data, e supposto* n *l'esponente della ridotta, ed* $m = \mu n$, *la soluzione di due equazioni, la prima di grado* n, *la seconda di grado* μ *ci daranno il valore di tutte le radici* x', x'', x''', ..., $x^{(m)}$ (n° 35).

3° *Nella ipotesi che* m *abbia più di due divisori, come nel caso di* $m = n\nu\pi\beta$, *potrà darsi, a cagione di particolare rapporto fra le* x', x'' x''', ..., $x^{(m)}$, *che si ottenga il valore di queste radici con la soluzione di tante equazioni, i gradi delle quali vengano espressi da tutti i fattori* n, ν, π, β, *dell'esponente* m (n° 49).

4° Se le ultime equazioni ottenute nella riduzione risultano tutte di grado < 5, allora potremo attualmente avere la soluzione della data, ma se qualcuna delle equazioni accennate diventa di grado non < 5, ed è insieme irreducibile a grado inferiore; allora diremo che la data (A), quantunque abbassata di grado, pure è incapace di soluzione. Ciò non pertanto, anche nel caso che le ridotte divengano di grado > 4, non dobbiamo già credere che l'eseguito abbassamento sia inutile; essendo le ridotte di grado minore del grado della data, potremo più agevolmente applicare ad esse i metodi di approssimazione.

5° Il metodo da noi stabilito nei n^{i} 35, 36, 39, etc. ci dimostra non solamente quali equazioni sono abbassabili opportunamente alla propria soluzione, e quali no; ma ci somministra ancora nelle prime tra queste l'abbassamento attuale: dai medesimi n^{i} 35, 36, 39, etc. apprendiamo in seguito, come dalle radici della ridotta possiamo ricavare le radici della proposta.

6° Succeda o no tra i valori della u il caso del n° 50, la ridotta (D) è sempre determinabile col nostro metodo, mentre la data (A) sia capace di abbassamento opportuno alla propria soluzione.

Fine della Memoria

« Della soluzione delle equazioni algebraiche determinate particolari di grado superiore al quarto ».

Digitized by Google

ANNOTAZIONI

DI

ETTORE BORTOLOTTI

AL TOMO I DELLE OPERE MATEMATICHE

DI PAOLO RUFFINI

Digitized by Google

Digitized by Google

ANNOTAZIONI

DI

ETTORE BORTOLOTTI

AL TOMO I DELLE OPERE MATEMATICHE

DI PAOLO RUFFINI

[1], pag. 10.

N° 15. La proposizione: *una funzione razionale, intera, non costante delle variabili r, s, t, ..., z, si annulla almeno per un sistema di valori attribuiti alle variabili,* è sempre in questo libro supposta nota al lettore; più innanzi (pag. 11, n° 17) si legge infatti: « Sappiamo già dall'Algebra cosa intender « si debba col nome di equazione algebraica determinata, e quali sieno quelle quantità che diconsi « sue radici ».

[2], pag. 16.

N° 23. Con la frase « *toltane la quantità* α », qui il RUFFINI intende dire: *tolti tutti i termini che contengono* α *come fattore.*

[3], pag. 36.

N° 50. Il RUFFINI qui dice « la T, non essendo evidentemente che una funzione intera delle x, z, « od una costante, non potrà mai acquistare che un valore finito od infinitesimo », per esprimere che *il massimo limite, per* $z = 0$, *del valore assoluto della* T *è finito.*

[4], pag. 63.

N° 97. La proposizione che il RUFFINI stabilisce in questo n° e nei seguenti fino al n° 104, con linguaggio moderno si enuncia:

Se una funzione $y = f(x', \ldots, x^{(m)})$ *delle variabili* $x', x'', \ldots, x^{(m)}$ *rimane invariata, per la sua forma, quando su di essa si eseguiscano le sostituzioni del gruppo* $\{1, S_2, \ldots, S_p\}$, *non può assumere, per tutte le possibili sostituzioni fra le variabili, più di* $\frac{m!}{p}$ *valori diversi.*

Più innanzi, al n° 261, (pag. 164 di questo volume), p è detto *grado di uguaglianza della funzione* y.

La dimostrazione è fatta con la ripetuta applicazione del principio:

Se la funzione y *rimane invariata per la sostituzione* S; *e se, per effetto della sostituzione* T, *si cangia nella funzione* y'; *quest'ultima rimane invariata per la sostituzione* $T^{-1} S T$, *trasformata della* S *per la* T.

Così per es. egli dice che, *se*

$$f(x')(x'')(x''')(x^{IV}) \ldots = f(x''')(x'')(x')(x^{IV}) \ldots,$$

Digitized by Google

deve anche essere

$$f(x'')(x')(x''')(x^{IV}) \ldots = f(x''')(x')(x'')(x^{IV}) \ldots .$$

Ed è qui

$$S = (x', x'''), \quad T = (x', x'').$$

Il quale principio è enunciato nel precedente n° 96; come vedrà chi osservi che: la sostituzione fra le variabili che dopo una sostituzione T occupano posti determinati, è appunto la trasformata, mediante T, di quella che si aveva fra le variabili che prima della T occupavano quei posti medesimi.

[5], pag. 85.

N° 135. Intendesi qui IRRAZIONALE ALGEBRICA ESPRIMIBILE CON RADICALI. Il concetto di queste funzioni irrazionali algebriche è chiarito dallo stesso RUFFINI nelle sue *« Riflessioni intorno alla soluzione delle equazioni algebraiche generali »* [Modena 1813; presso la Società tipografica (pag. I-VIII; 1-140), pag. 10], con le parole:

« Si rappresentino in generale con la lettera P, e in particolare con le P', P'', P''', ..., tante « funzioni algebraiche razionali qualsivogliano dei coefficienti A, B, C, ..., ed espresso con la p un « numero intero qualunque, e con la α una qualsivoglia delle radici p^{esime} dell'unità, si ponga:

$$\alpha \sqrt[p]{P} = Q,$$

« ed in particolare

$$\alpha' \sqrt[p']{P'} = Q', \quad \alpha'' \sqrt[p'']{P''} = Q', \quad \alpha''' \sqrt[p''']{P'''} = Q''', \ldots .$$

« Formate quindi con le P, e con le Q delle altre funzioni algebraiche razionali qualsivogliano, « che in generale indicherò con la F_1, ed in particolare con le F_1', F_1', F_1'', ..., si faccia:

$$\beta' \sqrt[q']{F_1'} = R', \quad \beta'' \sqrt[q'']{F_1''} = R'', \quad \beta''' \sqrt[q''']{F_1'''} = R''', \ldots$$

« ed in generale

$$\beta \sqrt[q]{F_1} = R,$$

« ove q esprima un'intero qualunque, e β una qualunque delle radici q^{esime} dell'unità.

« Si costruiscano di nuovo con le P, Q, R altre funzioni algebraiche razionali, e denominate « queste F_2', F_2', F_2'', ..., ed in generale F_2, pongasi, come precedentemente:

$$\gamma' \sqrt[r']{F_2'} = S', \quad \gamma'' \sqrt[r'']{F_2''} = S'', \quad \gamma''' \sqrt[r''']{F_2'''} = S''', \ldots,$$

« ed in generale

$$\gamma \sqrt[r]{F_2} = S,$$

« denotandosi con la r un qualsivoglia intero e con la γ una qualunque delle radici r^{esime} dell'unità.

« Nello stesso modo chiamata F_3 ed in particolare F_3', F_3', F_3''', ..., delle nuove funzioni alge- « braiche razionali qualsivogliano delle P, Q, R, S, e denominata δ una qualunque delle radici s^{esime} « della unità, ove s è un intero qualunque, facciasi

$$\delta \sqrt[s]{F_3} = T$$

« ed in particolare

$$\delta' \sqrt[s']{F_3'} = T', \quad \delta'' \sqrt[s'']{F_3''} = T'', \quad \delta''' \sqrt[s''']{F_3'''} = T''', \ldots,$$

« e si prosegua con le P, Q, R, S, T a formare altre funzioni algebraiche razionali e ad estrarre da « queste altre radici.

« Così operando, e seguitando così quanto fa d'uopo, è facile a vedersi che potremo sempre col « mezzo delle accennate P, Q, R, S, T, ... esprimere una qualunque funzione algebraica finita dei coef- « ficienti A, B, C, D, ... comunque sia essa complicata ».

Digitized by Google

[6], pag. 100.

N° 147. L'argomento trattato in questo n° e nei seguenti fino al termine del Capitolo, è stato ripreso dal RUFFINI nei n^i 16-20 della Memoria: « *Della soluzione delle Equazioni algebraiche determinate particolari di grado superiore al quarto* ».

[*a*) Memorie di Matematica e di Fisica della Società Italiana delle Scienze, Tomo IX (Modena 1802), pp. 444-526.

b) Questo volume, pp. 343-406].

[7], pag. 112.

N° 165 (nota). La presente osservazione si trova nella « *Nota da aggiungersi a quelle del n° 55* » che il RUFFINI ha fatto stampare in un foglietto non numerato posto alla fine della sua Memoria: « *Della insolubilità delle equazioni algebraiche generali di grado superiore al quarto* ». [Memorie di Matematica e di Fisica della Società Italiana delle Scienze, tomo X, parte II (Modena 1803), pp. 410-470 (con la data 18 Dicembre 1802)].

Si noti peraltro che questa aggiunta non si trova nel Volume delle Memorie della Società Italiana delle Scienze, ma solo negli estratti, stampati a parte. Dei quali un esemplare esiste nella Biblioteca Estense di Modena, rilegato, insieme con altre Memorie di RUFFINI, in un volume in 4° il quale ha un frontespizio con la leggenda « Opuscoli matematici di PAOLO RUFFINI » e la indicazione di catalogo: 23.D.61.

[8], pag. 124.

N° 191 (nota). La presente osservazione si trova in una nota a piè delle pagine 454-457 del Tomo X, parte II delle « Memorie di Matematica e di Fisica della Società Italiana delle Scienze » (Modena 1803) nella Memoria: « *Della insolubilità delle equazioni algebraiche generali di grado superiore al quarto* » citata nella nota precedente.

[9], pag. 127.

N° 197 (nota). La presente osservazione si trova in una nota a piè delle pagine 454-457, nella Memoria « *Della insolubilità,* etc. » citata nella nota precedente.

[10], pag. 142.

N° 226. Il concetto di *quantità algebrica* è stato meglio precisato dal RUFFINI al n° 6 (pag. 10) della sua Memoria: « *Riflessioni intorno alla soluzione delle equazioni algebraiche generali* », come abbiamo già visto nella nota [5].

[11], pag. 143.

N° 228. Cioè per effetto della sostituzione ciclica (x', x'', x''').

[12], pag. 143.

N° 228. In linguaggio moderno diremmo che la funzione

$$4^a.\ f(x')(x''')(x'')$$

che si ottiene dalla 1ª con lo scambio (x'', x'''), rimane invariata per la trasformata, mediante questo scambio, della sostituzione (x', x''', x''), che per ipotesi lascia invariata la prima, cioè per la sostituzione (x', x'', x''').

Digitized by Google

[13], pag. 143 (Appendice, pag. 328).

N° 229. In questo articolo il RUFFINI si pone il quesito di *determinare la forma generale delle funzioni che rimangono invariabili per le sostituzioni di un gruppo dato.*

Indicando con z', z'', z''', ..., i valori che una funzione $z = \varphi(x')(x'')(x''')\ldots$ assume per le sostituzioni del gruppo, la soluzione del quesito proposto è ottenuta col prendere una funzione qualunque simmetrica delle z', z'', z''', ...

Si noti che, a norma della convenzione posta al n° 3, scrivendo:

$$\varphi(x')(x'')(x''')\ldots,$$

si deve intendere *una funzione che cambia di valore per ogni permutazione delle variabili in essa contenute.* Il RUFFINI spesso usa lo stesso simbolo anche per indicare funzioni sulle quali non è fatta nessuna ipotesi circa il numero dei valori di cui sono suscettibili: quando peraltro egli ha bisogno di costruire funzioni che rimangano invariabili per le sostituzioni di un dato gruppo, *e per quelle sole,* egli ha cura di scegliere la φ in modo che cambi valore per ogni possibile sostituzione.

Così egli fa, per es., al n° 232.

Si veda, su questo argomento, anche la Memoria: « *Della soluzione delle equazioni algebraiche determinate* » al n° 6 (pag. 347 di questo volume).

[14], pag. 146.

N° 232. La funzione ad $m! = \pi$ valori qui considerata:

$$Z = Px' + Qx'' + Rx''' + \ldots,$$

è da taluni detta *funzione di* GALOIS [H. VOGT, *Leçons sur la résolution algébrique des équations* (Paris 1895), pag. 22]; così la risolvente:

$$y^{\pi} + My^{\pi-1} + \ldots = 0,$$

che ammette per radici quegli $m!$ valori, è comunemente detta *Risolvente di* GALOIS.

Anche questa risolvente è stata considerata dal RUFFINI (pp. 59, 60 di questo volume) ed è bene ricordare che il nome di GALOIS non fu dato per indicare il primo scopritore di quella risolvente. Tale nome fu proposto dal BETTI nella sua Memoria: *Sulla risoluzione delle equazioni algebriche* [Annali di Scienze matematiche e fisiche compilati da BARNABA TORTOLINI, tomo III (febbrajo 1852), pp. 49-115, pag. 86], « *ad onore di quel profondo geometra* ».

[15], pag. 151.

N° 240. In linguaggio moderno: *Per risolvere l'equazione generale del 3° grado occorre aggiungere al campo di razionalità una funzione appartenente al gruppo alternante.*

[16], pag. 156.

N° 246. Secondo le notazioni usate dal RUFFINI, una funzione è della forma

$$f[(x', x''), (x''', x^{IV})],$$

se rimane invariabile per le sostituzioni

$$(x', x''), \quad (x''', x^{IV}), \quad (x', x''')(x'', x^{IV});$$

e deve quindi ammettere il gruppo (di ordine 8) generato da quelle tre sostituzioni.

[17], pag. 157.

N° 246. Una funzione della forma $\varphi(x', x'')(x''', x^{IV})$, appartiene al gruppo (di ordine 4) generato dalle sostituzioni

$$(x', x''), \quad (x''', x^{IV}).$$

Digitized by Google

[18], pag. 157.

N° 246. Una funzione della forma $F(\chi', \chi'')$ è simmetrica nelle χ', χ''.

[19], pag. 161.

Ecco il riscontro fra la nomenclatura del RUFFINI e quella ora in uso.

N° 256. *Permutazione semplice.*	Gruppo generato da una sola sostituzione.
Permutazione composta.	Gruppo che ha più di una sostituzione generatrice.
N° 257. *Permutazione semplice di primo genere.*	Gruppo generato da una sostituzione ciclica.
Permutazione semplice di secondo genere.	Gruppo generato da una sostituzione non ciclica (composta di più cicli).
N° 258. *Permutazioni componenti.*	I cicli in cui si scompone la sostituzione generatrice, o le varie sostituzioni generatrici di uno stesso gruppo.
N° 259. *Permutazione composta di primo genere.*	Gruppo le cui sostituzioni generatrici operano sopra elementi tutti diversi, quelli dell'una sostituzione da quelli di una qualunque delle altre (*sempre intransitivo*).
Permutazione composta di secondo genere.	*Gruppo imprimitivo* e più generalmente ogni gruppo che contiene un sottogruppo G imprimitivo (rispetto agli elementi su cui opera), e che soddisfa inoltre alla condizione, che, se contiene sostituzioni non appartenenti a G, gli elementi su cui esse operano sieno tutti diversi, quelli dell'una da quelli di una qualunque delle altre, ed anche da quelli su cui opera G.
Permutazione composta di terzo genere.	Gruppo primitivo, e più generalmente gruppo non soddisfacente le condizioni richieste nei due casi precedenti.
N° 261. *Grado di eguaglianza di una funzione.*	*Ordine del gruppo* cui la funzione appartiene.

[20], pag. 164.

N° 262. Questa proposizione, con linguaggio moderno, si enuncia:
Il gruppo generato da una sostituzione circolare ha ordine uguale al grado.

[21], pag. 167.

N° 264. Le cinque linee di questo articolo, dalle parole « *mentre i numeri g, h, i, ...* » fino alla fine del n° si sono aggiunte, in conformità alla osservazione fatta dal RUFFINI in una nota a piè

Digitized by Google

delle pp. 454-457 della Memoria già citata [7]: *« Della insolubilità delle equazioni algebraiche generali di grado superiore al quarto »*.

La proposizione, che qui il RUFFINI ha stabilito, si enuncia con linguaggio moderno:

L'ordine del gruppo generato da una sostituzione composta di più cicli è dato dal minimo multiplo comune degli ordini dei cicli componenti.

[22], pag. 167.

N° 265. *L'ordine del gruppo generato da parecchie sostituzioni che operano sopra elementi tutti distinti, quelli dell'una sostituzione da quelli di una qualunque delle altre, è dato dal prodotto degli ordini delle sostituzioni generatrici.*

[23], pag. 168 (Appendice, pag. 331).

N° 266. Questo teorema, nel quale è stata introdotta la modificazione indicata alle pp. 454-457 della citata Memoria [7]: *« Della insolubilità delle equazioni algebraiche generali di grado superiore al quarto »* era in origine enunciato senza la condizione *« formata di due soli componenti »*.

E, dopo la frase: « dunque dovrà essere $p = bc$ », conteneva il periodo: « Nel modo istesso, se « tre, quattro, etc. sono le permutazioni componenti, e se b, c, d; etc. sono rispettivamente i numeri « esprimenti le loro radici, troveremo dover essere $p = bcd$, $p = bcde$, ... ».

In linguaggio moderno abbiamo la proposizione:

Se la sostituzione S composta di due cicli T_1, T_2 opera sopra un numero primo di lettere, il gruppo generato dalla S è coincidente con quello generato dalle T_1, T_2. E perciò, secondo la nomenclatura del RUFFINI, il gruppo dovrebbe dirsi *composto di primo genere* piuttosto che *semplice del secondo genere*.

In particolare:

N° 267. Se un gruppo contiene la sostituzione (1, 2) (3, 4, 5), contiene anche i due cicli (1, 2), (3, 4, 5).

[24], pag. 168.

Tavola VI. Questa contiene tutte le permutazioni che si ottengono dalla x', x'', x''', x^{IV}, x^{V} con le sostituzioni del gruppo G_5 totale in 5 lettere.

Per ottenere queste, egli ha prima costruito il gruppo G_4, totale nelle 4 lettere, cui corrisponde la prima colonna del quadro, e, mediante la sostituzione $S_5 = (1, 2, 3, 4, 5)$, ha formato successivamente i prodotti

$$S_5 G_4, \quad S_5^2 G_4, \quad S_5^3 G_4, \quad S_5^4 G_4,$$

ai quali ordinatamente corrispondono le quattro colonne successive.

Le permutazioni di una stessa linea si ottengono ciascuna dalla precedente, permutando circolarmente le 5 lettere.

Le 24 permutazioni della prima colonna, corrispondenti al gruppo G_4, totale nelle 4 lettere, si ottengono da G_3, mediante moltiplicazione a sinistra, per le successive potenze di $S_4 = (1, 2, 3, 4)$. Le prime 6 sono corrispondenti al gruppo G_3, e le prime due corrispondono alle sostituzioni 1, $S_2 = (1, 2)$.

Nella Memoria: *« Della insolubilità delle equazioni algebraiche generali di grado superiore al quarto »*, già citata più volte [7], il RUFFINI spiega meglio questo modo di generazione dei successivi gruppi totali di sostituzioni; mostra come si formi così il gruppo G_6, totale nelle 6 lettere e come il procedimento si estenda ad un numero qualunque di lettere.

Le sostituzioni

$$S_1 = 1, \quad S_2 = (1, 2), \quad S_3 = (1, 2, 3), \ \ldots, \ S_m = (1, 2, 3, \ldots, m)$$

assumono così una importanza speciale, e si debbono, in qualche modo, riguardare come *fattori ele-*

Digitized by Google

mentari, mediante i quali si può, ed in modo unico, rappresentare qualunque sostituzione T_m, negli m elementi, mediante un prodotto della forma:

$$T_m = S_m^{\alpha_m} S_{m-1}^{\alpha_{m-1}} \dots S_p^{\alpha_p} \dots S_3^{\alpha_3} S_2^{\alpha_2},$$

essendo α_p uno dei numeri 1, 2, ..., p.

Dalla tavola VI risulta in particolare che *una sostituzione T_5 nelle 5 lettere può sempre rappresentarsi come un prodotto della forma*

$$T_5 = S_5^{\alpha_5} T_4$$

dove T_4 è una sostituzione che opera soltanto su 4 lettere; e che si ha parimenti

$$T_4 = S_4^{\alpha_4} T_3:$$

proprietà delle quali RUFFINI fa uso spesso nel seguito.

Nel n° 269 egli osserva che, *se una funzione delle m lettere rimane invariata per un ciclo dell'ordine p; semplicemente col cambiare nome alle lettere, si potrà fare si che tale ciclo sia*

$$S_m = (1, 2, 3, \dots, m).$$

I valori diversi di quella funzione dipendono dunque dalle sostituzioni del gruppo G_{m-1}, e per $m = 5$ sono quelli della prima colonna nella tavola VI.

[25], pag. 169 (Appendice, pag. 331).

Il RUFFINI si propone di provare che *non esistono funzioni di 5 variabili le quali, per le varie sostituzioni fra le variabili, possano assumere tre, o quattro, od otto valori diversi.*

Esamina perciò i possibili gruppi di sostituzioni nelle 5 lettere, e ne calcola gli ordini.

Peraltro egli fa questo studio esaminando direttamente quanti valori diversi la funzione supposta può assumere nei vari casi che considera.

Si giova a tal fine della tavola VI, ed i ragionamenti che egli fa si possono immediatamente riferire ai corrispondenti gruppi di sostituzioni tenendo conto delle osservazioni fatte nella nota [24].

RUFFINI, dopo la pubblicazione di quest'opera, ha accuratamente riveduti tali ragionamenti e li ha in parte modificati, completandoli e rendendoli più chiari, in un opuscolo col titolo *« Rischiarimenti e risposte alle obbiezioni »* rimasto fino ad ora inedito, ed ora pubblicato in questo stesso volume, come *Appendice alla teoria delle equazioni.*

Per far meglio risaltare l'importanza dei risultamenti conseguiti in questo punto dal RUFFINI, ne diamo qui gli enunciati riferendoci alla teoria delle sostituzioni ed usando la terminologia moderna; ma seguendo strettamente il testo.

N° 270. *Gruppi imprimitivi.*

Disponendo di 5 elementi non si possono fare gruppi imprimitivi se non operando su quattro di essi, e dividendo questi in sistemi di due elementi per ciascuno. Si ha dunque il gruppo generato dalle sostituzioni

$$(x', x''), \quad (x''', x^{IV}), \quad (x', x'')(x''', x^{IV}),$$

che ha ordine $p = 8$.

Il RUFFINI qui trascura, forse perchè contenuto nel precedente, il gruppo di ordine $p = 4$ generato dalle

$$(x', x'')(x''', x^{IV}), \qquad (x', x''')(x'', x^{IV}).$$

N° 271. *Gruppi che contengono la sostituzione ciclica*

$$S_5 = (x', x'', x''', x^{IV}, x^{V}).$$

(Al n° 275 sarà dimostrato che occorre considerare questi soli gruppi).

1° CASO. — Supponiamo anzitutto di considerare il gruppo che contiene, insieme con la S_5, la trasposizione

$$S_2 = (x', x'').$$

Digitized by Google

Conterrà anche la trasformata

$$T_2 = (x'', x''')$$

ed il prodotto

$$T_2 S_2 = (x', x'', x''') = S_3$$

perciò conterrà tutto il gruppo G_3 totale nei tre elementi x', x'', x'''.

La trasformata di S_2 mediante S_5^2 è $T_3 = (x''', x^{IV})$ ed il prodotto $T_3 S_3 = (x', x'', x''', x^{IV}) = S_4$ sarà pure contenuto nel gruppo: questo, contenendo S_4 e G_3, coincide col gruppo totale G_4. Finalmente il gruppo dato, contenendo G_4 ed S_5, conterrà anche G_5, cioè è il gruppo totale nelle 5 lettere.

Il suo ordine è $p = 120$.

2° Caso. — *Contenga, insieme con la S_5, una trasposizione T qualsivoglia.*

I sotto casi essenzialmente distinti, oltre quello considerato al Caso 1°, sono quelli di

$$T = (x', x'''), \quad T = (x', x^{IV})$$

poichè tutti gli altri scambi si trasformano in questi per la S_5 o per una delle sue potenze.

Se sia $T = (x', x''')$, facendo il prodotto $S_5 T$ otteniamo

$$S_5 T = (x', x'', x''', x^{IV}, x^{V})(x', x''') = (x', x'')(x''', x^{IV}, x^{V}).$$

Il nostro gruppo, contenendo la sostituzione che risulta dai due cicli (x', x''), (x''', x^{IV}, x^{V}), contiene pel n° 267, anche ciascuno di questi cicli, ed in particolare lo scambio (x', x''). Siamo dunque ricondotti al Caso 1° ed abbiamo $p = 120$.

Sia $T = (x', x^{IV})$. Avremo ancora

$$S_5 T = (x', x'', x''')(x^{IV}, x^{V}),$$

e, come precedentemente, osserveremo che il gruppo contiene ancora lo scambio (x^{IV}, x^{V}), il cui trasformato mediante S_5^2 è (x', x'').

Concludesi dunque che il gruppo generato dalla sostituzione $S_5 = (x', x'', x''', x^{IV}, x^{V})$ e da qualsivoglia trasposizione coincide col primitivo ed ha ordine $p = 120$.

3° e 4° Caso. — *Il gruppo che è generato dalla S_5 e da un ciclo qualunque del terzo ordine è l'alternante ed ha ordine $p = 60$.* (La discussione procede in modo analogo al precedente).

5° e 6° Caso. — *Il gruppo generato dalla S_5 e da una sostituzione composta di due cicli, od è l'alternante, od è un sottogruppo di questo di grado $p = 10$.*

Quest'ultimo caso si ha se la sostituzione aggiunta alla S_5 è la $T = (x', x^{IV})(x'', x''')$ od una delle sue trasformate mediante le potenze della S_5.

7° ed 8° Caso. — *Il gruppo generato dalla S_5 e da un ciclo del 4° ordine, od è il gruppo simmetrico, od è un sottogruppo dell'ordine $p = 20$.*

9° Caso. — *Il gruppo generato dalla S_5 e da un altro ciclo del 5° ordine ha ordine $p = 60$.*

È ovvio osservare che, se la seconda sostituzione fosse una potenza della prima, si avrebbe sempre $p = 5$.

10° Caso. — Tenendo conto del n° 267 ridurremo sempre ad uno dei casi precedenti la ricerca dell'ordine di un gruppo che, insieme con la S_5 contenga una seconda sostituzione qualunque.

Poichè questa o sarà ciclica, o sarà composta di più cicli; ed in quest'ultimo caso questi cicli saranno due soli, o del 2° o del 3° ordine.

[26], pag. 174 (Appendice, pag. 334).

N° 273. L'esemplare a stampa, sul quale si eseguisce la presente edizione, porta una nota in margine, di pugno del Ruffini, nella quale si legge:

« Il teorema del n° 273, vero generalissimamente nelle funzioni di cinque radici, o di un numero « di radici *primo*, non così quando il numero delle radici non fosse primo. Perciò nell'applicazione del « medesimo sono necessarie alcune avvertenze. Vedasi un foglio in data 24 agosto 1802 ». Nonostante

Digitized by Google

le più diligenti ricerche, non sono ancora riuscito a rintracciare il foglio, qui citato, fra le carte RUFFINI.

Il teorema, enunciato con linguaggio moderno, è il seguente:

Se in un gruppo di sostituzioni fra i cinque elementi x', x'', x''', x^{IV}, x^{V} *insieme con una sostituzione qualunque, si trovano anche tutte le sue trasformate mediante la*

$$S_5 = (x', x'', x''', x^{IV}, x^{V})$$

vi si dovrà anche trovare la sostituzione S_5 *medesima.*

[27], pag. 175 (Appendice, pag. 337).

N° 274. La proposizione contenuta nel presente articolo è la seguente:

Se un gruppo di sostituzioni fra cinque elementi non contiene nessun ciclo del 5° ordine, non può avere ordine p multiplo del 5.

RUFFINI aveva dapprima lasciato questo teorema senza esplicita dimostrazione. Ma nel fascicolo dei suoi manoscritti, riprodotto nella nostra Appendice col titolo: *« Rischiarimenti e risposte alle obbiezioni »*, si trova la dimostrazione che abbiamo riportata nel testo.

Il teorema si può anche enunciare al modo seguente: *Se un gruppo di sostituzioni nelle 5 lettere ha ordine p multiplo di 5 contiene un sottogruppo del 5° ordine.* Ed è il primo esempio della proposizione che ora è conosciuta col nome di *Teorema di* SYLOW.

[28], pag. 175 (Appendice, pag. 337).

Nel manoscritto di RUFFINI (riportato integralmente nella Appendice) sta scritto *tre*, in luogo di *quattro*.

Nel testo si è corretto l'evidente errore materiale.

[29], pag. 177.

N° 275. *Con cinque elementi non si possono formare gruppi di sostituzioni degli ordini 15, 30, 40:* ed in altri termini: *Nelle cinque variabili* x', x'', x''', x^{IV}, x^{V} *non esistono funzioni ad 8, a 4, a 3, valori.*

Ciò perchè, essendo i numeri 15, 30, 40 multipli del 5, gruppi con tali ordini dovrebbero contenere una sostituzione fra le 5 variabili, e non ve n'ha di tali gruppi (n° 271) i quali abbiano ordine p eguale ad uno di quei tre numeri.

[30], pag. 177 (Appendice, pag. 338).

Nei n^i 277-283, si dimostra la impossibilità di risolvere algebricamente le equazioni del 5° grado (Vedasi anche l'Appendice).

Per renderne più facile la lettura, daremo con terminologia più moderna, un rapido cenno del procedimento seguito dal RUFFINI per questa dimostrazione.

N° 277. (Vedasi anche l'Appendice alla pag. 338). *Se la Z, funzione razionale delle radici di una equazione generale del quinto grado, è suscettibile di almeno cinque valori diversi, i quali sono radici di una risolvente della forma* $Z^5 - M = 0$, *essa Z dovrà avere i suoi 120 valori tutti diseguali fra loro.*

Infatti: Se con Z', Z'', Z''', Z^{IV}, Z^{V} si rappresentano le cinque radici della $Z^5 - M = 0$, e con α una delle radici quinte immaginarie della unità, si dovrà avere:

$$Z'' = \alpha Z', \qquad Z''' = \alpha Z'', \qquad Z^{IV} = \alpha Z''', \qquad Z^{V} = \alpha Z^{IV}, \qquad Z' = \alpha Z^{V}.$$

Da cui si vede che quella stessa sostituzione che operata sulla Z' produce Z'', operata su Z'' produce Z''', operata su Z''' produce Z^{IV}, ecc., operata su Z^{V} riproduce Z'. Tale sostituzione ha dunque periodo 5, e può rappresentarsi con la $S_5 = (x', x'', x''', x^{IV}, x^{V})$.

Se ora la Z' non ha i suoi 120 valori tutti diversi, e per es. rimane invariata per una certa sosti-

Digitized by Google

tuzione T, le Z', Z'', Z^{IV}, Z^{V} rimarranno invariate rispettivamente per le trasformate di cotesta sostituzione mediante le potenze di S_5.

Ma avendosi $Z'' = \alpha Z'$, $Z''' = \alpha^2 Z'$, ..., $Z^{V} = \alpha^4 Z'$, vedesi che quelle sostituzioni che lasciano invariate le Z'', ..., Z^{V} lasciano anche invariata la Z', onde si vede che la Z' deve rimanere invariata, e per la supposta sostituzione T, e per tutte le trasformate di questa, mediante le potenze della S_5. Deve dunque ammettere la sostituzione S_5 medesima (n° 273) e sarà,

$$Z' = Z'' = \ldots = Z^{V}$$

cioè

$$Z' = \alpha Z' = \alpha^2 Z' = \ldots = \alpha^4 Z',$$

il che è impossibile.

N° 278. Pertanto il termine

$$M = Z^5$$

dovrà avere 24 valori tutti differenti.

I 120 valori della Z saranno le radici delle 24 equazioni:

$$Z^5 - M_1 = 0, \quad Z^5 - M_2 = 0, \quad \ldots, \quad Z^5 - M_{24} = 0.$$

N° 279. *La M è una funzione a 24 valori, che ammette la sostituzione ciclica*

$$S_5 = (x', x'', \ldots, x^{V})$$

ed i suoi diversi valori corrispondono alle sostituzioni del gruppo totale G nelle 4 lettere.

Conclusione di questi tre articoli si è che la M non può esprimersi razionalmente per i coefficienti della data; cioè che non si può costruire razionalmente (nel campo dei coefficienti) una trasformata della forma $Z^5 - M = 0$. *La risoluzione non può dunque incominciarsi con la estrazione di una radice quinta.*

Nemmeno può incominciare con la estrazione di una radice quarta o terza, perchè non esistono trasformate di questi ordini:

Dovrebbe perciò incominciare con la estrazione di una radice quadrata.

N° 280. Si supponga dunque formata una trasformata del secondo grado:

$$y^2 + My + N = 0,$$

e si cerchi se è possibile, dipendentemente da questa, la soluzione della proposta.

Occorrerebbe, in funzione delle radici di questa y', y'', determinare la M della trasformata

$$Z^5 - M = 0.$$

Questa M però, in funzione della y' e dei coefficienti della data si determina mediante una equazione del grado 12

$$M^{12} + aM^{11} + bM^{10} + \ldots = 0,$$

le cui radici sono i valori che la M assume per le sostituzioni del gruppo alternante nelle 4 lettere.

Tale equazione non sarà risolubile se non trasformandosi in una di grado inferiore.

1) Ma non posso costruire una trasformata del 4° grado, perchè funzioni a 4 valori, non esistono; e nemmeno esistono funzioni ad 8 valori, che assumano quattro valori per quelle permutazioni cui corrisponde la radice y', e quattro diversi per quella cui corrisponde y'' [questi ultimi si ottengono dai primi con lo scambio (x', x'')].

2) Nemmeno posso costruire trasformate del 3° grado perchè non esistono funzioni a 3 valori, nè esistono funzioni a 6 valori, dei quali 3 corrispondano ad y' e tre ad y''.

3), 4) Trasformate del 2° e del 1° grado non servono a far abbassare il grado della nostra equazione.

5) Esistono bensì trasformate del 6° grado, ma queste non si sanno risolvere.

N^i 281, 282, 283. *Non potendosi considerare altri radicali, che quelli del 3°, del 4°, del 5° ordine, e non potendosi da niuno di questi incominciare la risoluzione della equazione generale del 5° grado, sarà questa algebricamente impossibile.*

Digitized by Google

[31], pag. 184.

N° 285. La dimostrazione esatta di questo teorema si trova nel n° 55 della Memoria: « *Della insolubilità delle equazioni algebraiche di grado superiore al quarto* » (citata alla nota [7]).

In una nota posta a piè delle pp. 454-457 di quella memoria il RUFFINI avverte:

« Il presente Teorema è stato da me esposto per riguardo alle equazioni di 5° grado nel n° 276 « (*Teoria delle equazioni*) nel n° 285 è stato ivi enunciato relativamente alle equazioni di grado 6°, e « nel n° 289 è stato per analogia supposto rapporto alle equazioni di grado ulteriore.

« Confessar deggio però, che, quantunque sia esatta la dimostrazione del n° 276, tale non è « quella del n° 285: ed il primo a dimostrare con tutta esattezza un simil Teorema relativamente a « tutte le equazioni è stato PIETRO ABBATI nel n° 26 della di lui lettera ».

La lettera ABBATI, è stampata nello stesso tomo delle Memorie di Matematica e di Fisica della Società Italiana delle Scienze.

[32], pag. 203.

L'argomento del Capo XV, si trova con maggiore ampiezza sviluppato nella Memoria: «*Della soluzione delle equazioni algebraiche determinate particolari di grado superiore al 4°* » [Memorie di Matematica e di Fisica della Società Italiana delle Scienze, tomo IX (Modena 1802), pp. 444-526] la quale si trova ristampata in questo stesso volume (pp. 344-404).

Giova peraltro osservare che in questo capitolo già si introduce il concetto di *gruppo della equazione,* col considerare il gruppo di sostituzioni che lasciano inalterato il valore di una funzione razionale delle radici esprimibile razionalmente (n° 321); si dimostra che, se il gruppo si riduce alla unità, le radici si esprimono razionalmente (n^i 322-323); e, se si riduce ad una sola trasposizione (x', x''), le radici si esprimono razionalmente, dopo la aggiunta al campo di razionalità di un radicale quadratico (n° 324).

[33], pag. 325.

Dopo la pubblicazione della *Teoria generale delle equazioni* pervennero al RUFFINI parecchie domande di chiarimenti a dubbi ed obbiezioni; egli stesso, con un più profondo esame della questione, si persuase che la sua dimostrazione in parecchi punti poteva essere migliorata ed in alcuni luoghi corretta, e raccolse le annotazioni che andava facendo in un opuscolo di *Rischiarimenti e risposte alle obbiezioni,* specie di commentario, dove sono indicate le correzioni e le aggiunte che egli riteneva necessarie per il rigore e la precisione dei ragionamenti fatti nella *Teoria delle equazioni.*

In quel frattempo, un suo scolaro ed amico, PIETRO ABBATI, che ad istigazione sua aveva preso a studiare l'argomento, vide la possibilità di ottenere per strada più diretta alcune delle proposizioni su cui era fondato il Teorema della impossibilità, e pubblicò i suoi risultamenti in una lettera *) da cui RUFFINI prese lo spunto per la dimostrazione del 1802 nella Memoria: « *Della insolubilità delle equazioni algebraiche generali di grado superiore al quarto* » **).

Quell'opuscolo perciò rimase inedito, non senza danno per il RUFFINI, poichè in esso si trova la prima dimostrazione esatta e compiuta di alcune proposizioni fondamentali della Teoria delle sostituzioni, le quali nella seconda redazione del Teorema della impossibilità non compariscono, perchè non strettamente necessarie a quell'intento.

---

*) Lettera di PIETRO ABBATI Modenese al socio PAOLO RUFFINI, da questi presentata il dì 16 dicembre 1802 [Memorie di Matematica e di Fisica della Società Italiana delle Scienze, tomo X, parte II (Modena 1803), pp. 385-409].

**) Memorie di Matematica e di Fisica della Società Italiana delle Scienze, tomo X, parte II (Modena 1803), pp. 410-470.

Digitized by Google

[34], pag. 346.

N° 4. Se esiste una funzione razionale delle radici la quale si può esprimere razionalmente nel campo ampliato per la aggiunta di una quantità irrazionale {espressione formata con radicali (Vedi nota [5])}, esisterà anche una funzione razionale delle radici esprimibile razionalmente nel campo non ampliato.

[35], pag. 347.

Supposto che fra le radici esista una relazione

$$(B) \qquad f(x')(x'') \dots (x^{(\lambda)}) = K,$$

dove K è razionale (o si aggiunge al campo di razionalità) ed f è simbolo di funzione razionale, si consideri una funzione $\varphi(x')(x'') \dots = y$ la quale cambi di valore per ogni sostituzione. Considerando i valori

$$y_1 = y, \quad y_2 = s_2 y, \dots, y_n = s_n y,$$

che si hanno da y per le n sostituzioni

$$1, \quad s_2, \dots, s_n$$

le quali lasciano inalterata la (B) (equazione di relazione), il polinomio

$$(II) \qquad H = (y - y_1)(y - y_2) \dots (y - y_n) = y^n + Ey^{n-1} + \dots$$

sarà un *fattore razionale della risolvente generale.*

RUFFINI *pone in relazione la risolubilità della equazione proposta con le proprietà del gruppo*

$$G = \{1, s_2, \dots, s_n\}.$$

Questo, nel caso che il fattore (II) sia irriducibile nel campo considerato, è il *Gruppo di* GALOIS *relativo alla data equazione:* altrimenti contiene il gruppo di GALOIS come sottogruppo invariante.

È noto che ogni equazione speciale si può dedurre dalla generale con la aggiunta di una sola relazione $\Phi(x', \dots, x^{(m)}) = 0$ che abbia luogo fra le radici.

Occorre peraltro che questa sia determinata in modo opportuno. Ciò appunto il RUFFINI si studia di fare, come si vedrà ai n^i 16-20.

Il polinomio

$$H = (y - y_1)(y - y_2) \dots (y - y_n)$$

risolve il quesito: *Costruire una funzione che rimane inalterata per le sostituzioni di un dato gruppo, e per quelle sole.*

[36], pag. 356.

Le note ai n^i 10, 12, si trovano, frammezzo molti altri abbozzi, studi, appunti di vario genere, in un grosso quaderno, tutto di pugno di RUFFINI, che sui cartoni porta scritto: *Libro dei conti appartenenti allo stabile di S. Agnese,* e nel quale, effettivamente, alcune pagine portano nella loro testata, notazioni relative a conti di un'azienda rurale. Sul soggetto di queste note esiste anche una annotazione, stampata a piè della pag. 434, nel tomo X parte II (Modena 1803) delle Memorie di Matematica e di Fisica della Società Italiana delle Scienze, la quale si riferisce al n° 25 della Memoria: «P. RUFFINI, *Della insolubilità delle equazioni algebraiche generali di grado superiore al quarto*».

Uno svolgimento più ampio si trova in una lettera (tuttora inedita) di P. RUFFINI a GIAN FRANCESCO CREMONA, la quale verrà pubblicata nel *Carteggio.*

[37], pag. 359.

N^i 16-22. Dopo aver osservato che le sostituzioni le quali lasciano *numericamente* invariata una funzione $t(x', \dots, x^{(m)})$, in generale non formano un gruppo, e che perciò i metodi i quali servono

Digitized by Google

ad esprimere per la t una seconda funzione y razionale nelle $x', \ldots, x^{(m)}$ possono cadere in difetto nel caso che la t sia invariabile solo numericamente per certe sostituzioni fra le variabili; data una tale t, si propone di trovare una funzione T razionale della t e tale che tutte le espressioni, da essa formalmente diverse, che ne risultano per effetto delle sostituzioni fra le variabili, abbiano anche valori numerici diversi.

Questo problema è risolto dalla

$$T_\varepsilon = t'^\varepsilon + t''^\varepsilon + \ldots + t^{(\mu)\varepsilon},$$

dove ε è scelto al modo indicato dal RUFFINI, e corrisponde all'altro di *determinare, per una data specie, una funzione con discriminante diverso dallo zero.*

[38], pag. 373.

Nei n^{i} 23-26, supposto che l'equazione proposta sia semplice (cioè irriducibile) si dimostra che il *suo gruppo è transitivo:* Inoltre che la relazione

$$f(x')(x'') \ldots (x^{(m)}) = K,$$

la quale caratterizza la data equazione, deve contenere tutte le radici, e che in essa, per effetto delle sostituzioni del gruppo, in ogni determinato posto devono successivamente venire tutte le m lettere, e ciascuna lo stesso numero di volte.

Con ciò, implicitamente, si dimostra che *l'ordine di un gruppo transitivo è uguale o multiplo del numero delle lettere su cui opera.*

[39], pag. 373.

N° 27. *Se un gruppo di sostituzioni fra* $m = \alpha + \beta + \gamma$ *lettere contiene le due sostituzioni*

$$(1, 2, 3, \ldots, \alpha + \beta)(\alpha + 1, \alpha + 2, \ldots, \alpha + \beta + \gamma),$$

è γ *volte transitivo.*

[40], pag. 382.

N° 29. *Una equazione irriducibile si può considerare come risultante dalla eliminazione di due altre di grado inferiore solo se il suo gruppo è imprimitivo.*

[41], pag. 384.

La nota « *10 agosto 1803* » è tolta dal « *Libro dei conti appartenenti allo stabile di S. Agnese* » ricordato alla nota [36].

L'altra, con la data « *18 agosto 1802* », da un fascicoletto manoscritto, di mano di P. RUFFINI, che porta la intestazione « *Pensieri* ».

Notevole la rispondenza fra la nota di RUFFINI: « La dimostrazione del n° 32 non va bene; se sia per es. $m = 4, \ldots$ », e la osservazione fatta dal BURKHARDT (H.), *Die Anfänge der Gruppentheorie und* PAOLO RUFFINI [Zeitschrift für Mathematik und Physik, Jahrgang XXXVII (1892), Supplement, pp. 121-157, pag. 139, nota a piè di pagina].

« Dass RUFFINI nicht daran gedacht hat, seinen Satz an den Gleichungen vierten Grades einer « Prüfung zu unterwerfen, die die Unrichtigkeit desselben sofort aus Licht gebracht hätte, ist auffallend ».

Sul medesimo argomento il RUFFINI è tornato nella sua Memoria:

Risposta di PAOLO RUFFINI *ai dubbi propostigli dal socio* G. F. MALFATTI *sopra la insolubilità algebraica delle equazioni di grado superiore al quarto* [Memorie di Matematica e di Fisica della Società Italiana delle Scienze, tomo XII, parte I (Modena 1805), pp. 213-267].

Digitized by Google

Digitized by Google

INDICE DEL TOMO I.

PAGINE

Prefazione V

Teoria generale delle equazioni, in cui si dimostra impossibile la soluzione algebraica delle equazioni generali di grado superiore al quarto.

[Bologna MDCCXCVIIII. Nella Stamperia di S. Tommaso d'Aquino. 2 Vol. in 8°, di pp. I-VIII, 1-206 (Parte I) e 207-516 (Parte II)] 1

Appendice alla Teoria delle equazioni. Rischiarimenti e risposte alle obbiezioni.

(Inedita, da un fascicolo manoscritto di pugno di P. RUFFINI) 325

Della soluzione delle equazioni algebraiche determinate particolari di grado superiore al quarto.

[Memorie di Matematica e di Fisica della Società Italiana delle Scienze. Tomo IX (Modena 1802), pp. 444-526 (Ricevuta il 21 Ottobre 1801)] 343

Annotazioni di ETTORE BORTOLOTTI *al Tomo I delle Opere Matematiche di* PAOLO RUFFINI. . . 407

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

89041215013

b89041215013a

Digitized by Google

PHYSICS AND MATH.

G.E.STECHERT & Co
(ALFRED HAFNER)
NEW YORK

Digitized by Google

89041215013

b89041215013a

Digitized by Google